Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Левенштам, Старшие приближения метода усреднения для квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью в случае задачи Коши, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 562–572

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:07:11

УДК 517.9

СТАРШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ В СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ КОШИ

В. Б. Левенштам

Предложен и обоснован алгоритм построения старших приближений метода усреднения для квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.

Библиография: 12 названий.

В работах [1], [2] обоснован метод усреднения для задачи об ограниченных на всей временной оси решениях квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка $2k$ с быстро осциллирующими коэффициентами при старших производных. Настоящая работа посвящена построению старших приближений метода усреднения для таких уравнений в случае задачи Коши. Предварительно сформулирована теорема 1, в которой установлена однозначная разрешимость возмущенной задачи при больших значениях асимптотического параметра ω на том временном интервале $t \in [0, T]$, на котором разрешима усредненная задача, и доказана асимптотическая близость решений u_ω и $\overset{0}{v}$ этих задач. Далее возмущенная задача рассмотрена в предположении периодичности ее коэффициентов по “быстрому времени”. Получена точная по параметру $\omega \gg 1$ оценка близости решений u_ω и $\overset{0}{v}$, а также при достаточной гладкости данных задачи построены старшие приближения $\overset{n}{u}_\omega$, $n = 0, 1, \dots$, для которых при любых фиксированных неотрицательных числах r и s выполняются оценки

$$\|u_\omega - \overset{n}{u}_\omega\|_{C^s([0, T], C^r)} \leq c_n \omega^{-(n+1)+s},$$

где $\overset{0}{u}_\omega = \overset{0}{v}$, $c_n = c_n(r, s) = \text{const.}$ Через $C^s([0, T], C^r)$ обозначено пространство Гёльдера функций $u(x, t)$ гладкости r по x и гладкости s по t (определение см. ниже).

В работе существенно используются идеи И. Б. Симоненко [3], А. В. Васильевой, В. Ф. Бутузова [4], [5] и С. Д. Эйдельмана [6]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичные схемы построения старших приближений изложены и обоснованы в работах В. В. Стрыгина [7] и Х. Т. Мовлянкулова, Л. В. Шаровой [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01417, № 98-01-00136.

По поводу асимптотического интегрирования различных уравнений математической физики с быстро осциллирующими по пространственным переменным коэффициентами см. монографии [9]–[12] и имеющуюся там библиографию.

1. Пусть k и m – натуральные числа. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_{\alpha}(x, \delta^{2k-1}u, t, \omega t) \mathcal{D}^{\alpha} u + f(x, \delta^{2k-1}u, t, \omega t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad t \in [0, T], \quad T = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – произвольная точка в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^m$, ω – большой асимптотический параметр, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ – мультииндекс,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad \mathcal{D}^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

$\delta^{2k-1}u$ – вектор-функция, составленная из всевозможных производных функции $u(x, t)$ по x до порядка $2k - 1$ включительно. Обозначим количество таких производных через p :

$$p = \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(m+i-1)!}{i!(m-1)!}.$$

Пусть M – произвольное ограниченное множество в пространстве $\mathbb{C}^p$ p -мерных комплексных координатных векторов. (Под множеством M можно подразумевать фиксированный шар в $\mathbb{C}^p$, содержащий строго внутри себя все векторы $(\delta^{2k-1}\overset{0}{v})(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^m \times [0, T]$, где $\overset{0}{v}$ – решение усредненной задачи, указанное ниже.)

Будем предполагать, что функции $a_{\alpha}(x, e, t, \tau)$, $f(x, e, t, \tau)$ и их производные

$$\frac{\partial a_{\alpha}}{\partial e_i}(x, e, t, \tau), \quad \frac{\partial f}{\partial e_i}(x, e, t, \tau)$$

по компонентам вектора $e \in \mathbb{C}^p$ определены, непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены при $x \in \mathbb{R}^m$, $e \in M$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [0, \infty)$. Кроме того, пусть для некоторого $\gamma_0 \in (0, 1)$ эти функции и их производные удовлетворяют по переменным x, e, t, τ условию Гёльдера с показателем γ_0 и константой $c(M)$, не зависящей от $(x, e, t, \tau) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0, T] \times [0, \infty)$.

Предположим, что для уравнения (1) выполнено равномерное условие параболичности, т.е. для всех вещественных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ справедлива оценка

$$(-1)^{k+1} \text{Re} \sum_{|\alpha|=2k} a_{\alpha}(x, e, t, \tau) \sigma^{\alpha} \geq \delta |\sigma|^{2k},$$

где постоянная $\delta = \delta(M)$ не зависит от $(x, e, t, \tau) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0, T] \times [0, \infty)$.

Пусть a_α и f обладают средними $\overset{0}{a}_\alpha$ и $\overset{0}{f}$ по последнему аргументу:

$$\overset{0}{g}(x, e, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \int_0^N g(x, e, t, \tau) d\tau,$$

где $g = a_\alpha$ или f , причем сходимость к пределу равномерна относительно $(x, e, t) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0, T]$.

Усредненная задача имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{0}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}v, t) \mathcal{D}^\alpha v + \overset{0}{f}(x, \delta^{2k-1}v, t), \quad (3)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Все решения в этой работе понимаются в классическом смысле.

Введем некоторые обозначения. Пусть $r \geq 0$, $[r]$ — целая часть r . Через $C^r := C^r(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых до порядка $[r]$ включительно функций $u(x)$, определенных в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих при целых r условию

$$\|u\|_{C^r} = \sum_{|\alpha| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\mathcal{D}^\alpha u(x)| < \infty,$$

а при нецелых r условию

$$\|u\|_{C^r} = \|u\|_{C^{[r]}} + \sum_{|\alpha|=r} \sup_{x'' \neq x'} \{|\mathcal{D}^\alpha u(x'') - \mathcal{D}^\alpha u(x')| \cdot |x'' - x'|^{[r]-r}\} < \infty.$$

Через $C^\gamma([0, T], C^r)$, где $r \geq 0$, $\gamma \in [0, 1)$, обозначим банахово пространство непрерывных в $\mathbb{R}^m \times [0, T]$ функций $u(x, t)$, имеющих непрерывные по совокупности переменных (x, t) производные по x до порядка $[r]$ включительно и удовлетворяющих при $\gamma = 0$ условию

$$\|u\|_{C^0([0, T], C^r)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{C^r} < \infty,$$

а при $\gamma \in (0, 1)$ условию

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^\gamma([0, T], C^r)} &= \|u\|_{C^0([0, T], C^r)} \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq [r]} \sup_{(x, t'') \neq (x, t')} \{|\mathcal{D}^\alpha u(x, t'') - \mathcal{D}^\alpha u(x, t')| \cdot |t'' - t'|^{-\gamma}\} < \infty. \end{aligned}$$

Для функций $u(x, t, \tau)$, определенных и непрерывных на множестве $\mathbb{R}^m \times [0, T] \times [0, \infty)$, аналогичным образом введем норму $\|u\|_{C^{\gamma, \gamma_1}([0, T] \times [0, \infty), C^r)}$, где $r \geq 0$, $\gamma, \gamma_1 \in [0, 1)$. При $r \geq 0$, $s \geq 0$ определим норму

$$\|u\|_{C^s([0, T], C^r)} = \sum_{i=0}^{[s]} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(x, t) \right\|_{C^{s-[s]}([0, T], C^r)}.$$

Аналогично, при $r \geq 0, s \geq 0, s_1 \geq 0$ определим норму

$$\|u\|_{C^{s,s_1}([0,T] \times [0,\infty), C^r)} = \sum_{i=0}^{[s]} \sum_{j=0}^{[s_1]} \left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial \tau^j} u(x, t, \tau) \right\|_{C^{s-[s], s_1-[s_1]}([0,T] \times [0,\infty), C^r)}.$$

Предположим, что $\varphi \in C^{2k+\gamma_1}$, $\gamma_1 \in (0, 1]$; задача (3), (4) разрешима на отрезке времени $t \in [0, T]$ и решение $\overset{0}{v} \in C^0([0, T], C^{2k-1+\gamma_1})$.

Заметим, что из последнего предположения в силу известных оценок [6] следует принадлежность $\overset{0}{v}$ пространству $C^{\delta_0/(2k)}([0, T], C^{2k+\delta_0})$, где $\delta_0 \in (0, \min(\gamma_0, \gamma_1))$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует число $\omega_0 > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$ задача (1), (2) однозначно разрешима на отрезке $t \in [0, T]$, причем для любого $\delta_0 \in (0, \min(\gamma_0, \gamma_1))$ выполнено соотношение*

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \|u_\omega - \overset{0}{v}\|_{C^{\delta_0/(2k)}([0,T], C^{2k+\delta_0})} = 0,$$

где u_ω и $\overset{0}{v}$ – решения задач (1), (2) и (3), (4) соответственно.

Если функции $a_\alpha(x, e, t, \tau)$ и $f(x, e, t, \tau)$ периодические по τ с одним и тем же периодом, то справедлива точная по параметру $\omega \gg 1$ оценка

$$\|u_\omega - \overset{0}{v}\|_{C^{\delta_0/(2k)}([0,T], C^{2k+\delta_0})} \leq c \omega^{\delta_0/(2k)-1}, \quad c = \text{const}.$$

Неулучшаемость указанной оценки подтверждается, например, задачей

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sin \omega t, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Полное доказательство теоремы 1 мы здесь не приводим.

Для случая периодических по τ функций a_α и f она фактически установлена в ходе доказательства теоремы 2 (см. ниже).

2. Пусть $l > 0$. В дополнение к условиям п. 1 сделаем следующие предположения. Функции $a_\alpha(x, e, t, \tau)$, $|\alpha| = 2k$, и $f(x, e, t, \tau)$ являются l -периодическими по τ . Кроме того, существуют их непрерывные производные по всем аргументам любого порядка и при всех $(x, e, t, \tau) \in \mathbb{R}^m \times [0, T] \times [0, \infty)$ выполняются оценки

$$\left| \mathcal{D}_x^\beta \mathcal{D}_e^\gamma \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} p(x, e, t, \tau) \right| \leq c_{\beta, \gamma, i}, \quad (5)$$

где $p = a_\alpha$ или f , $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ – произвольные мультииндексы, i – произвольное целое неотрицательное число, $c_{\beta, \gamma, i} = \text{const}$. Наконец, для любого $r \geq 0$ пусть $\varphi \in C^r$.

Введем следующие обозначения. Для любых l -периодических по τ функций $a(x, e, t, \tau)$ и $u(x, t, \tau)$ обозначим через $M_\tau a = \overset{0}{a}$, $M_\tau u = \overset{0}{u}$ их средние по τ (плавные

составляющие), а через $R_\tau a = \overset{1}{a}$, $R_\tau u = \overset{1}{u}$ их быстро осциллирующие составляющие, так что $a = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}$, $u = \overset{0}{u} + \overset{1}{u}$, где

$$\overset{0}{a}(x, e, t) = l^{-1} \int_0^l a(x, e, t, \tau) d\tau, \quad \overset{0}{u}(x, t) = l^{-1} \int_0^l u(x, t, \tau) d\tau.$$

Обозначая “быстрое время” ωt через τ , перепишем задачу (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} (\overset{0}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}u, t) + \overset{1}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}u, t, \tau)) \mathcal{D}^\alpha u \\ + \overset{0}{f}(x, \delta^{2k-1}u, t) + \overset{1}{f}(x, \delta^{2k-1}u, t, \tau), \end{aligned} \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (7)$$

Решение задачи (6), (7) будем формально искать в виде ряда

$$u(x, t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega^{-i} u_i(x, t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega^{-i} (\overset{0}{u}_i(x, t) + \overset{1}{u}_i(x, t, \tau)). \quad (8)$$

Подставляя (8) в равенства (6), (7), предварительно заменив производную $\frac{\partial}{\partial t}$ в (6) на $\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \tau}$, раскладывая формально

$$\begin{aligned} \overset{0}{a}_\alpha \left(x, \delta^{2k-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \omega^{-i} (\overset{0}{u}_i(x, t) + \overset{1}{u}_i(x, t, \tau)) \right), t \right), \\ \overset{1}{a}_\alpha \left(x, \delta^{2k-1} \left(\sum_{i=0}^m \omega^{-i} (\overset{0}{u}_i(x, t) + \overset{1}{u}_i(x, t, \tau)) \right), t, \tau \right), \\ \overset{0}{f}(\dots), \quad \overset{1}{f}(\dots) \end{aligned}$$

в ряды Тейлора с центром разложения $(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t)$ и $(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t, \tau)$ соответственно, а затем группируя члены с одинаковыми степенями ω^{-1} отдельно для плавных и осциллирующих слагаемых, приходим к следующим задачам:

$$\frac{\partial \overset{1}{u}_0}{\partial \tau} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \overset{0}{u}_0}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{0}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t) \mathcal{D}^\alpha \overset{0}{u}_0 + \overset{0}{f}(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t, \tau), \quad \overset{0}{u}_0(x, 0) = \varphi(x), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \overset{1}{u}_1}{\partial \tau} = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{1}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t, \tau) \mathcal{D}^\alpha \overset{0}{u}_0 + \overset{1}{f}(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{u}_0, t, \tau), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_1^0}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \left(a_\alpha^0(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_1^0 - [(\mathcal{D}_e a_\alpha^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_1^0) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \right) \\
 & \quad - [(\mathcal{D}_e f^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_1^0) \\
 & = M_\tau \left(\sum_{|\alpha|=2k} \left[a_\alpha^1(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_1^1 + [(\mathcal{D}_e a_\alpha^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_1^1) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \right] \right. \\
 & \quad \left. + [(\mathcal{D}_e f^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_1^1) \right), \quad u_1^0(x, 0) = -u_1^1(x, 0, 0), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n^1}{\partial \tau} & = \sum_{|\alpha|=2k} \left(a_\alpha^0(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_{n-1}^1 + a_\alpha^1(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau) \mathcal{D}^\alpha u_{n-1}^0 \right. \\
 & \quad + [(\mathcal{D}_e a_\alpha^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^1) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \\
 & \quad + [(\mathcal{D}_e a_\alpha^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^0) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \Big) \\
 & \quad + [(\mathcal{D}_e f^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^1) + [(\mathcal{D}_e f^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^0) \\
 & \quad + R_\tau \left(\sum_{|\alpha|=2k} \left[a_\alpha^1(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_{n-1}^1 \right. \right. \\
 & \quad \left. + [(\mathcal{D}_e a_\alpha^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^0) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \right] \\
 & \quad \left. + [(\mathcal{D}_e f^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_{n-1}^0) \right) - \frac{\partial u_{n-1}^1}{\partial t} + S_{n-2}(x, t, \tau), \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_n^0}{\partial t} & - \sum_{|\alpha|=2k} \left[a_\alpha^0(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_n^0 - [(\mathcal{D}_e a_\alpha^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_n^0) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \right] \\
 & \quad - [(\mathcal{D}_e f^0)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t)] (\delta^{2k-1} u_n^0) \\
 & = M_\tau \left(\sum_{|\alpha|=2k} \left[a_\alpha^1(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t) \mathcal{D}^\alpha u_n^1 + [(\mathcal{D}_e a_\alpha^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_n^1) \mathcal{D}^\alpha u_0^0 \right] \right. \\
 & \quad \left. + [(\mathcal{D}_e f^1)(x, \delta^{2k-1} u_0^0, t, \tau)] (\delta^{2k-1} u_n^1) \right) + S_{n-1}(x, t), \quad u_n^0(x, 0) = -u_n^1(x, 0, 0). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь через $[(\mathcal{D}_e a)(x, e_0, t, \tau)](e)$ обозначен частный дифференциал функции a по группе переменных e , т.е.

$$[(\mathcal{D}_e a)(x, e_0, t, \tau)](e) = \sum_{i=0}^p \frac{\partial a}{\partial e_i}(x, e_0, t, \tau) e_i;$$

через $S_{n-2}^1(x, t, \tau)$ обозначена l -периодическая по τ функция, которая имеет по этому аргументу нулевое среднее и выражается через функции u_i^0, u_i^1 с номерами $i \leq n-2$; через $S_{n-1}^0(x, t)$ обозначена функция, которая выражается через u_i^0, u_i^1 с номерами $i \leq n-1$.

Отметим, что осциллирующие составляющие u_k^1 определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (11), (13), в которых t (как и x) интерпретируется

в качестве параметра; следовательно, $\overset{1}{u}_k(x, t, \tau)$ должны удовлетворять таким уравнениям при всех значениях параметров $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$.

Из уравнения (9) находим однозначно (функции $\overset{1}{u}_k$ имеют нулевое среднее по τ) $\overset{1}{u}_0 = 0$. Задача Коши (10) совпадает с усредненной задачей (3), (4) и по предположению имеет решение $\overset{0}{u}_0 = \overset{0}{v}$. Многократно дифференцируя уравнение (10) по x и t , применяя к производным по x решения известную априорную оценку для задачи Коши [6] и оценивая смешанные производные по x, t в силу продифференцированных уравнений, получим для любых неотрицательных чисел r и s неравенства

$$\|\overset{0}{v}\|_{C^s([0, T], C^r)} \leq \overset{0}{c}_{r, s}, \quad \overset{0}{c}_{r, s} = \text{const}.$$

Обозначим правую часть равенства (11) через $\varphi(x, t, \tau)$. Функция φ имеет нулевое среднее по τ , поэтому уравнение (11) однозначно разрешимо, при этом

$$\overset{1}{u}_1(x, t, \tau) = \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds - l^{-1} \int_0^l d\tau \int_0^\tau \varphi(x, t, s) ds.$$

Из линейной неоднородной задачи Коши (12) однозначно определяем функцию $\overset{0}{u}_1(x, t)$. Легко видеть, что для любых неотрицательных чисел r, s, s_1 справедливы оценки

$$\|\overset{0}{u}_1\|_{C^s([0, T], C^r)} \leq \overset{1}{c}_{r, s}, \quad \|\overset{1}{u}_1\|_{C^{s, s_1}([0, T] \times [0, \infty), C^r)} \leq \overset{1}{d}_{r, s, s_1}.$$

Предположим, что функции $\overset{0}{u}_i, \overset{1}{u}_i$ определены при всех $i \leq n-1$ и для них справедливы априорные оценки

$$\|\overset{0}{u}_i\|_{C^s([0, T], C^r)} \leq \overset{i}{c}_{r, s}, \quad \|\overset{1}{u}_i\|_{C^{s, s_1}([0, T] \times [0, \infty), C^r)} \leq \overset{i}{d}_{r, s, s_1}, \quad (15)$$

где $\overset{i}{c} = \text{const}$, $\overset{i}{d} = \text{const}$. Тогда в силу тех же соображений, что использовались при рассмотрении задачи (11), из уравнения (13) однозначно найдем функцию $\overset{1}{u}_n(x, t, \tau)$. Тем самым, задача Коши (14) единственным образом доставляет функцию $\overset{0}{u}_n(x, t)$. При этом справедливы оценки (15) для $i = n$.

Теперь обозначим n -ю частичную сумму ряда (8) через $\overset{n}{u}(x, t, \tau)$ и положим $\overset{n}{u}_\omega(x, t) = \overset{n}{u}(x, t, \omega t)$, т.е.

$$\overset{n}{u}_\omega(x, t) = \sum_{i=0}^n \omega^{-i} u_i(x, t, \omega t).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Существует $\omega_0 > 0$ такое, что при $\omega > \omega_0$ для любых неотрицательных чисел r и s при всех целых неотрицательных n выполнены оценки*

$$\|u_\omega - \overset{n}{u}_\omega\|_{C^s([0, T], C^r)} \leq c_{n, r, s} \omega^{-(n+1)+s}, \quad (16)$$

где u_ω – указанное в теореме 1 решение задачи (1), (2), а $c_{n, r, s}$ – не зависящая от ω постоянная.

Из приведенного ниже доказательства теоремы 2 вытекает следующее

ЗАМЕЧАНИЕ. Если r и s – фиксированные неотрицательные числа, то для построения n -го приближения $\tilde{u}_\omega$ с оценкой (16) достаточно выполнения следующих условий. Функция $\varphi \in C^{r_1}$, $r_1 > r$. Функции $a_\alpha(x, e, t, \tau)$ и $f(x, e, t, \tau)$ являются l -периодическими по τ и удовлетворяют условиям п. 1. Кроме того, они имеют непрерывные производные вида

$$\mathcal{D}_x^\beta \mathcal{D}_e^\lambda \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^{i_1}}{\partial \tau^{i_1}},$$

где $|\beta| \leq k_0 = \max(0, [r] - 2k)$, $i + i_1 \leq k_1 = \max(0, [s] - 1)$, $|\lambda| \leq n + 1 + k_0 + k_1$, причем эти производные удовлетворяют условию Гёльдера по совокупности переменных x, e, t, τ с показателем $\alpha_1 > \{r\}$, $\alpha_2 = \max(\alpha_1, \{s\})$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \{s\}$ соответственно и константами, не зависящими от $(x, e, t, \tau) \in \mathbb{R}^m \times M \times [0, T] \times [0, \infty)$. Здесь M – то же множество, что и выше, а $\{b\}$ – дробная часть числа b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть

$$\tilde{u}'_\omega(x, t) = \tilde{u}_\omega(x, t) + \omega^{-(n+1)} \tilde{u}_{n+1}^1(x, t, \omega t) - \omega^{-(n+1)} \tilde{u}_{n+1}^1(x, 0, 0).$$

Очевидно, оценка (16) эквивалентна такой же оценке для разности $u_\omega - \tilde{u}'_\omega := w_\omega$ (далее индекс ω будем, как правило, опускать). Подставляя $u = \tilde{u}' + w$ в равенства (1), (2) и учитывая соотношения (9)–(14), получим следующую задачу Коши для w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} & \left(a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\tilde{u}' + w), t, \omega t) \mathcal{D}^\alpha w - [(\mathcal{D}_e^0 a_\alpha)(x, \delta^{2k-1} \tilde{v}^0, t)] (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^\alpha \tilde{v}^0 \right) \\ & - [(\mathcal{D}_e^0 f)(x, \delta^{2k-1} \tilde{v}^0, t)] (\delta^{2k-1} w) \\ = \sum_{|\alpha|=2k} & \left([a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\tilde{u}' + w), t, \omega t) - a_\alpha(x, \delta^{2k-1} \tilde{u}', t, \omega t)] \mathcal{D}^\alpha \tilde{u}' \right. \\ & - [(\mathcal{D}_e^0 a_\alpha)(x, \delta^{2k-1} \tilde{v}^0, t)] (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^\alpha \tilde{v}^0 \\ & + f(x, \delta^{2k-1}(\tilde{u}' + w), t, \omega t) - f(x, \delta^{2k-1} \tilde{u}', t, \omega t) \\ & \left. - [(\mathcal{D}_e^0 f)(x, \delta^{2k-1} \tilde{v}^0, t)] (\delta^{2k-1} w) + \omega^{-(n+1)} a(x, t, \omega t, \omega) := \Phi(x, w, \omega t, \omega), \right. \end{aligned} \quad (17)$$

$$w(x, 0) = 0. \quad (18)$$

Здесь $a(x, t, \tau, \omega)$ – бесконечно дифференцируемая по $(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^m \times [0, T] \times [0, \infty)$ при $\omega > 0$ функция, причем для любых неотрицательных чисел r, s, s_1 справедлива оценка

$$\|a(x, t, \tau, \omega)\|_{C^{s, s_1}([0, T] \times [0, \infty), C^r)} \leq c_{r, s, s_1}, \quad (19)$$

где постоянная c_{r, s, s_1} не зависит от $\omega > 1$. Это легко устанавливается с помощью известной оценки остаточного члена ряда Тейлора и неравенства (5).

Обозначим через $G_w^\omega(t, \tau, x, \xi)$ фундаментальное решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \left(a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\overset{n'}{u} + w), t, \omega t) \mathcal{D}^\alpha u - [(\mathcal{D}_e \overset{0}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, t)] (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^\alpha \overset{0}{v} \right) \\ - [(\mathcal{D}_e \overset{0}{f})(x, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, t)] (\delta^{2k-1} u) = 0. \end{aligned}$$

Тогда решение w задачи (1), (2) является неподвижной точкой действующего в пространстве $C^\gamma([0, T], C^{2k+\gamma})$, $\gamma \in (0, 1)$, оператора $\mathcal{P}_\omega$:

$$\mathcal{P}_\omega(w) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^m} G_w^\omega(t, \tau, x, \xi) \Phi(\xi, w(\xi, \tau), \omega\tau, \omega) d\xi.$$

Докажем, что при $\omega \gg 1$ оператор $\mathcal{P}_\omega$ в некотором шаре пространства $C^\gamma([0, T], C^{2k+\gamma})$ с центром в нуле радиуса $r_\omega = O(\omega^{-(n+1)})$ является сжатием. Для этого нам потребуются некоторые (приведенные в [2]) оценки функции $G_w^\omega(t, \tau, x, \xi)$ [6].

Введем некоторые обозначения. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$, $h^1 \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\chi(x, t) &:= \chi(x + h, t + h^1) - \chi(x, t), \\ v(x, t, \psi) &= \int_{t_0}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^m} G_w^\omega(t, \tau, x, \xi) \psi(\xi, \tau) d\xi, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq t + h^1 \leq T. \end{aligned}$$

Для любых $\omega > 0$ и любых функций w таких, что $\|w\|_{C^{\gamma_0}([0, T], C^{2k+\gamma_0})} \leq a_0$, где a_0 – фиксированная постоянная, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_x^\alpha G_w^\omega(t, \tau, x, \xi)| &\leq c_0(t - \tau)^{-(m+|\alpha|)/(2k)} e^{-c_1\rho(t, \tau, x, \xi)}, \\ |\Delta \mathcal{D}_x^\alpha G_w(t, \tau, x, \xi)| &\leq c_0(t - \tau)^{-(m+|\alpha|+\gamma')/(2k)} \\ &\quad \times \max(e^{-c_1\rho(t, \tau, x, \xi)}, e^{-c_1\rho(t, \tau, x+h, \xi)}), \end{aligned} \quad (20)$$

если $0 \leq h^1 \leq b(t - \tau)$ при некоторой постоянной $b > 0$,

$$|\Delta \mathcal{D}_x^\alpha v_\omega| \leq c_0(|h|^{\gamma'} + |h^1|^{\gamma'/(2k)})(t - t_0)^{(2k-|\alpha|+\gamma_0-\gamma')/(2k)} \|\psi\|_{C^0([0, T], C^{\gamma_0})}, \quad (21)$$

где

$$\rho(t, \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^m (|x_i - \xi_i|(t - \tau)^{-1/(2k)})^{2k/(2k-1)},$$

c_0, c_1 – положительные постоянные, которые не зависят от $\omega, w, t_0, t, x, \xi, h, h^1$ и ψ , $0 < \gamma' \leq \gamma_0$, причем $\gamma' < \gamma_0$ при $|\alpha| = 2k$.

Положим $r_\omega = 2\|\mathcal{P}_\omega(0)\|_{C^\gamma([0, T], C^{2k+\gamma})}$. В силу оценок (17), (21) $r_\omega \leq c\omega^{-(n+1)}$, где c – не зависящая от ω постоянная. Оценим постоянную Липшица оператора $\mathcal{P}_\omega$ в шаре S_ω : $\|w\|_{C^\gamma([0, T], C^{2k+\gamma})} \leq r_\omega$. Пусть $w_1, w_2 \in S_\omega$, $z_i = \mathcal{P}_\omega(w_i)$, $i = 1, 2$, $z = z_2 - z_1$.

Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned}
 z = & \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^m} G_{w_2}(t, \tau, x, \xi) \\
 & \times \left(\sum_{|\alpha|=2k} \left[\int_0^1 ds (\mathcal{D}_e a_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{n}{u}' + \delta^{2k-1}(sw_2 + (1-s)w_1), \tau, \omega\tau) \right. \right. \\
 & \times (\delta^{2k-1}w) \mathcal{D}^\alpha (\overset{n}{u}' - \overset{0}{v} - z_1) \\
 & + \left[\int_0^1 ds (\mathcal{D}_e a_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{n}{u}' + \delta^{2k-1}(sw_2 + (1-s)w_1), \tau, \omega\tau) \right. \\
 & \left. \left. - (\mathcal{D}_e a_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau, \omega\tau) \right] (\delta^{2k-1}w) \mathcal{D}^\alpha \overset{0}{v} \right. \\
 & \left. + [(\mathcal{D}_e a_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau, \omega\tau) - (\mathcal{D}_e \overset{0}{a}_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau)] (\delta^{2k-1}w) \mathcal{D}^\alpha \overset{0}{v} \right] \\
 & + \int_0^1 ds (\mathcal{D}_e f)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{n}{u}' + \delta^{2k-1}(sw_2 + (1-s)w_1), \tau, \omega\tau) \\
 & - (\mathcal{D}_e f)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau, \omega\tau) (\delta^{2k-1}w) \\
 & \left. + [(\mathcal{D}_e f)(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau, \omega\tau) - (\mathcal{D}_e \overset{0}{f})(\xi, \delta^{2k-1} \overset{0}{v}, \tau)] (\delta^{2k-1}w) \right) d\xi. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Из оценки (21) для любого $\gamma' \in (0, 1)$ следует неравенство

$$\|z_1\|_{C^{\gamma'/(2k)}([0, T], C^{2k+\gamma'})} \leq c,$$

где c — не зависящая от ω постоянная. Из этого неравенства и оценок (20), (21), с помощью обычно используемой методики при оценке тепловых потенциалов типа (22) (см., например, [2]), выводится неравенство

$$\|z\|_{C^{\gamma/(2k)}([0, T], C^{2k+\gamma})} \leq c(\omega) \|w\|_{C^{\gamma/(2k)}([0, T], C^{2k+\gamma})},$$

где $\lim_{\omega \rightarrow \infty} c(\omega) = 0$. Подбирая теперь $\omega_0 > 0$ так, что при $\omega > \omega_0$ $c(\omega) < 1/2$, на основании принципа сжатых отображений придем к неравенству

$$\|u_\omega - \overset{n}{u}_\omega\|_{C^{\gamma/(2k)}([0, T], C^{2k+\gamma})} \leq c\omega^{-(n+1)}, \quad c = \text{const}, \quad \omega > \omega_0.$$

Для получения оценок погрешности в старших нормах перепишем задачу (17), (18) в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w}{\partial t} = & \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\overset{n}{u}' + w), t, \omega t) \mathcal{D}^\alpha w - \sum_{|\beta| \leq 2k-1} b_\beta(x, t, \omega t) \mathcal{D}^{2k-1} w \\
 = & \omega^{-(n+1)} a(x, t, \omega t, \omega), \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$w(x, 0) = 0, \quad (24)$$

где

$$\sum_{|\beta| \leq 2k-1} b_{\beta}(x, t, \omega t) \mathcal{D}^{\beta} w := \sum_{|\alpha|=2k} \int_0^1 [(\mathcal{D}_{\epsilon} a_{\alpha})(x, \delta^{2k-1} u' + s \delta^{2k-1} w, \omega t)] ds (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^{\alpha} u' + \int_0^1 [(\mathcal{D}_{\epsilon} f)(x, \delta^{2k-1} u' + s \delta^{2k-1} w, \omega t)] ds (\delta^{2k-1} w).$$

Оценки w по норме $C^0([0, T], C^r)$ при всех $r \geq 0$ получаем с помощью многократного дифференцирования задачи (23), (24) по x и применения неравенств (19) и (21) при $h^1 = 0$. Тогда оценки этой функции по норме $C^s([0, T], C^r)$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, получаются, если многократно продифференцировать уравнение (23) по x, t и выразить из полученного уравнения производную, имеющую наибольший порядок дифференцирования по t . Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левенштам В. Б. Экспоненциальная дихотомия и метод усреднения для параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1316–1319.
- [2] Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 813–852.
- [3] Симоненко И. Б. Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1989.
- [4] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [5] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [6] Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
- [7] Стрыгин В. В. Об одной модификации метода усреднения при отыскании высших приближений // Прикл. матем. и механика. 1984. Т. 48. № 6. С. 1042–1045.
- [8] Мовлянкулов Х. Т., Шарова Л. В. Алгоритм построения высших приближений для систем с быстрыми и медленными переменными // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 755–780.
- [9] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Stud. Math. Appl. V. 5. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [10] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических структурах. М.: Наука, 1984.
- [11] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [12] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.

Ростовский государственный университет

Поступило

10.05.95

Исправленный вариант

22.01.98