Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Перепелкин, Н. П. Репникова, Н. Г. Иноземцева,
Точное решение задачи пространственного заряда для
движения сферически симметричного пучка в однород-
ном электрическом поле, *Матем. заметки*, 2015, том 98,
выпуск 3, 386–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 10:50:20

Точное решение задачи пространственного заряда для движения сферически симметричного пучка в однородном электрическом поле

Е. Е. Перепелкин, Н. П. Репникова, Н. Г. Иноземцева

Получено точное решение задачи пространственного заряда для однородно заряженного шара, движущегося во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Результаты могут быть использованы при численном моделировании эффекта пространственного заряда реальных пучков в качестве тестов и оценки точности численных методов, используемых при решении задачи пространственного заряда.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10816

1. Введение. Задача учета эффекта пространственного заряда возникает при моделировании динамики пучка в ускорительных установках. При моделировании используются различные подходы, основанные как на статистических методах [1], [2], так и на численных методах, использующих детерминированные Лагранжевы координаты [3]. В работе [4] рассмотрена DV -постановка (1) задачи пространственного заряда в терминах гидродинамического приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(p, t) + \vec{v}(p, t) \cdot \operatorname{div} \vec{D}(p, t) &= \operatorname{rot}[\vec{V}_0(t), \vec{D}(p, t)], & p \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(p, t) + (\vec{v}(p, t), \nabla) \vec{v}(p, t) &= \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}(p, t), \\ \vec{V}_0(t) = \vec{v}_0 + t \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}^e, & \quad \vec{D}(p, t) = \vec{D}^e + \vec{D}^s(p, t), \\ \vec{D}|_{t=0} = \vec{D}_0(p), & \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где символом $[\vec{a}, \vec{b}]$ обозначено векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, символом $(\vec{a}, \vec{b})$ обозначено скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, символ ∇ – дифференциальный оператор набла; ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума; $\vec{v}_0$ – постоянный вектор начальной скорости. Переменная p соответствует пространственным координатам (x, y, z) , а переменная t – времени. Вектор-функция $\vec{D}(p, t)$ является вектором электрического поля; $\vec{v}(p, t)$ – векторное поле скоростей среды; $\vec{D}^e$ – внешнее посто-

янное электрическое поле; $\vec{D}^s$ – собственное электрическое поле пучка. Постоянная $\alpha = q/m$ задает соотношение между зарядом и массой частиц. Ω – область, в которой рассматривается решение системы. Эта система в совокупности с начальными условиями приводит к постановке задачи Коши (1), описывающей своим решением эволюцию функции распределения плотности заряда под действием собственного электрического поля. В работах [5], [6] при различных начальных условиях рассмотрено численное решение DV-постановки.

Решение задачи (1) можно искать в виде разложения вектор-функций электрического поля $\vec{D}(p, t)$ и вектор-функции поля скоростей $\vec{v}(p, t)$ в ряды [4]:

$$\begin{aligned}\vec{D}(p, t) &= \vec{D}(p, 0) + t \cdot \vec{D}_t(p, 0) + \frac{t^2}{2} \vec{D}_{tt}(p, 0) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial^k \vec{D}}{\partial t^k}(p, 0) \frac{t^k}{k!}, \\ \vec{v}(p, t) &= \vec{v}(p, 0) + t \cdot \vec{v}_t(p, 0) + \frac{t^2}{2} \vec{v}_{tt}(p, 0) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial^k \vec{v}}{\partial t^k}(p, 0) \frac{t^k}{k!}.\end{aligned}\quad (2)$$

В работе [4] получены формулы для коэффициентов рядов (2), которые выражаются через частные производные по координатам от начального распределения вектора электрического поля $\vec{D}_0(p)$ и начальную скорость $\vec{v}_0$. В силу произвольности $\vec{D}_0(p)$ получить простую рекуррентную формулу для коэффициентов разложения решения (2) не всегда удастся. С другой стороны, иногда решение задачи может быть получено непосредственно прямым решением системы (1).

2. Точное решение. Сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (1) имеет вид*

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}(t), t) &= \vec{u}(\vec{r}(t), t) + \vec{V}_0(t), \\ \vec{D}(\vec{r}(t), t) &= \vec{D}^e + \vec{D}^s(\vec{r}(t), t), \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}' - \vec{v}_0 t - t^2 \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \vec{D}^e,\end{aligned}\quad (3)$$

где функции $\vec{u}(\vec{r}, t)$ и $\vec{D}^s(\vec{r}, t)$ являются решениями задачи для собственной системы координат:

$$\begin{aligned}\vec{D}_t^s + \vec{u} \cdot \operatorname{div} \vec{D}^s &= 0, \quad p \in \Omega, \\ \vec{u}_t + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} &= \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}^s, \\ \vec{D}^s|_{t=0} &= \vec{D}_0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{\Theta},\end{aligned}\quad (4)$$

где $\vec{\Theta}$ – нулевой вектор начальной скорости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как скорость центра масс системы

$$\vec{V}_0(t) = \vec{v}_0 + t \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}^e$$

и

$$\vec{r} = \vec{r}' - \vec{v}_0 t - t^2 \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \vec{D}^e,$$

то $\vec{r}_t = -\vec{V}_0(t)$. Проверим, является ли выражение (3) решением системы (1), путем подстановки выражения (3) в исходную систему (1). Получим

$$\begin{aligned} \vec{D}^s(t) - (\vec{V}_0, \nabla) \vec{D}^s + \vec{u} \operatorname{div} \vec{D}^s + \vec{V}_0 \operatorname{div} \vec{D}^s &= \operatorname{rot}[\vec{V}_0, \vec{D}], \\ \vec{u}_t - (\vec{V}_0, \nabla) \vec{u} + \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}^e + (\vec{u} + \vec{V}_0, \nabla)(\vec{u} + \vec{V}_0) &= \frac{\alpha}{\varepsilon_0} (\vec{D}^s + \vec{D}^e). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку

$$\operatorname{rot}[\vec{V}_0, \vec{D}] = \vec{V}_0 \operatorname{div} \vec{D}^s - (\vec{V}_0, \nabla) \vec{D}^s,$$

то первое уравнение в (5) переходит в первое уравнение в (4). Второе уравнение в (5) после несложных преобразований переходит во второе уравнение в (4). В результате решение задачи (1) путем подстановки (3) сводится к решению задачи (4), что и требовалось доказать.

Решим задачу об эволюции функции распределения плотности заряда сферически симметричной системы в частном случае однородно заряженного шара. Этот частный случай интересен тем, что допускает точное решение задачи (4).

Рассмотрим шар радиуса R_0 , заряженный с постоянной плотностью ρ_0 . Начальную скорость частиц в этом шаре возьмем равной нулю. По теореме Гаусса распределение электрического поля, создаваемое таким шаром, имеет вид

$$\vec{D}_0(r) = \begin{cases} \vec{e}_r \frac{\rho_0}{3} r, & r \leq R_0, \\ \vec{e}_r \frac{\rho_0}{3} \frac{R_0^3}{r^2}, & r > R_0. \end{cases} \quad (6)$$

Запишем второй закон Ньютона для пробного точечного заряда, находящегося на поверхности шара:

$$R_{tt} = \frac{q}{m\varepsilon_0} D = \frac{q}{m\varepsilon_0} \frac{\rho(t)}{3} R = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 m} \frac{1}{R^2} = \gamma \frac{1}{R^2}, \quad (7)$$

где

$$\rho(t) = \frac{Q}{\omega(t)}, \quad \omega(t) = \frac{4}{3} \pi R(t)^3, \quad (8)$$

$\omega(t)$ – объем шара радиуса $R(t)$ в момент времени t ; Q – суммарный заряд, содержащийся в шаре. Рассмотренные условия приводят к задаче Коши

$$R'' = \gamma \frac{1}{R^2}, \quad R|_{t=0} = R_0, \quad R'|_{t=0} = 0. \quad (9)$$

Умножим обе части уравнения на R' и проинтегрируем по t ; получим

$$(R')^2 = C_1 - \gamma \frac{2}{R}, \quad (10)$$

$$\frac{dR}{\sqrt{C_1 - \gamma \cdot (2/R)}} = dt. \quad (11)$$

Интегрируя (11), получаем

$$t + C_2 = \frac{2\gamma}{C_1 \sqrt{C_1}} \left(\sqrt{s(s-1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arccch}(2s-1) \right), \quad (12)$$

где $s = R/R_0$. Учет начальных условий приводит к выражению, задающему неявно зависимость радиуса от времени:

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}} \left(\sqrt{\frac{R}{R_0} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arccch} \left(2 \frac{R}{R_0} - 1 \right) \right). \quad (13)$$

Данное выражение можно переписать через функцию распределения плотности, если учесть, что

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (14)$$

Тогда из (13) следует, что

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}} \left(\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arccch} \left(2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} - 1 \right) \right). \quad (15)$$

Итак, получено аналитическое решение (15) модельной задачи об эволюции функции распределения плотности заряда однородно заряженного шара, что согласуется с результатами работы [7]. Из решения (15) видно, что плотность заряда внутри шара не зависит от пространственной координаты, т.е. вдоль радиуса плотность постоянна, и ее значение зависит только от времени: слои частиц внутри сферы не перемешиваются между собой в процессе “рассыпания”. На рис. 1 приведен график эволюции функции плотности заряда от времени, построенной по формуле (15).

Рис. 1. Эволюция функции распределения плотности заряда

Рассмотрим задачу Коши (4) для однородно заряженного шара и покажем, что решение задачи Коши (4) в этом случае совпадает с решением (15), полученным с помощью теоремы Гаусса и уравнений движения. Имеет место теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Решение (15)*

$$t = \frac{R_0^{3/2}}{\sqrt{2\gamma}} \left(\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arccch} \left(2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} - 1 \right) \right)$$

задачи Коши для однородно заряженного шара (9):

$$R'' = \gamma \frac{1}{R^2}, \quad R|_{t=0} = R_0, \quad R'|_{t=0} = 0.$$

является решением задачи Коши (4) для однородно заряженного шара:

$$\begin{aligned} \vec{D}_t^s + \vec{u} \cdot \operatorname{div} \vec{D}^s &= 0, & p \in \Omega, \\ \vec{u}_t + (\vec{u}, \nabla) \vec{u} &= \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \vec{D}^s, \\ \vec{D}^s|_{t=0} &= \vec{D}_0, & \vec{u}|_{t=0} = \Theta. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторные поля $\vec{D}^s(\vec{r}, t)$ и $\vec{u}(\vec{r}, t)$ имеют только радиальные компоненты в силу сферической симметрии задачи, поэтому решение задачи (4) можно искать в виде

$$\vec{D}^s(r, t) = a(t)\vec{r}, \quad \vec{u}(r, t) = b(t)\vec{r}, \quad (16)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – некоторые неизвестные функции, зависящие от времени. Из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \vec{D}^s = \rho$ с учетом (16), получим

$$\rho(r, t) = 3a(t). \quad (17)$$

Подставим выражения (16) в уравнения задачи Коши (4). Получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} + 3ab &= 0, \\ \frac{db}{dt} + b^2 &= \frac{\alpha}{\varepsilon_0} a. \end{aligned} \quad (18)$$

Систему (18) необходимо дополнить начальными условиями из задачи Коши (4):

$$a(0) = \frac{(\vec{D}_0, \vec{r})}{r^2}, \quad b(0) = 0. \quad (19)$$

Выражая из первого уравнения системы (18) функцию $b(t)$:

$$b(t) = -\frac{1}{3a} \frac{da}{dt}, \quad (20)$$

и подставляя (20) во второе уравнение системы (18), получаем нелинейное дифференциальное уравнение относительно $a(t)$:

$$3a \frac{d^2 a}{dt^2} - 4 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon_0} 9a^3 = 0. \quad (21)$$

Начальные условия для уравнения (21) получаются из (19) и (20):

$$a(0) = \frac{(\vec{D}_0, \vec{r})}{r^2}, \quad \frac{da}{dt}(0) = 0. \quad (22)$$

Введем новую функцию $R(t)$ как

$$\rho = 3a(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3, \quad (23)$$

откуда для $a(t)$ получим

$$a(t) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{R(t)^3}. \quad (24)$$

Подставим представление (24) для функции $a(t)$ в уравнение (21), получим

$$R_{tt} = \gamma \frac{1}{R^2}. \quad (25)$$

В силу (17) $a(0) = \rho_0/3$, откуда и из (23) следует

$$R(0) = R_0. \quad (26)$$

Дифференцируя выражение (23) и учитывая (22), получаем

$$R'(0) = -\frac{R_0}{\rho_0} \frac{da}{dt}(0) = 0. \quad (27)$$

Полученное для $R(t)$ уравнение (25) вместе с начальными условиями (26) и (27) дает задачу Коши, полностью совпадающую с задачей Коши (9). В силу единственности решения задачи Коши решения задач (9) и (25)–(27) тоже совпадают. То есть найденное решение (16) задачи Коши (9) является решением задачи Коши (4), что и требовалось доказать.

Заключение. Получено точное решение DV -постановки задачи учета эффекта пространственного заряда для модельной системы – однородно заряженного шара, движущегося во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Показано, что две модельные постановки – в одном случае второй закон Ньютона с использованием теоремы Гаусса, а в другом случае уравнения Максвелла с элементами гидродинамического приближения, – дают одинаковую физическую картину эволюции функции распределения плотности заряда.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве тестов при численном моделировании эффекта пространственного заряда пучка и анализе процессов, сопровождающих “кулоновский взрыв”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Власов, *Статистические функции распределения*, Наука, М., 1968.
- [2] Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников, “Эволюция функциональной гипотезы Н. Н. Боголюбова и нелокальность процессов переноса в гидродинамике твердых сфер”, *ЭЧАЯ*, **18:4** (1987), 878–903.
- [3] F. N. Harlow, “The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics”, *Proc. Symp. Applied Mathematics*, **15**, 1963, 269.
- [4] Б. И. Садовников, Е. Е. Перепелкин, Н. П. Репникова, Н. Г. Иноземцева, “Учет эффекта пространственного заряда в гидродинамическом приближении”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ., астрон.*, 2014, № 6, 53.

- [5] E. E. Perepelkin, N. G. Inozemtseva, A. A. Zhavoronkov, “The evolution of the charge density distribution function for spherically symmetric system with zero initial conditions”, *World J. Condensed Matter Phys.*, **4** (2014), 33–38.
- [6] B. I. Sadovnikov, A. A. Zhavoronkov, “The case of nonzero initial conditions in the evolution of the charge density distribution function for a spherically symmetric system”, *J. Appl. Math. Phys.*, **2** (2014), 495–502.
- [7] A. E. Kaplan, B. Y. Dubetsky, P. L. Shkolnikov, “Shock shells in Coulomb explosions of nanoclusters”, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:14 (2003), 143401.

Е. Е. Перепелкин

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: perepelkin.evgeny@phys.msu.ru

Поступило

25.12.2014

Н. П. Репникова

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: natalia.repnikova@mail.ru

Н. Г. Иноземцева

Международный университет природы, общества и
человека “Дубна”, г. Дубна

E-mail: nginozv@mail.ru