Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Березовский, Н. И. Гусева, Й. Микеш, О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 463–466

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:30:47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор

В. Е. Березовский, Н. И. Гусева, Й. Микеш

1. Введение. В шестидесятых годах Синюковым [1] были введены в рассмотрение почти геодезические отображения римановых и аффинносвязных пространств, основные результаты которых изложены в его монографии [2] и обзорных статьях [3], [4].

Теория почти геодезических отображений естественным образом развивалась во многих работах, например [5]–[15]. Почти геодезические отображения первого типа, выделенные Синюковым, исследовались Березовским и Микешем [7]–[10], Яблонской [16]. Это направление, в частности, следует намеченному Петровым [17] плану моделирования физических процессов при помощи отображений и преобразований.

В настоящей работе изучаются частные случаи канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности. Основные уравнения рассматриваемых отображений сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение. Приведен пример таких отображений.

2. Канонические почти геодезические отображения. Напомним основные понятия теории почти геодезических отображений пространств аффинной связности, которые изложены в [2]–[4].

Рассмотрим n -мерное пространство аффинной связности A_n без кручения, отнесенное к системе координат $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Предполагаем, что $n > 2$ и все рассматриваемые функции считаем достаточно гладкими.

Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n , называют *почти геодезической*, если вдоль нее существует двумерная параллельная площадка, содержащая ее касательный вектор.

Диффеоморфизм $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют *почти геодезическим отображением*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Для того чтобы отображение пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ тензор деформации связностей $P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$ удовлетворял условиям

$$A_{\alpha\beta\gamma}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = a \lambda^h + b P_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta,$$

где $A_{ijk}^h = P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h$, $\Gamma_{ij}^h(x)$ и $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ – объекты аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$, соответственно, λ^h – произвольный вектор, a и b – некоторые функции переменных x^h

и λ^h . Здесь и в дальнейшем знак “,” обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n .

В работах [1]–[4] выделены три типа почти геодезических отображений: π_1 , π_2 и π_3 . Нами доказано [7], что при $n > 5$ других типов не существует.

Почти геодезические отображения типа π_1 характеризуются следующими условиями на тензор деформации:

$$A_{(ijk)}^h = a_{(ij}\delta_{k)}^h + b_{(i}P_{jk)}^h,$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, b_i – некоторый ковектор, δ_i^h – символы Кронекера, (ijk) – обозначает симметрирование по указанным индексам без деления.

Если в указанном уравнении $b_i \equiv 0$, то отображение называют *каноническим*. Известно [2], [3], что любое почти геодезическое отображение типа π_1 можно представить в виде композиции канонического почти геодезического отображения типа π_1 и геодезического отображения.

3. Частный случай почти геодезических отображений. Пусть при отображении пространств аффинной связности A_n и $\bar{A}_n$ выполняются условия

$$P_{ij,k}^h = -P_{ij}^\alpha P_{k\alpha}^h + a_{(ij}\delta_{k)}^h. \quad (1)$$

Такие отображения являются частным случаем почти геодезических отображений (ПГО) первого типа.

Если выполняется соотношение (1), то

$$A_{ijk}^h = -\frac{1}{3}P_{kj}^\alpha P_{i\alpha}^h - \frac{1}{3}P_{ki}^\alpha P_{j\alpha}^h + \frac{2}{3}P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h + \frac{1}{3}a_{(ij}\delta_{k)}^h.$$

Тогда $A_{(ijk)}^h = a_{(ij}\delta_{k)}^h$. Поэтому такие отображения являются частным случаем канонических почти геодезических отображений первого типа π_1 .

Между тензорами Римана $\bar{R}_{ijk}^h$ и R_{ijk}^h пространств A_n и $\bar{A}_n$ имеется зависимость [2], [11]:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + P_{i[k,j]}^h + P_{i[k}^\alpha P_{j]\alpha}^h, \quad (2)$$

где $[kj]$ обозначает альтернирование по указанным индексам.

На основании формул (1) и (2) имеет место

ТЕОРЕМА 1. Тензор $R_{(ij)k}^h$ является инвариантным относительно почти геодезических отображений, определенных уравнениями (1), пространств аффинной связности.

Поскольку тензор Римана в аффинном пространстве обращается в нуль, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если аффинное пространство допускает почти геодезическое отображение, определенное уравнениями (1), на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является тоже аффинным пространством.

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно ПГО, определяемые уравнениями (1).

Рассматривая (1) как систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных относительно неизвестных тензора деформации P_{ij}^h и тензора a_{ij} , найдем условия их интегрируемости. Для этого ковариантно продифференцируем (1) по x^m , а затем проальтернируем по индексам k и t . С учетом тождества Риччи получим

$$a_{i[k,m]}\delta_j^h + a_{j[k,m]}\delta_i^h + a_{ij,[m}\delta_{k]}^h = -P_{ij}^\alpha R_{\alpha km}^h + P_{\alpha(i}^\alpha R_{j)km}^h + a_{i[m}P_{k]j}^h + a_{j[m}P_{k]i}^h. \quad (3)$$

Условия интегрируемости (3) свернем по индексам h и t . В результате будем иметь

$$a_{ik,j} + a_{jk,i} - (n+1)a_{ij,k} = -P_{ij}^\alpha R_{\alpha k} + P_{\alpha(i}^\beta R_{j)k\beta}^\alpha - a_{\alpha(i}P_{j)k}^\alpha - a_{k(i}P_{j)\alpha}^\alpha. \quad (4)$$

Проальтернируем уравнения (4) по индексам i и k . Получим следующие соотношения:

$$a_{jk,i} = a_{ij,k} + \frac{1}{n+2} (P_{ij}^\alpha R_{\alpha k} - P_{ik}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\beta j}^\alpha R_{ik\alpha}^\beta + P_{\beta k}^\alpha R_{ij\alpha}^\beta - P_{\beta i}^\alpha R_{jk\alpha}^\beta + P_{\beta i}^\alpha R_{kj\alpha}^\beta - a_{j\alpha} P_{ik}^\alpha + a_{k\alpha} P_{ij}^\alpha + a_{ik} P_{j\alpha}^\alpha - a_{ij} P_{k\alpha}^\alpha). \quad (5)$$

В уравнении (5) поменяем местами индексы i и k , а затем полученное и (5) подставим в соотношения (4). В итоге находим

$$a_{ij,k} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} [n \cdot (P_{ik}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\beta(i}^\alpha R_{k)j\alpha}^\beta) + R_{\alpha(k} P_{i)j}^\alpha - P_{\beta j}^\alpha R_{(ik)\alpha}^\beta - P_{\beta i}^\alpha R_{jk\alpha}^\beta - P_{\beta k}^\alpha R_{ji\alpha}^\beta + (n+1) \cdot (a_{j(i} P_{k)\alpha}^\alpha - a_{\alpha(i} P_{k)j}^\alpha) + 2(a_{ik} P_{j\alpha}^\alpha - a_{j\alpha} P_{ik}^\alpha)]. \quad (6)$$

Очевидно, уравнения (1) и (6) в данном пространстве A_n представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно неизвестных функций $P_{ij}^h(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера $P_{ij}^h(x) = P_{ji}^h(x)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$. Тем самым, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (1), на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши (1) и (6) относительно неизвестных функций $P_{ij}^h(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Из свойств этой системы уравнений установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы, не превосходит числа $r \leq 1/2 n(n+1)^2$.

4. Почти геодезические отображения аффинного пространства, удовлетворяющие частному случаю уравнений (1). В заключение рассмотрим уравнения (1) для случая, когда тензор a_{ij} тождественно обращается в нуль. В этом случае уравнения (1) принимают более простой вид:

$$P_{ij,k}^h = -P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h. \quad (7)$$

Условия интегрируемости уравнений (7) имеют вид $P_{ij}^\alpha R_{\alpha km}^h + P_{\alpha(i}^\alpha R_{j)km}^h = 0$ и в аффинном пространстве уравнения (7) вполне интегрируемы. Следовательно, уравнения (7) в аффинном пространстве имеют решения для любых начальных значений тензора деформации $P_{ij}^h(x_0)$.

Если начальные значения таковы, что $P_{ij}^h(x_0) \neq \delta_i^h \psi_j(x_0)$, то построенное таким образом решение устанавливает почти геодезическое отображение первого типа, отличное от геодезического, аффинного пространства A_n на аффинное пространство $\bar{A}_n$. Поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Существуют почти геодезические отображения первого типа, определяемые уравнениями (1), аффинного пространства на себя, при котором прямые линии переходят в плоские кривые.*

В заключение покажем в явном виде пример почти геодезического отображения первого типа, определяемого уравнениями (7), аффинного пространства A_n на $\bar{A}_n$.

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ — аффинные координаты A_n и $\bar{A}_n$ соответственно. Точечное отображение

$$\bar{x}^h = \frac{1}{2} c_\alpha^h (x^\alpha - c^\alpha)^2 + x^h, \quad (8)$$

где c_i^h , c^h , x_0^h — некоторые постоянные, причем $x^h \neq c^h \det |c_i^h| \neq 0$, определяет почти геодезическое отображение первого типа пространства A_n и $\bar{A}_n$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор деформации связностей P_{ij}^h в системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеет вид $P_{hh}^h = 1/(x^h - c^h)$, $h = 1, 2, \dots, n$, а остальные компоненты равны нулю. Это решение удовлетворяет уравнениям (7). Легко убедиться, что при таком строении тензора деформации отображение будет отличным от типов π_2 и π_3 .

При таком отображении прямые линии пространства A_n , которые, как известно, определяются уравнениями $x^h = a^h + b^h t$, где t – параметр, переходят в параболы пространства $\bar{A}_n$, определяемые уравнениями

$$\bar{x}^h = D^h + E^h t + F^h t^2,$$

где $D^h = 1/2c_\alpha^h(a^\alpha - c^\alpha)^2$, $E^h = c_\alpha^h(a^\alpha - c^\alpha)b^\alpha$, $F^h = 1/2c_\alpha^h(b^\alpha)^2$. Исключение представляют прямые, для которых вектора E^h и F^h коллинеарны. В этом случае их образами являются прямые.

В заключение отметим, что формулы (7) порождают семейство почти геодезических преобразований типа π_1 плоского пространства, если считать коэффициенты c_i^h , c^h и x_0^h непрерывными параметрами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. С. Синюков, *Докл. АН СССР*, **151**:4 (1963), 781–782. [2] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979. [3] Н. С. Синюков, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **13**, ВИНТИ, М., 1982, 3–26. [4] В. Е. Березовский, Й. Микеш, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **126**, ВИНТИ, М., 2013, 62–95. [5] I. Hinterleitner, J. Mikeš, *Note Mat.*, **27**:1 (2007), 111–118. [6] J. Mikeš, *J. Math. Sci. (New York)*, **89**:3 (1998), 1334–1353. [7] V. Berezovski, J. Mikeš, *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, **35** (1996), 21–24. [8] V. E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Differential Geometry and its Applications*, Word Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, 65–75. [9] В. Е. Березовский, Й. Микеш, *Физико-математические науки*, Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, **151**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 9–14. [10] V. Berezovsky, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, **26**:2 (2010), 221–230. [11] J. Mikeš, A. Vanžurová, I. Hinterleitner, *Geodesic Mappings and Some Generalizations*, Palacký Univ. Olomouc, Olomouc, 2009. [12] В. Е. Березовский, Й. Микеш, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, № 2, 3–8. [13] V. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, **37**:3 (2014), 647–659. [14] А. В. Аминова, *Изв. вузов. Матем.*, 1979, № 4, 71–75. [15] В. С. Собчук, *Изв. вузов. Матем.*, 1989, № 5, 62–64. [16] Н. В. Яблонская, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 1, 78–80. [17] А. З. Петров, *Гравитация и теория относительности*, **4-5**, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1968, 7–21.

В. Е. Березовский

Уманский национальный
университет садоводства, Украина
E-mail: Berez.Volod@rambler.ru

Поступило

26.03.2014

Исправленный вариант

08.06.2014

Н. И. Гусева

Московский педагогический
государственный университет
E-mail: ngus12@email.ru

Й. Микеш

Оломоуцкий университет
им. Франтишека Палацкого, Чехия
E-mail: Josef.Mikes@upol.cz