Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Об обратной задаче для квазипериодических дифференциальных пучков с условиями разрыва внутри интервала, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:12:00

Об обратной задаче для квазипериодических дифференциальных пучков с условиями разрыва внутри интервала

В. А. Юрко

1. Рассмотрим краевую задачу B вида

$$y'' + (\rho^2 + \rho p(x) + q(x))y = 0, \quad x \in [0, T], \quad (1)$$

$$y(0) = \alpha y(T), \quad y'(0) - (i\rho h' + h)y(0) = \beta y'(T), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y(b_j + 0) &= \gamma_j y(b_j - 0), \\ y'(b_j + 0) &= \gamma_j^{-1} y'(b_j - 0) + (i\rho \eta'_j + \eta_j) y(b_j - 0), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ 0 &= b_0 < b_1 < \dots < b_{N-1} < b_N = T, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ – спектральный параметр, $p(x)$, $q(x)$ – комплекснозначные функции, h' , h , α , β , γ_j , η'_j , η_j – комплексные числа, причем

$$\alpha\beta\gamma_j \neq 0, \quad z_0^\pm := \alpha(1 \mp h') + \beta \neq 0, \quad \xi_j^\pm := \frac{\gamma_j + (\gamma_j)^{-1}}{2} \mp \frac{\eta'_j}{2} \neq 0.$$

Предположим, что $p(x) \in AC[0, T]$ и $q(x) \in L(0, T)$. Исследуется нелинейная обратная задача восстановления B по спектральным данным. Для этой обратной задачи доказана теорема единственности и получена процедура построения решения.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала часто возникают в математике, механике, физике, геофизике и других областях естествознания. Как правило, такие задачи связаны с разрывными свойствами среды (см., например, [1]–[3] и литературу там). Обратные спектральные задачи этого типа играют также важную роль при исследовании некоторых нелинейных эволюционных уравнений математической физики. Важным стимулом для изучения краевой задачи B является тот факт, что обратная задача для B , рассматриваемая в этой статье, возникает в теории обратных задач для дифференциальных операторов на пространственных сетях (графах) с циклами, которые имеют много приложений в естествознании и технике. Точнее, обратные спектральные задачи на графах с циклами сводятся к решению обратной задачи для B , рассматриваемой в данной статье.

2. Пусть $S(x, \rho)$ и $C(x, \rho)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3) и начальным условиям

$$S(0, \rho) = C'(0, \rho) = 0, \quad S'(0, \rho) = C(0, \rho) = 1.$$

Положим

$$\varphi(x, \rho) = C(x, \rho) + (i\rho h' + h)S(x, \rho), \quad d(\rho) = S(T, \rho), \quad d_1(\rho) = C(T, \rho).$$

Собственные значения $\mathcal{P} = \{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ краевой задачи (1)–(3) совпадают с нулями характеристической функции

$$\alpha(\rho) = \alpha\varphi(T, \rho) + \beta S'(T, \rho) - (1 + \alpha\beta). \quad (4)$$

Пусть $\Lambda := \{n : n = \pm 1, \pm 2, \dots\} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и пусть $\mathcal{V} = \{\nu_n\}_{n \in \Lambda}$ – нули функции $d(\rho)$. Тогда $\{\nu_n\}_{n \in \Lambda}$ являются собственными значениями краевой задачи B для уравнения (1)

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1436.2014К) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00134).

DOI: 10.4213/mzm10820

© В. А. Юрко, 2015

с условиями (3) и с краевыми условиями $y(0) = y(T) = 0$. Без ограничения общности считаем, что нумерация выбрана так, что $\nu_n \neq \nu_k$, если $nk < 0$. Пусть m_n – кратность ν_n ($\nu_n = \nu_{n+1} = \dots = \nu_{n+m_n-1}$). Положим

$$I := \{n \in \Lambda : \nu_{n-1} \neq \nu_n\}, \quad I' := \{n \in I : m_n > 1\}.$$

Обозначим

$$D(\rho) = \alpha\varphi(T, \rho) + \beta S'(T, \rho), \quad Q(\rho) = \alpha\varphi(T, \rho) - \beta S'(T, \rho).$$

Тогда

$$D(\rho) = d(\rho) + (1 + \alpha\beta). \quad (5)$$

Так как $\varphi(x, \rho)S'(x, \rho) - \varphi'(x, \rho)S(x, \rho) \equiv 1$, то

$$Q^2(\rho) = D^2(\rho) - 4\alpha\beta(1 + \varphi'(T, \rho)S(T, \rho)) \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\dot{Q}(\rho)Q(\rho) = \dot{D}(\rho)D(\rho) - 2\alpha\beta(\dot{\varphi}'(T, \rho)S(T, \rho) + \varphi'(T, \rho)\dot{S}(T, \rho)), \quad (7)$$

где “точка” обозначает дифференцирование по ρ . Пусть $n \in I$. Положим

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & Q(\nu_n) = 0, \\ +1, & Q(\nu_n) \neq 0, \arg Q(\nu_n) \in [0, \pi), \\ -1, & Q(\nu_n) \neq 0, \arg Q(\nu_n) \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

где

$$\omega_{n\nu} := d_1^{(\nu)}(\nu_n), \quad \nu = 0, \dots, m_n - 1, \quad I_0 = \{n \in I' : \omega_n = 0\}, \quad I_1 = \{n \in I' : \omega_n \neq 0\}.$$

Последовательность $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in I} \cup \{\omega_{n\nu}\}_{n \in I_0, \nu=1, \dots, m_n-1}$ называется Ω -последовательностью для B . Отметим, что если $I' = \emptyset$ (т.е. $m_n = 1$ при всех n), то $\Omega = \{\omega_n\}_{n \in \Lambda}$.

Пусть α , β и γ_j известны априори и фиксированы. Обратная задача ставится следующим образом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. *Даны $a(\rho)$, $d(\rho)$ и Ω ; построить B .*

Отметим, что, вообще говоря, невозможно восстановить все коэффициенты из (2), (3). Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля [4].

3. Пусть $\Phi(x, \rho)$ – решение уравнения (1) с условиями (3) и краевыми условиями

$$\Phi(0, \rho) = 1, \quad \Phi(T, \rho) = 0.$$

Обозначим $M(\rho) := \Phi'(0, \rho)$. Функция $M(\rho)$ называется *функцией Вейля*. Ясно, что

$$\Phi(x, \rho) = C(x, \rho) + M(\rho)S(x, \rho), \quad (8)$$

$$M(\rho) = -\frac{d_1(\rho)}{d(\rho)}. \quad (9)$$

Обозначим $T_k := b_k - b_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$. Тогда

$$b_k = T_1 + \dots + T_k, \quad T = T_1 + \dots + T_N.$$

Положим $x_k = x - b_{k-1}$ при $x \in [b_{k-1}, b_k]$; следовательно, $x_k \in [0, T_k]$. Пусть $S_k(x_k, \rho)$ и $C_k(x_k, \rho)$ – решения уравнения (1) на $[b_{k-1}, b_k]$ при начальных условиях

$$S_k(0, \rho) = C'_k(0, \rho) = 0, \quad S'_k(0, \rho) = C_k(0, \rho) = 1. \quad (10)$$

ЛЕММА 1. При $k = 1, \dots, N-1$, $\nu = 0, 1$ справедливы соотношения

$$S^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \rho) = \gamma_k S(b_k - 0, \rho) C_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho) + \gamma_k^{-1} S'(b_k - 0, \rho) S_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho) + (i\rho\eta'_k + \eta_k) S(b_k - 0, \rho) S_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho), \quad (11)$$

$$C^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \rho) = \gamma_k C(b_k - 0, \rho) C_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho) + \gamma_k^{-1} C'(b_k - 0, \rho) S_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho) + (i\rho\eta'_k + \eta_k) C(b_k - 0, \rho) S_{k+1}^{(\nu)}(T_{k+1}, \rho). \quad (12)$$

В самом деле, зафиксируем $k = 1, \dots, N-1$. Пусть $x \in [b_k, b_{k+1}]$, т.е.

$$x = x_{k+1} + b_k, \quad x_{k+1} \in [0, T_{k+1}].$$

Используя фундаментальную систему решений $C_{k+1}(x_{k+1}, \rho)$, $S_{k+1}(x_{k+1}, \rho)$, получаем

$$S^{(\nu)}(x, \rho) = A(\rho) C_{k+1}^{(\nu)}(x_{k+1}, \rho) + B(\rho) S_{k+1}^{(\nu)}(x_{k+1}, \rho), \quad \nu = 0, 1.$$

Учитывая начальные условия (10), находим коэффициенты $A(\rho)$ и $B(\rho)$, и приходим к (11). Соотношение (12) доказывается аналогично.

Обозначим

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x p(t) dt, \quad \omega = \frac{1}{2T} \int_0^T p(t) dt,$$

$$\Pi^\pm = \{\rho : \pm \tau > 0\}, \quad \Pi_\delta^\pm = \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}, \quad \Pi_\delta^- = \{\rho : \arg \rho \in [\pi + \delta, 2\pi - \delta]\}.$$

Известно (см. [4]), что существует фундаментальная система решений $\{Y_1^\pm(x, \rho), Y_2^\pm(x, \rho)\}$, $x \in [0, T]$, $\rho \in \Pi^\pm$, уравнения (1) такая, что функции $Y_k^\pm(x, \rho)$ регулярны при $\rho \in \Pi^\pm$, $|\rho| > \rho^*$, непрерывны при $x \in [0, T]$, $\rho \in \overline{\Pi^\pm}$, $|\rho| \geq \rho^*$, и при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Pi^\pm}$, $k = 1, 2$, $\nu = 0, 1$,

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} Y_k^\pm(x, \rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(\rho x + \mathcal{E}(x)) R_k[1], \quad [1] = 1 + O(\rho^{-1}), \quad R_k = (-1)^{k-1} i. \quad (13)$$

Используя (13) и лемму 1, получаем при $x \in (b_j, b_{j+1})$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\delta^\pm$

$$C^{(\nu)}(x, \rho) = \frac{\xi_1^\pm \dots \xi_j^\pm}{2} (\mp i \rho)^\nu \exp(\mp i(\rho x + \mathcal{E}(x)) [1], \quad (14)$$

$$S^{(\nu)}(x, \rho) = \mp \frac{\xi_1^\pm \dots \xi_j^\pm}{2i\rho} (\mp i \rho)^\nu \exp(\mp i(\rho x + \mathcal{E}(x)) [1], \quad (15)$$

$$\Phi^{(\nu)}(x, \rho) = \frac{1}{\xi_1^\pm \dots \xi_j^\pm} (\pm i \rho)^\nu \exp(\pm i(\rho x + \mathcal{E}(x)) [1], \quad (16)$$

Из (14)–(16) выводим, что при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\delta^\pm$

$$a(\rho) = \frac{z_0^\pm}{2} (\xi_1^\pm \dots \xi_{N-1}^\pm) \exp(\mp i(\rho + \omega)T) [1], \quad (17)$$

$$d(\rho) = \mp \frac{1}{2i\rho} (\xi_1^\pm \dots \xi_{N-1}^\pm) \exp(\mp i(\rho + \omega)T) [1].$$

Пусть $n \in I$. Используя (9), получаем, что в окрестности точки $\rho = \nu_n$ функция $M(\rho)$ имеет представление

$$M(\rho) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\rho - \nu_n)^{\nu+1}} + M_n^*(\rho),$$

где $M_n^*(\rho)$ регулярна при $\rho = \nu_n$, а коэффициенты $M_{n+\nu}$, $\nu = 0, \dots, m_n - 1$ вычисляются по $d_1^{(\nu)}(\nu_n)$ и $d^{(\nu+m_n)}(\nu_n)$ при $\nu = 0, \dots, m_n - 1$. Точнее,

$$M_{n+m_n-1-\nu} = -\frac{1}{d_{0n}} \left(d_{\nu n}^1 + \sum_{k=0}^{\nu-1} M_{n+m_n-1-k} d_{\nu-k,n} \right), \quad n \in I, \quad \nu = 0, \dots, m_n - 1, \quad (18)$$

$$d_{\nu n}^1 := \frac{1}{\nu!} d_1^{(\nu)}(\nu_n), \quad d_{\nu n} := \frac{1}{(\nu + m_n)!} d^{(\nu+m_n)}(\nu_n), \quad \nu = 0, \dots, m_n - 1.$$

В частности, $M_{n+m_n-1} = -d_{0n}^1/d_{0n}$. Если $m_n = 1$ (т.е. $n \in I \setminus I'$), то

$$M_n = -\frac{d_1(\nu_n)}{d(\nu_n)}. \quad (19)$$

Последовательность $\{M_n\}_{n \in \Lambda}$ называется *последовательностью Вейля*. Совокупность $\mathcal{D} = \{\nu_n, M_n\}_{n \in \Lambda}$ называется *спектральными данными*.

Рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу 2.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 2. *Заданы спектральные данные*

$$\mathcal{D} = \{\nu_n, M_n\}_{n \in \Lambda}, \quad \gamma_j, \quad j = 1, \dots, N-1;$$

построить $p(x)$, $q(x)$, $x \in (0, T)$, η'_j , η_j , $j = 1, \dots, N-1$.

Эта обратная задача решена в [5], где доказана теорема единственности и указана процедура построения решения.

4. Пусть даны $a(\rho)$, $d(\rho)$ и Ω . Напомним, что α , β , γ_j , $j = 1, \dots, N-1$ известны априори. Решение обратной задачи 1 строится следующим образом.

Сначала находим нули $\mathcal{V} = \{\nu_n\}_{n \in \Lambda}$ функции $d(\rho)$. Используя асимптотику (17), вычисляем $(\xi_1^\pm \dots \xi_{N-1}^\pm)$ и h' . Учтявая (5), строим $D(\rho)$. В силу (6) имеем $Q^2(\nu_n) = D^2(\nu_n) - 4\alpha\beta$ и

$$Q(\nu_n) = \omega_n \sqrt{D^2(\nu_n) - 4\alpha\beta}, \quad n \in I. \quad (20)$$

Здесь и далее, если $z = |z|e^{i\xi}$, $\xi \in [0, 2\pi)$, то $\sqrt{z} = |z|^{1/2}e^{i\xi/2}$. Так как $\omega_{n0} = d_1(\nu_n) = \varphi(T, \nu_n)$, вычисляем ω_{n0} по формуле

$$\omega_{n0} = \frac{D(\nu_n) + Q(\nu_n)}{2\alpha}. \quad (21)$$

Построим последовательность Вейля $\{M_n\}_{n \in \Lambda}$ следующим образом.

Случай 1. Пусть $n \in I \setminus I'$ (т.е. $m_n = 1$). Тогда в силу (19) имеем

$$M_n = -\frac{\omega_{n0}}{d(\nu_n)}. \quad (22)$$

Случай 2. Пусть $n \in I_1$ (т.е. $m_n > 1$, $\omega_n \neq 0$). Тогда из (7) вытекает

$$(\dot{Q}(\rho)Q(\rho))_{|\rho=\nu_n}^{(\nu-1)} = (\dot{D}(\rho)D(\rho))_{|\rho=\nu_n}^{(\nu-1)}, \quad \nu = 1, \dots, m_n - 1. \quad (23)$$

Используя (23), находим $Q^{(\nu)}(\nu_n)$, $\nu = 1, \dots, m_n - 1$. Так как

$$d_1(\rho) = \frac{D(\rho) + Q(\rho)}{2\alpha} - (iph' + h)d(\rho),$$

вычисляем $\omega_{n\nu}$, $\nu = 1, \dots, m_n - 1$, по формуле

$$\omega_{n\nu} = \frac{D^{(\nu)}(\nu_n) + Q^{(\nu)}(\nu_n)}{2\alpha}, \quad \nu = 1, \dots, m_n - 1. \quad (24)$$

Случай 3. Пусть $n \in I_0$ (т.е. $m_n > 1$, $\omega_n = 0$). Тогда $\omega_{n\nu}$, $\nu = 1, \dots, m_n - 1$, даны априори.

Таким образом, мы построили последовательность Вейля $\{M_n\}_{n \in \Lambda}$. Решая вспомогательную обратную задачу 2, находим $p(x)$, $q(x)$, $x \in (0, T)$, η'_j , η_j , $j = 1, \dots, N-1$, а затем вычисляем h , используя (4). Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Задание $a(\rho)$, $d(\rho)$ и Ω однозначно определяет краевую задачу В. Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 1. Даны $a(\rho)$, $d(\rho)$ и Ω .

- 1) Вычисляем нули $\mathcal{V} = \{\nu_n\}_{n \in \Lambda}$ функции $d(\rho)$.
- 2) Находим h' , используя (17).
- 3) Строим $D(\rho)$ по формуле (5).
- 4) Вычисляем $Q^2(\nu_n) = D^2(\nu_n) - 4\alpha\beta$, и $Q(\nu_n)$ по (20).
- 5) Строим ω_{n0} согласно (21).
- 6) Находим $Q^{(\nu)}(\nu_n)$, $n \in I_1$, $\nu = 1, \dots, m_n - 1$, используя (23).
- 7) Строим $\omega_{n\nu}$, $n \in I_1$, $\nu = 1, \dots, m_n - 1$, по формуле (24).
- 8) Вычисляем последовательность Вейля $\{M_n\}_{n \geq 1}$, используя (18) и (22).
- 9) Находим $p(x)$, $q(x)$, $x \in (0, T)$ и η'_j , η_j , $j = 1, \dots, N - 1$, решая вспомогательную обратную задачу 2.
- 10) Вычисляем коэффициент h , используя (4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Lapwood, T. Usami, *Free Oscillations of the Earth*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981. [2] R. J. Krueger, *J. Math. Phys.*, **23**:3 (1982), 396–404. [3] V. A. Yurko, *Integral Transform. Spec. Funct.*, **10**:2 (2000), 141–164. [4] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications*, NOVA Sci. Publ., New York, 2001. [5] V. A. Yurko, *Anal. Math. Phys.*, **2**:3 (2012), 215–230.

В. А. Юрко

Саратовский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступило

02.02.2015