Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, К одной теореме Ловаса о хроматическом числе сферы, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 470–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:54:46

К одной теореме Ловаса о хроматическом числе сферы

А. М. Райгородский

1. Введение. В 1981 г. П. Эрдеш ввел в рассмотрение *хроматическое число сферы*, т.е. величину $\chi(S_r^{n-1})$, равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки на $(n-1)$ -мерной сфере S_r^{n-1} радиуса r в $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1 (расстояние между точками измеряется в объемлющем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Легко видеть, что

$$\chi(S_r^{n-1}) = \begin{cases} 1, & r < 1/2, \\ 2, & r = 1/2. \end{cases}$$

Эрдеш высказал гипотезу, что уже при любом $r > 1/2$ хроматическое число сферы стремится к бесконечности. Ловас в 1983 г. доказал (см. [1]) даже более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (ЛОВАС). Для любого $r > 1/2$ и любого n выполнена оценка

$$\chi(S_r^{n-1}) \geq n.$$

Доказательство теоремы 1 довольно нетривиальное: в нем используется одна модификация топологического метода в комбинаторике (см. [2]). В настоящей заметке мы приведем и обсудим совсем короткое доказательство следующего чуть более слабого результата.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ω – любая функция натурального аргумента n , которая стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Пусть r – любая функция натурального аргумента n , которая при каждом n не меньше величины $1/2 + \omega(n)/n$. Тогда

$$\chi(S_{r(n)}^{n-1}) \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство теоремы 2 мы дадим в следующем пункте. В п. 3 мы обсудим ряд вопросов, которые возникают в связи с полученным результатом.

2. Доказательство теоремы 2. Будем считать, что $\omega = o(n)$. Это не ограничит общности, поскольку ясно, что

$$\chi(S_r^{n-1}) \geq \chi(S_{r'}^{n-2})$$

при любых r, r' , удовлетворяющих неравенству $r > r'$. По той же причине будем считать, что число n четное.

Рассмотрим множество точек

$$V_n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = \frac{n}{2} \right\}.$$

Заметим, что оно лежит на сфере радиуса $\sqrt{n/4}$.

Пусть δ – некоторая положительная целочисленная функция аргумента n , которая бесконечно мала по отношению к n , которая, однако, стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ и которую мы подберем чуть позже в зависимости от нашей функции ω . Построим граф $G_n = (V_n, E_n)$, соединяя две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n$ ребром тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ равно $\delta(n)$ или, что то же самое, евклидово расстояние между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равно $\sqrt{n - 2\delta(n)}$. Если отнормировать все точки из V_n на $\sqrt{n - 2\delta(n)}$, то длина каждого ребра нового графа $G'_n = (V'_n, E'_n)$ окажется равной 1 и вершины этого графа будут лежать

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-03530), гранта Президента РФ № МД-6008.2015.1 и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2964.2014.1).

DOI: 10.4213/mzm10818

© А. М. Райгородский, 2015

на сфере, радиус $r'(n)$ которой имеет величину $1/2 + \Theta(\delta(n)/n)$. Разумеется, не составляет труда так выбрать δ , чтобы величина r' была при каждом n меньше величины r из формулировки теоремы 2. Для завершения доказательства достаточно, стало быть, убедиться в том, что хроматическое число $\chi(G'_n)$ графа G'_n стремится к бесконечности.

Выберем в графе G_n индуцированный подграф H_n , вершины которого – это все возможные точки $\mathbf{x} \in V_n$ с координатами

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{\delta(n)} = 1.$$

Очевидно, граф H_n изоморфен графу, вершины которого суть $(n/2 - \delta(n))$ -элементные подмножества множества мощности $n - \delta(n)$, а ребра – пары подмножеств, имеющих пустое пересечение. Это кнезеровский граф $KG_{n-\delta(n), n/2-\delta(n)}$, и хорошо известно, что его хроматическое число равно (см. [2])

$$(n - \delta(n)) - 2 \left(\frac{n}{2} - \delta(n) \right) + 2 = \delta(n) + 2 \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Итак,

$$\chi(G'_n) = \chi(G_n) \geq \chi(H_n) = \chi(KG_{n-\delta(n), n/2-\delta(n)}) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

и теорема 2 доказана.

3. Комментарий. Как видно, в доказательстве теоремы 2 есть огромный запас прочности, ведь фактически в нем мы работаем не с евклидовой сферой, но со сферой в хэмминговом пространстве. Вернее, речь идет о графе с вершинами в булевом кубе. Более общий класс графов такого вида устроен следующим образом:

$$V_n(k(n)) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = k(n)\},$$

$$E_n(k(n), t(n)) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t(n)\}.$$

Графы

$$G_n(k(n), t(n)) = (V_n(k(n)), E_n(k(n), t(n)))$$

были использованы в работах [3], [4], где было доказано, что для любого фиксированного $r > 1/2$ хроматическое число $\chi(S_{r(n)}^{n-1})$ растет экспоненциально по n и что при $r \geq 1/2 + c/n^{0.475}$ с достаточно большим $c > 0$ выполнена оценка $\chi(S_{r(n)}^{n-1}) > n + 2$, вопреки одному ложному утверждению Ловаса, сделанному все в той же работе [1]. Любопытно, что метод, примененный в работах [3], [4] для обоснования нижних оценок хроматических чисел графов $G_n(k(n), t(n))$, – а именно, линейно-алгебраический метод (см. [5], [6]) – не позволяет получать растущих оценок для графов из доказательства теоремы 2. С другой стороны, оценка, которой мы воспользовались здесь, кажется весьма грубой. Посему значительный интерес представляет отыскание хроматических чисел графов вида $G_n(n/2, \delta(n))$ при медленно растущих $\delta(n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Lovász, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45** (1983), 317–323. [2] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003. [3] А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, **432:2** (2010), 174–177. [4] А. М. Raigorodskii, *Combinatorica*, **32:1** (2012), 111–123. [5] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [6] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.

А. М. Райгородский

Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова;
Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: mraigor@yandex.ru

Поступило

09.12.2014