Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Рацеев, Функции сложности многообразий алгебр
Лейбница с нильпотентным коммутантом, *Матем. за-
метки*, 2015, том 98, выпуск 3, 472–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:05:48

Функции сложности многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом

С. М. Рацев

Алгебры Лейбница определяются тождеством $(xy)z = (xz)y + x(yz)$ и являются обобщениями алгебр Ли. Данные алгебры начали активно изучаться в 90-х годах, начиная с работы Лодья [1]. Алгебры Лейбница связаны естественным образом с дифференциальной геометрией, гомологической алгеброй, классической алгебраической топологией и некоммутативной геометрией [1].

Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Лейбница над полем K , где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – счетное множество свободных образующих, P_n – подпространство в $L(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр Лейбница, $\text{Id}(\mathbf{V})$ – идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в свободной алгебре $L(X)$ (все необходимые определения и сведения из теории PI-алгебр можно найти например в монографии [2]). Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n / (P_n \cap \text{Id}(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}).$$

Будем опускать скобки при их левонормированной расстановке: $((ab)c) = abc$.

В следующей лемме, которую нетрудно проверить, приводится конструкция алгебр Лейбница на основе ассоциативных алгебр.

ЛЕММА 1. Пусть A – некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K . На декартовом квадрате $B = A \times A$ определим операции сложения и умножения элементов множества B , а также операцию умножения на элементы поля K :

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ (x_1, x_2)(y_1, y_2) &= ([x_1, y_1], [x_2, y_1]), \\ \alpha(x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2), \end{aligned}$$

где $[x, y] = x \wedge y - y \wedge x$, $\alpha \in K$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Определим многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}$ тождеством

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2s+1} x_{2s+2}) = 0.$$

В работах [3], [4] приводятся оценки роста подмногообразий в $\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}$, а в работе [5] получены эквивалентные условия для значений экспонент многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом.

Пусть $UT_s = UT_s(K)$ – алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над полем K , $\widetilde{U}_s = UT_s \times UT_s$ – алгебра Лейбница, построенная с помощью леммы 1. Нетрудно видеть, что $\widetilde{U}_s \in \widetilde{\mathbf{N}_{s-1} \mathbf{A}}$.

ТЕОРЕМА 1. (i) В случае произвольного поля K следующие полилинейные элементы от переменных $x_1, \dots, x_n$ образуют базис пространства $P_n(\widetilde{U}_s)$, $s \geq 2$:

$$x_{m_1} x_{m_2} x_{i_1} \dots x_{i_k} (x_{11} \dots x_{1a_1}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}), \quad (1)$$

$$m_1, m_2 \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m_1 \neq m_2, \quad k \geq 0, \quad i_1 < \dots < i_k, \quad a_1, \dots, a_c \geq 2, \quad 0 \leq c \leq s-2, \quad (2)$$

и переменные в каждой скобке $(x_{j_1} \dots x_{j_{a_j}})$ упорядочены следующим образом:

$$j_1 > j_2 < \dots < j_{a_j}.$$

(ii) Если характеристика поля K равна нулю, то тождество

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2s-1} x_{2s}) = 0$$

порождает идеал тождеств алгебры $\tilde{U}_s$ (иными словами, алгебра $\tilde{U}_s$ является носителем многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_{s-1}\mathbf{A}}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = L(X)$ – свободная алгебра Лейбница. Рассмотрим следующие векторные пространства:

$$R_{c,n} = P_n((L^2)^{c+1}/(L^2)^{c+2}), \quad c = 0, 1, \dots$$

Заметим, что $P_n(\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}) \cong \bigoplus_{c=0}^{s-1} R_{c,n}$. Пространство $R_{c,n}$ представимо в виде линейной оболочки следующих полилинейных элементов от переменных $x_1, \dots, x_n$:

$$R_{c,n} = \langle x_{m_1} x_{m_2} x_{i_1} \dots x_{i_k} (x_{11} \dots x_{1a_1}) (x_{21} \dots x_{2a_2}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}) \mid k \geq 0, a_i \geq 2, i = 1, \dots, c, a_1 + \dots + a_c + k + 2 = n \rangle_K.$$

В элементах пространства $R_{c,n}$ можно менять местами переменные $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, а также переменные в любой j -й скобке, $j = 1, \dots, c$, начиная с 3-й позиции, поскольку, меняя местами две рядом стоящие переменные, мы дополнительно получаем элемент из $(L^2)^{c+2}$. Также используя тождество $x(yy) = 0$, которое выполнено в любой алгебре Лейбница, можно в элементах пространства $R_{c,n}$ в любой j -й скобке, $j = 1, \dots, c$, переменные упорядочить так, чтобы выполнялись неравенства $j_1 > j_2 < \dots < j_{a_j}$. Так как $\tilde{U}_s \in \widetilde{\mathbf{N}_{s-1}\mathbf{A}}$, то $P_n(\tilde{U}_s)$ является линейной оболочкой элементов вида (1) с условиями (2).

Каждому элементу ω вида (1) сопоставим такой упорядоченный набор чисел (длины скобок): $I(\omega) = (k+2, a_1, \dots, a_c)$. На множестве элементов данного вида определим частичную упорядоченность. Пусть ω_1, ω_2 – элементы вида (1). Определим $\omega_1 \prec \omega_2$, если набор $I(\omega_1)$ лексикографически слева направо меньше набора $I(\omega_2)$.

Предположим, что для некоторого n элементы вида (1) с условиями (2) линейно зависимы в $P_n(\tilde{U}_s)$. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (1) зафиксируем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент, минимальное значение c и является минимальным элементом относительно порядка $\prec$ среди всех элементов с ненулевыми коэффициентами и минимальными значениями c . Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha x_{m_1} x_{m_2} x_{i_1} \dots x_{i_k} (x_{11} \dots x_{1a_1}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}), \quad 0 \neq \alpha \in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$\begin{aligned} x_{m_1} &\rightarrow (0, e_{11}), & x_{m_2} &\rightarrow (e_{12}, 0), & x_{i_1} &\rightarrow (e_{22}, 0), & x_{i_2} &\rightarrow (e_{22}, 0), & \dots, & x_{i_k} &\rightarrow (e_{22}, 0), \\ x_{11} &\rightarrow (e_{23}, 0), & x_{12} &\rightarrow (e_{33}, 0), & x_{13} &\rightarrow (e_{33}, 0), & \dots, & x_{1a_1} &\rightarrow (e_{33}, 0), \\ x_{21} &\rightarrow (e_{34}, 0), & x_{22} &\rightarrow (e_{44}, 0), & x_{23} &\rightarrow (e_{44}, 0), & \dots, & x_{2a_2} &\rightarrow (e_{44}, 0), \\ &\dots & & & & & & & \\ x_{c1} &\rightarrow (e_{c+1,c+2}, 0), & x_{c2} &\rightarrow (e_{c+2,c+2}, 0), & x_{c3} &\rightarrow (e_{c+2,c+2}, 0), & \dots, & x_{ca_c} &\rightarrow (e_{c+2,c+2}, 0), \end{aligned}$$

где e_{ij} – матричные единицы. Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha(0, e_{1,c+2})$. Понятно, что равенство $\alpha(0, e_{1,c+2}) = (0, 0)$ выполнено лишь в случае $\alpha = 0$. Противоречие.

Ю. П. Размыслов предложил рассматривать для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это один из примеров экспоненциальной производящей функции [6]. Функции сложности оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [7], [8].

Рассмотрим функцию сложности в более общем виде. Пусть имеется алгебра (группоид), порожденная счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, и A – подпространство в данной алгебре (множество элементов в группоиде). Для любого набора $Y = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subset X$ различных элементов обозначим через $P_n(A, Y)$ линейную оболочку (множество) всех полилинейных элементов степени n от Y в A . Пусть размерность этой линейной оболочки (число элементов) $c_n(A, Y)$ не зависит от выбора Y , а зависит только от n . Тогда обозначим $c_n = c_n(A, Y)$ и будем говорить, что для A определена функция сложности относительно множества X :

$$\mathcal{C}(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

(для ассоциативных алгебр и группоидов с единицей сумма берется с $n = 0$, при этом $c_0 = 1$).

ЛЕММА 2 [6]. Пусть Γ – группоид (алгебра), порожденный счетным множеством X . Предположим, что для подмножеств (подпространств) $A \subset \Gamma$, $B \subset \Gamma$ определены функции сложности.

1. Пусть $U = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, ($U = A \oplus B$ – прямая сумма). Тогда U обладает функцией сложности, причем $\mathcal{C}(U, z) = \mathcal{C}(A, z) + \mathcal{C}(B, z)$.
2. Пусть все элементы $a * b$, $a \in A$, $b \in B$, множества $A * B \subset \Gamma$ различны (линейно независимы), где $*$ – произведение в группоиде (алгебре). Тогда $A * B$ обладает функцией сложности, причем $\mathcal{C}(A * B, z) = \mathcal{C}(A, z)\mathcal{C}(B, z)$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ – две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Для многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}$ над произвольным полем верны следующие утверждения:

- 1) $\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}$ имеет следующую функцию сложности:

$$\mathcal{C}(\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}, z) = z + \frac{z^2}{z-1} ((1 + (z-1) \exp(z))^s - 1);$$

- 2) для любого $n \geq 2$ выполнено равенство

$$c_n(\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^s k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!};$$

- 3) $c_n(\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}) \approx n^{s+1} s^{n-s-1}$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Учитывая теорему 1, пространство $P_n(\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A})$ представимо в виде прямой суммы $P_n(\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}) \cong \bigoplus_{c=0}^{s-1} R_{c,n}$, где $R_{c,n}$ является линейной оболочкой элементов

вида (1) с условиями (2) и фиксированным значением s . Учитывая лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(R_{0,n}, z) &= \exp(z)z^2, \\ \mathcal{C}(R_{i,n}, z) &= \exp(z)z^2(z(\exp(z) - 1) - (\exp(z) - 1 - z))^i \\ &= \exp(z)z^2(1 + (z - 1)\exp(z))^i, \quad i = 1, \dots, s - 1, \\ \mathcal{C}(\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}, z) &= z + \exp(z)z^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{s-1} (1 + (z - 1)\exp(z))^i \right).\end{aligned}$$

Осталось привести функцию сложности $\mathcal{C}(\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}, z)$ к требуемому виду, учитывая равенство $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ (см. [9]).

2) Запишем функцию сложности в виде

$$\mathcal{C}(\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}, z) = z + \sum_{k=1}^s C_s^k z^2 (z - 1)^{k-1} \exp(kz). \quad (3)$$

При этом

$$\begin{aligned}z^2(z - 1)^{k-1} \exp(kz) &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i z^{i+2} (-1)^{k-1-i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} z^m \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} z^{m+i+2} \frac{k^m}{m!} \\ &= \sum_{m+i+2=n} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{k^{n-i-2}}{(n-i-2)!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{1}{k^{i+2}} \frac{n!}{(n-i-2)!} \right) \frac{k^n}{n!} z^n.\end{aligned}$$

В последнем равенстве использовался тот факт, что $n!/(n-i-2)! = 0$ при $n-i-2 < 0$. Подставим последнюю двойную сумму в (3):

$$z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left(\sum_{k=1}^s k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{1}{k^{i+2}} \frac{n!}{(n-i-2)!} \right).$$

То, что находится внутри скобок, и есть $c_n(\widetilde{\mathbf{N}_s \mathbf{A}})$, $n \geq 2$.

3) Следует из пункта 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-L. Loday, *Enseign. Math.* (2), **39**:3-4 (1993), 269–293. [2] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985. [3] С. М. Рацеев, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2006, № 6/1, 70–77. [4] С. М. Рацеев, *Матем. заметки*, **82**:1 (2007), 108–117. [5] С. М. Рацеев, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010, № 4, 65–72. [6] Я. Гульден, Д. Джексон, *Перечислительная комбинаторика*, Наука, М., 1990. [7] В. М. Петроградский, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:4 (1995), 989–1007. [8] В. М. Петроградский, *Матем. сб.*, **188**:6 (1997), 119–138. [9] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998.

С. М. Рацеев

Ульяновский государственный университет

E-mail: RatseevSM@mail.ru

Поступило

23.12.2014

Исправленный вариант

10.01.2015