Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. С. Шульман, Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 483–497

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:35:50

Теорема Фуглида–Патнэма в алгебрах с инволюциями

М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. С. Шульман

Рассматривается вопрос о справедливости аналогов теоремы Фуглида–Патнэма в алгебре $(\mathcal{B}(H), \star)$ ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H , с произвольной инволюцией $\star$, а также в некоторых $\star$ -подалгебрах этих алгебр и близких к ним конструкциях. Полученные результаты используются для решения вопросов устойчивости “фуглидовых” классов относительно расширений и образования тензорных произведений.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10823

Введение. В 1950 г. Фуглид [1], отвечая на вопрос, поставленный Дж. фон Нейманом, доказал, что если ограниченный линейный оператор B , действующий в гильбертовом пространстве H , коммутирует с нормальным оператором A , то он также коммутирует и с оператором A^* . Результат Фуглида оказался очень полезным в теории операторов и операторных алгебр, и потому вопрос о его различных обобщениях привлекал к себе внимание многих математиков.

Замечательно, что несмотря на необходимость использования аналитических методов для доказательства этого результата, сам по себе он чисто алгебраический, и потому может быть рассмотрен в контексте общих алгебр (или даже колец) с инволюцией.

Мы рассматриваем инволютивные алгебры $(\mathcal{A}, \star)$ над полем комплексных чисел. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным: $a^*a = aa^*$. Будем говорить, что инволютивная алгебра $(\mathcal{A}, \star)$ является *фуглидовой* (обладает *свойством* (F) или принадлежит *классу* (F)), если из того, что элемент $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с a^* . Другими словами, коммутант нормального элемента – симметричная подалгебра. По уже упоминавшейся теореме Фуглида свойством (F) обладает алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H и, как следствие, все ее $\star$ -подалгебры, а потому и все $\star$ -алгебры, допускающие точные $\star$ -представления в H , – в частности, все C^* -алгебры. Разумеется, этими примерами класс (F) не исчерпывается – например, любая коммутативная $\star$ -алгебра является фуглидовой.

Как показал Патнэм [2], $\star$ -подалгебры алгебры $\mathcal{B}(H)$ обладают более сильным свойством: из равенства $xa_1 = a_2x$, где a_i – нормальные элементы, следует, что $xa_1^* =$

a_2^*x . Класс всех $*$ -алгебр, для которых это условие выполнено, мы будем обозначать через (FP) . Берберян [3] заметил, что результат Патнэма может быть получен из теоремы Фуглида очень простым матричным трюком; фактически этот трюк показывает, что для алгебры A , которая $*$ -изоморфна своему тензорному произведению на алгебру $M_2(\mathbb{C})$, свойства (F) и (FP) эквивалентны. Тем не менее, классы (F) и (FP) не совпадают – например, не все коммутативные $*$ -алгебры входят в класс (FP) . Так, вводя в алгебре $\mathbb{C}^2$ инволюцию $(\alpha, \beta)^* = (\bar{\beta}, \bar{\alpha})$ и полагая $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $x = (0, 1)$, мы получим, что $xa_1 = a_2x$, но $xa_1^* \neq a_2^*x$.

С другой стороны, часто оказывается полезным более слабое, чем (F) , свойство “условной фуглидовости”: инволютивная алгебра $(\mathcal{A}, *)$ обладает этим свойством (является (CF) -алгеброй или принадлежит классу (CF)), если из того, что нормальный элемент $x \in \mathcal{A}$ коммутирует с нормальным элементом $a \in \mathcal{A}$, следует, что он коммутирует и с a^* . В (CF) -алгебрах всякое коммутативное семейство нормальных операторов содержится в максимальной коммутативной $*$ -алгебре. Как показано в [4], класс (CF) содержит все $*$ -алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана.

Ясно, что все введенные в рассмотрение классы с каждой алгеброй содержат все ее $*$ -подалгебры. Вопрос о переходе к фактор-алгебре по $*$ -идеалу имеет, вообще говоря, отрицательный ответ. Разумеется, если J – замкнутый идеал в C^* -алгебре $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}/J$ – также C^* -алгебра и потому принадлежит к классу (FP) . Взяв $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, $J = F(H)$ – идеал всех операторов конечного ранга, можно построить нормальный оператор A и оператор B такие, что $AB - BA \in J$, $A^*B - BA^* \notin J$, и тем самым доказать, что алгебра $\mathcal{A}/J$ не является фуглидовой. Интересен случай симметрично нормированных идеалов. Вейсс [5] установил положительный результат для случая, когда $J = C_2(H)$ – идеал всех операторов Гильберта–Шмидта, и поставил вопрос о справедливости аналогичного факта для идеала ядерных операторов, получивший отрицательный ответ в [6]. Подробное обсуждение других связанных результатов можно найти в [7].

С вопросом о переходе к фактор-алгебре тесно связан вопрос об устойчивости класса относительно расширений. В данном случае это вопрос о принадлежности $*$ -алгебры к рассматриваемым классам при условии, что ее $*$ -идеал и фактор по нему им принадлежат. Другой интересный вопрос – сохранение фуглидовых свойств при образовании тензорных произведений. Мы покажем, что тензорное произведение двух $*$ -алгебр из класса (F) может не принадлежать даже классу (CF) .

Нас будет интересовать вопрос о том, какими “фуглидовыми” свойствами обладает алгебра $\mathcal{B}(H)$, снабженная инволюцией, отличной от стандартной инволюции. Первый результат в этом направлении был получен Рудиным [8], построившим следующий пример.

Пусть $(\mathcal{M}_4(\mathbb{C}), *)$ – инволютивная алгебра квадратных матриц размерности 4×4 , и пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $J = J^* = J^{-1}$. Рассмотрим в $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ инволюцию $*_J$: $A^{*J} = JA^*J$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямой подсчет показывает, что

$$AA^{*J} = A^{*J}A = 0, \quad BB^{*J} = B^{*J}B = 0$$

(т.е. матрицы A и B нормальны относительно построенной инволюции $*_J$), причем $AB = BA = AB^{*J} = 0$, но $B^{*J}A \neq 0$, т.е. $AB^{*J} \neq B^{*J}A$.

Следовательно, инволютивная алгебра $(\mathcal{M}_4(\mathbb{C}), *_J)$ не является (CF) -алгеброй.

После предварительных рассмотрений, посвященных классификации инволюций в $\mathcal{B}(H)$ и геометрии пространств с индефинитной метрикой, мы полностью решим вопрос о том, какие инволюции превращают $\mathcal{B}(H)$ в (F) -, (FP) - и (CF) -алгебру. Далее мы доказываем, что алгебры операторов в пространстве Понтрягина Π_1 , симметричные относительно пространственной инволюции $\star$ и имеющие нейтральные инвариантные подпространства, обладают свойством близкой к условной фуглидовости: если два нормальных элемента A, B такой алгебры коммутируют, то коммутатор $A^*B - BA^*$ либо равен нулю, либо имеет ранг 1 и принадлежит одномерному нильпотентному идеалу алгебры. Из этого мы выведем, что классу (CF) принадлежат все алгебры Наймарка, определенные Исмаиловым [9], который нашел замечательные применения их свойств в теории представлений бесконечномерных групп. Мы заключаем статью построением примера, показывающего, что класс (F) не замкнут относительно расширений.

1. Инволюции в $\mathcal{B}(H)$. Результаты этого пункта можно назвать фольклорными: они не новые, но точную и полную ссылку указать не всегда легко.

Мы ограничиваемся случаем, когда гильбертово пространство H имеет конечную или счетную размерность. Пусть $J \in \mathcal{B}(H)$ – самосопряженный оператор такой, что $J^2 = I$. Обозначим через Q_+ и Q_- проекторы на собственные подпространства H_+ и H_- оператора J , соответствующие собственным значениям 1 и -1 ; ясно, что $J = Q_+ - Q_-$. (Кардинальные) числа

$$n = \max\{\dim H_+, \dim H_-\}, \quad k = \min\{\dim H_+, \dim H_-\}$$

назовем *индексами* оператора J . Так как $k + n = \dim H$, то при фиксированной размерности H достаточно указывать только один из индексов; тем не менее, обычно рассматривают упорядоченную пару (n, k) , которую называют *сигнатурой* оператора J .

Легко проверить, что отображение $A \mapsto A^{*J} := JA^*J$ является инволюцией на $\mathcal{B}(H)$. Обозначим получающуюся таким образом $*$ -алгебру через $\mathcal{B}(H)_J$. Как в любой $*$ -алгебре, будем называть оператор A *самосопряженным*, *унитарным*, *нормальным*, если соответственно

$$A^{*J} = A, \quad A^{*J} = A^{-1}, \quad A^{*J}A = AA^{*J}.$$

Поскольку замена оператора J на $-J$ не меняет инволюции, мы можем (и будем) считать, что $n = n_+ = \dim H_+$, $k = n_- = \dim H_-$.

Легко видеть, что структура $*$ -алгебры $\mathcal{B}(H)_J$ полностью определяется сигнатурой оператора J . Поэтому мы будем пользоваться обозначением $\mathcal{B}_{n,k}$ для произвольной $*$ -алгебры $\mathcal{B}(H)_J$, где сигнатура J равна (n, k) . Если $\dim H = \infty$, то обозначение иногда сокращается до $\mathcal{B}_k$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\star$ – произвольная инволюция в $\mathcal{B}(H)$, то алгебра $(\mathcal{B}(H), \star)$ $*$ -изоморфна одной из алгебр $\mathcal{B}_{n,k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что отображение $\varphi: T \mapsto (T^*)^*$ является автоморфизмом алгебры $\mathcal{B}(H)$, а потому задается обратимым оператором V по формуле $\varphi(T) = V^{-1}TV$. Следовательно, $T^* = WT^*W^{-1}$, где $W = V^*$.

Условие $(T^*)^* = T$ влечет $W^*W^{-1}T = TW^*W^{-1}$, т.е. оператор W^*W^{-1} должен быть скалярным кратным тождественного: $W^*W^{-1} = zI$, $W^* = zW$. Отсюда следует, что $|z| = 1$. Заменяя W на λW , где $\bar{\lambda} = z\lambda$, мы можем считать, что $z = 1$, т.е. оператор W самосопряжен.

Пусть $W = J|W|$ – полярное разложение оператора W . Тогда операторы J и $|W|$ коммутируют, J самосопряжен, $|W|$ положителен и $J^2 = I$. Докажем, что алгебра $(\mathcal{B}(H), \star)$ $*$ -изоморфна алгебре $\mathcal{B}(H)_J$.

Положим $K = |W|^{1/2}$ и зададим отображение $\gamma: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ формулой

$$\gamma(T) = KTK^{-1}.$$

Ясно, что γ – изоморфизм. Так как по определению

$$\begin{aligned} \gamma(T)^* &= JK^2(\gamma(T)^*)K^{-2}J = JK^2(KTK^{-1})^*K^{-2}J \\ &= JK^2K^{-1}T^*KK^{-2}J = KJT^*JK^{-1} = \gamma(T^J), \end{aligned}$$

то γ – $*$ -изоморфизм.

Таким образом, нам остается лишь исследовать условия фуглидовости алгебр $\mathcal{B}_{n,k}$.

2. Пространства с индефинитной метрикой. Пусть $J \in \mathcal{B}(H)$ – оператор инволюции с сигнатурой (n, k) . В пространстве H вводится новое “скалярное произведение”: $[x, y] = (Jx, y)$. Эта полуторалинейная форма определяет индефинитную метрику – квадратичную форму $\rho(x) = [x, x]$. Вектор $x \in H$ называется *положительным*, *отрицательным* или *нейтральным*, если соответственно $\rho(x)$ больше нуля, меньше нуля или равно нулю. Подпространство положительно, отрицательно или нейтрально, если положительны, отрицательны или нейтральны все его ненулевые элементы. Нейтральные векторы x, y называются *кососвязанными*, если $[x, y] = 1$. Векторы x, y ортогональны, если $[x, y] = 0$. Ортогональное дополнение $L^\perp$ подпространства $L \subseteq H$ определяется обычным образом, но может пересекаться с L (такое пересечение – нейтральное подпространство). Мы будем обозначать пространство H с такой “метрикой” через $\Pi_{n,k}$ (или просто Π_k , если $n = \infty$). Обычно такое обозначение, введенное в честь Л. С. Понтрягина, используется лишь при $k < \infty$, а пространство Π_∞ называется пространством Крейна, но для наших целей удобнее однородные обозначения.

Весьма существенно, что в $\Pi_{n,k}$ при $k < \infty$, любое максимальное неположительное (в частности, максимальное нейтральное или максимальное отрицательное) подпространство имеет размерность k .

Введенную метрику связывает с инволюцией равенство $[Ax, y] = [x, A^*y]$.

Следующая теорема принадлежит Наймарку [10]; для одноэлементного семейства это знаменитая теорема Соболева–Понтрягина [11], имеющая многочисленные приложения в математической физике. Отметим, что Крейном [12] и Ломоносовым [13] найдены удивительно красивые и короткие доказательства теоремы Соболева–Понтрягина и ряда ее обобщений.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое коммутативное семейство самосопряженных операторов в Π_k , $k < \infty$, имеет инвариантное максимальное неположительное подпространство.*

Из теоремы 2 следует, что всякий нормальный оператор в $\Pi_{n,k}$, $k < \infty$, имеет инвариантное максимальное неположительное подпространство (в самом деле, если N нормален, то $N = A + iB$, где A и B – самосопряженные коммутирующие операторы).

ЛЕММА 1. *Пусть A – нормальный оператор в $H = \Pi_{n,k}$, $k < \infty$. Если L – инвариантное для A максимальное нейтральное подпространство, то оно инвариантно и для A^* .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $AL \subseteq L$, то $A^*L^\perp \subseteq L^\perp$. Учитывая, что $L \subseteq L^\perp$, имеем $A^*AL \in A^*L^\perp \subseteq L^\perp$, откуда для любых $e, f \in L$

$$[A^*e, A^*f] = [AA^*e, f] = [A^*Ae, f] = 0.$$

Так как $A^*L \subseteq L^\perp$, то и $[A^*e, f] = 0$, и значит, подпространство $K = L + A^*L$ состоит из нейтральных векторов. Так как L максимально и содержится в K , то $K = L$. Следовательно, $A^*L \subseteq L$.

В наиболее интересном для дальнейшего случае $k = 1$ этот результат принимает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если собственный вектор $x \in H$ нормального оператора $A \in \mathcal{B}_{n,k}$ нейтрален, то он является собственным и для A^* .*

3. Фуглидовы свойства алгебр $\Pi_{n,k}$.

ЛЕММА 2. *Если $n_1 \geq n_2$, $k_1 \geq k_2$, то алгебра $\mathcal{B}_{n_1,k_1}$ имеет $*$ -подалгебру, $*$ -изоморфную алгебре $\mathcal{B}_{n_2,k_2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $H = \Pi_{n_1,k_1}$ раскладывается в прямую J -ортогональную сумму $H = H_+ \oplus H_-$ собственных подпространств оператора J , причем $\dim H_+ = n_1$, $\dim H_- = k_1$. Выберем подпространства $K_+ \subseteq H_+$ и $K_- \subseteq H_-$ такие, что $\dim K_+ = n_2$, $\dim K_- = k_2$. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра всех операторов в H , оставляющих инвариантным подпространство $K = K_+ + K_-$ и обращающихся в 0 на его ортогональном дополнении. Поскольку подпространства K_+ , K_- инвариантны для J , $\mathcal{A}$ является $*$ -подалгеброй алгебры $\mathcal{B}_{n_1,k_1}$. Так как само подпространство K является Π_{n_2,k_2} -пространством, то, сопоставляя каждому оператору из $\mathcal{A}$ его сужение на K , мы получим $*$ -изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_{n_2,k_2}$.

ТЕОРЕМА 3. (i) Алгебра $\mathcal{B}_{n,k}$ обладает свойством (FP) тогда и только тогда, когда $k = 0$.

(ii) Алгебра $\mathcal{B}_{n,k}$ обладает свойством (F) тогда и только тогда, когда либо $k = 0$, либо $n \leq 1$.

(iii) Алгебра $\mathcal{B}_{n,k}$ обладает свойством (CF) тогда и только тогда, когда либо $n \leq 2$, $k \leq 1$, либо $k = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как $\mathcal{B}_{n,0} = \mathcal{B}(H)$, где $\dim H = n$, то $\mathcal{B}_{n,0} \in (FP)$. С другой стороны, если $k > 0$, то по лемме 2 $\mathcal{B}_{n,k}$ содержит $\mathcal{B}_{1,1}$. Поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{B}_{1,1} \notin (FP)$.

Пусть (e, f) – нейтральный базис для $H = \Pi_{1,1}$. Операторы A_1 и X определим условиями

$$A_1 e = e, \quad A_1 f = 0, \quad X e = 0, \quad X f = f.$$

Тогда $X = A_1^*$, $A_1 X = X A_1 = 0$, т.е. A_1 нормален. Полагая $A_2 = 0$, мы видим, что $X A_1 = A_2 X$, $X A_1^* \neq A_2^* X$, т.е. $\mathcal{B}_{1,1} \notin (FP)$.

(ii) Если $k = 0$, то доказательство очевидно. Пусть $k \neq 0$, $n \leq 1$. Так как по нашему предположению $k \leq n$, то $k = 1$. Но в двумерном пространстве коммутант любого оператора, отличного от скалярного, совпадает с порожденной этим оператором и единичным оператором алгеброй и потому коммутативен. Поэтому если $A \in \mathcal{B}_{1,1}$ – не скалярный нормальный оператор и $X A = A X$, то операторы A^* и X коммутируют. Случай скалярного оператора очевиден.

Докажем теперь, что $\mathcal{B}_{n,k} \notin (F)$ при $n > 1$, $k > 0$. В силу леммы 2 мы можем ограничиться случаем $n = 2$, $k = 1$.

Представим $\Pi_{2,1}$ в виде J -ортогональной прямой суммы $H = \Pi_{1,0} \oplus \Pi_{1,1}$. Выберем в одномерном пространстве $\Pi_{1,0}$ единичный вектор e_0 , а в $\Pi_{1,1}$ – нейтральный базис (e, f) . Пусть

$$A = 1 \oplus T, \quad \text{где } T e = e, \quad T f = 0.$$

Тогда $A^* = 1 \oplus T^*$, $T^* e = 0$, $T^* f = f$ и ясно, что A нормален. Оператор X зададим условиями

$$X e_0 = 0, \quad X e = e_0, \quad X f = 0.$$

Тогда легко проверить, что X коммутирует с A , но не коммутирует с A^* . Таким образом, $\mathcal{B}_{n,k} \notin (F)$ при $n > 1$, $k > 0$.

(iii) Пример Рудина показывает, что алгебра $\mathcal{B}_{2,2}$ не является условно фуглидовой. По лемме 2 $\mathcal{B}_{n,k} \notin (CF)$ при $k > 1$.

Докажем, что $\mathcal{B}_{3,1} \notin (CF)$. Выберем в $\Pi_{3,1}$ базис (e, h_1, h_2, f) , в котором матрица оператора J имеет вид

$$[J] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, векторы e и f нейтральны и кососвязанны, а h_1 и h_2 им ортогональны, причем $[h_1, h_2] = 0$, $[h_i, h_i] = 1$. Пусть K – линейная оболочка векторов h_1, h_2 .

Для любой пары (u, v) векторов из K обозначим через $T(u, v)$ оператор, определенный условиями

$$T(u, v)e = 0, \quad T(u, v)f = v, \quad T(u, v)x = [x, u]e \quad \text{при } x \in K.$$

Прямой подсчет показывает, что для любых пар векторов $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ из K оператор $T(u_1, v_1)T(u_2, v_2)$ переводит в нуль векторы e, h_1, h_2 , а образ вектора f равен $(v_2, u_1)e$. Поэтому операторы $T(u_1, v_1)$ и $T(u_2, v_2)$ коммутируют тогда и только тогда, когда $[v_2, u_1] = [v_1, u_2]$. Кроме того, $T(u, v)^* = T(v, u)$ и потому $T(u, v)$ нормален тогда и только тогда, когда $\|u\|^2 = \|v\|^2$.

Положим

$$A = T(h_1, h_2), \quad B = T(p_1, p_2),$$

где $p_1 = -h_1 - ih_2, p_2 = ih_1 + h_2$. Эти операторы нормальны и коммутируют, поскольку $[p_2, h_1] = i = [h_2, p_1]$. С другой стороны, $[p_2, h_2] \neq [p_1, h_1]$ и потому A^* не коммутирует с B .

Мы доказали, что свойством (CF) не обладает алгебра $\mathcal{B}_{3,1}$, и потому в силу леммы 2 любая алгебра $\mathcal{B}_{n,1}$ с $n > 2$.

Остается доказать, что $\mathcal{B}_{2,1} \in (CF)$. Пусть A, B – коммутирующие нормальные операторы в $\Pi_{2,1}$. Предположим вначале, что A не имеет нейтральных собственных векторов. Пусть e_1 – общий собственный вектор для A и A^* , и пусть $L = \mathbb{C}e_1$. Так как e_1 не нейтрален, то $H = L + L^\perp$, причем $L^\perp$ инвариантно для A и A^* . Рассматривая сужения A и A^* на $L^\perp$, мы получим второй общий собственный вектор для A и A^* , и наконец, повторяя рассуждения, получим базис (e_1, e_2, e_3) из общих собственных векторов операторов A и A^* : $Ae_i = \lambda_i e_i, A^*e_i = \bar{\lambda}_i e_i$. При этом $[e_i, e_i] \neq 0, i = 1, 2, 3$. Поэтому $A^* = p(A)$ для некоторого полинома p , а значит, B коммутирует с A^* (заметим, что в этом случае нормальность оператора B не используется).

Пусть теперь A имеет нейтральный собственный вектор e_1 . Обозначая, как и выше, $L = \mathbb{C}e_1$, в силу леммы 1 получим, что подпространства L и $L^\perp$ инвариантны для A и A^* . Выберем базис (e_1, e_2, e_3) , где $e_2 \in L^\perp$ положительный, а e_3 – нейтральный вектор, кососвязанный с e_1 . В этом базисе

$$[A] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad [A^*] = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_3 & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{13} \\ 0 & \bar{\lambda}_2 & \bar{a}_{12} \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix}.$$

Заменяя оператор A на $A - \lambda_1 I$, можно считать, что $\lambda_1 = 0$. Условие нормальности оператора A записывается системой равенств

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_2 a_{12} = \bar{\lambda}_3 a_{12} + \lambda_2 \bar{a}_{23}, \\ \lambda_2 \bar{a}_{12} = \bar{\lambda}_2 a_{23} + \bar{a}_{12} \lambda_3, \\ |a_{12}|^2 = |a_{23}|^2 + \lambda_3 \bar{a}_{13} + \bar{\lambda}_3 a_{13}. \end{cases}$$

Если все числа $0, \lambda_2, \lambda_3$ различны, то у оператора A есть базис из собственных векторов, каждый из которых порождает свое собственное подпространство. Поэтому коммутант оператора состоит из операторов, сохраняющих эти подпространства, т.е. является коммутативной алгеброй. Так как он содержит A^* и B , то A^* коммутирует с B .

Рассмотрим остальные случаи.

1) $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Можно считать (умножая при необходимости A на скаляр), что $\lambda_3 = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{cases} a_{12} = 0, \\ |a_{23}|^2 + \lambda_3 \overline{a_{13}} + \overline{\lambda_3} a_{13} = 0. \end{cases}$$

Заменив вектор e_3 на $e_3 + a_{13}e_1$, можно привести задачу к случаю $a_{13} = 0$, и тогда $a_{23} = 0$. Таким образом,

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [A^*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор B , коммутирующий с A , сохраняет собственные подпространства и потому задается матрицей

$$[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{а значит,} \quad [B^*] = \begin{pmatrix} \overline{b_{33}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{b_{22}} & \overline{b_{12}} \\ 0 & \overline{b_{21}} & \overline{b_{11}} \end{pmatrix}.$$

Условие нормальности B дает $b_{12} = b_{21} = 0$, откуда следует, что B коммутирует с A^* .

2) $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Можно считать (умножая при необходимости A на скаляр), что $\lambda_2 = 1$. В этом случае имеем $a_{12} = \overline{a_{23}}$. Заменив вектор e_2 на $e_2 + a_{12}e_1$, можно привести задачу к случаю $a_{12} = 0$, и тогда $a_{23} = 0$. Таким образом,

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [A^*] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{a_{13}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть число w таково, что $wa_{13} = \overline{a_{13}}$. Положим $p(z) = wz + (1-w)z^2$, тогда $A^* = p(A)$ и потому коммутирует с B .

3) $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Корневое подпространство K точки 1 является инвариантным дополнением к $\mathbb{C}e_1$. Его пересечение с $L^\perp$ одномерно, поэтому, выбрав e_2 в этом пересечении и взяв в качестве e_3 произвольный нейтральный вектор из K , мы получим, что A имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условия нормальности дают $a_{23} = 0$, т.е.

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [A^*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор B , коммутирующий с A , имеет вид

$$[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

откуда

$$[B^*] = \begin{pmatrix} \overline{b_{33}} & \overline{b_{23}} & 0 \\ \overline{b_{32}} & \overline{b_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{b_{11}} \end{pmatrix},$$

и их перестановочность влечет $b_{23} = b_{32} = 0$. Отсюда следует, что $BA^* = A^*B$.

4) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. В этом случае условия нормальности A дают лишь одно соотношение: $|a_{12}| = |a_{23}|$.

Если $a_{12} = 0$, то можно считать, что $a_{13} \neq 0$ (иначе $A = 0$). Умножив, если нужно, оператор A на скаляр, будем считать, что $a_{13} = 1$. Но в этом случае

$$[A^*] = [A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и утверждение очевидно.

Остается рассмотреть случай $a_{12} \neq 0$. Тогда $a_{23} \neq 0$,

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [A^*] = \begin{pmatrix} 0 & \overline{a_{23}} & \overline{a_{13}} \\ 0 & 0 & \overline{a_{12}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}e_1 = \ker A, \quad \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 = \ker A^2.$$

Поэтому эти подпространства инвариантны относительно коммутанта оператора A . В частности, B их сохраняет, а значит, его матрица верхнетреугольная:

$$[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Условие $AB = BA$ дает

$$\begin{cases} b_{11} = b_{22} = b_{33}, \\ a_{12}b_{23} = b_{12}a_{23}. \end{cases}$$

Для доказательства равенства $A^*B = BA^*$ нужно лишь установить, что

$$b_{12}\overline{a_{12}} = b_{23}\overline{a_{23}}.$$

Из второго равенства системы и условия $|a_{12}| = |a_{23}|$ имеем

$$\begin{aligned} a_{12}b_{23} = b_{12}a_{23} & \iff b_{23} \frac{|a_{12}|^2}{\overline{a_{12}}} = b_{12} \frac{|a_{23}|^2}{\overline{a_{23}}} & \iff \frac{b_{23}}{\overline{a_{12}}} = \frac{b_{12}}{\overline{a_{23}}} \\ & \iff b_{12}\overline{a_{12}} = b_{23}\overline{a_{23}}. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае $A^*B = BA^*$.

Если $(\mathcal{A}_1, \star_1)$ и $(\mathcal{A}_2, \star_2)$ – инволютивные алгебры, то их тензорное произведение $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ естественным образом наделяется инволюцией, определенной на простых тензорах формулой

$$(a \otimes b)^* = a^{\star_1} \otimes b^{\star_2}$$

и продолженной на всю алгебру по антилинейности.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Тензорное произведение двух алгебр со свойством (F) может не быть (CF) -алгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что если J_1 и J_2 – операторы в пространствах H_i , задающие инволюции, сигнатуры которых равны (n_1, k_1) и (n_2, k_2) соответственно, то их тензорное произведение $J = J_1 \otimes J_2$ – оператор, задающий инволюцию в пространстве $H = H_1 \otimes H_2$, причем его индексы (n, k) определяются формулами $n = n_1 n_2 + k_1 k_2$, $k = n_1 k_2 + k_1 n_2$.

Пусть теперь $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{1,1}$, т.е. алгебры $\mathcal{B}(H_1)$, $\mathcal{B}(H_2)$ с инволюциями, заданными операторами J_1 , J_2 сигнатуры $(1, 1)$. Алгебра $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ отождествляется с $\mathcal{B}(H_1 \otimes H_2)$ следующим условием действия на простых тензорах:

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By.$$

Так как

$$(A \otimes B)^* = A^{*1} \otimes B^{*2} = J_1 A^* J_1 \otimes J_2 B^* J_2 = J(A \otimes B)^* J,$$

то инволютивная алгебра $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ совпадает с $\mathcal{B}_{2,2}$. Остается заметить, что по теореме 3 $\mathcal{B}_{1,1} \in (F)$, в то время как $\mathcal{B}_{2,2} \notin (CF)$.

4. Общие алгебры операторов в пространстве Π_1 . Начиная с работ Наймарка [14] и Исагилова [15], интенсивно исследовалось строение J -симметричных алгебр операторов в Π_k (для краткости, J^* -алгебр). J^* -Алгебра называется *невырожденной*, если у нее нет нейтральных инвариантных подпространств, и *общей* – в противном случае. В работах [16] и [17] было доказано, что всякая замкнутая по норме невырожденная J^* -алгебра – это прямая сумма конечного числа слагаемых, каждое из которых топологически изоморфно (но не $*$ -эквивалентно) некоторой C^* -алгебре. Если же говорить о $*$ -эквивалентности, то уже в [15] было установлено, что каждая замкнутая в слабой операторной топологии невырожденная J^* -алгебра $*$ -эквивалентна прямой сумме W^* -алгебры и нескольких алгебр типа $\mathcal{B}_{n,k}$. Мы здесь рассмотрим общие J^* -алгебры в Π_1 и докажем, что они обладают свойством, близким к условной фуглидовости.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутая по норме общая симметричная алгебра операторов в пространстве Π_1 . Если $A, B \in \mathcal{A}$ – коммутирующие нормальные операторы, то коммутатор $A^*B - BA^*$ либо равен нулю, либо имеет ранг 1 и принадлежит одномерному нильпотентному идеалу алгебры $\mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = \mathbb{C}e$ – нейтральное инвариантное подпространство алгебры $\mathcal{A}$. Пусть K – положительное подпространство, дополняющее L до $L^\perp$, f – произвольный вектор, кососвязный с e , $M = \mathbb{C}f$. Мы будем сопоставлять операторам из $\mathcal{A}$ операторные матрицы, соответствующие разложению $H = L + K + M$. Так как пространства L и, следовательно, $L^\perp = L + K$ инвариантны, то эти матрицы треугольные и имеют вид

$$[A] = \begin{pmatrix} \lambda & x^* & \gamma \\ 0 & A_0 & y \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где $A_0 \in \mathcal{B}(K)$, $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{C}$, $x, y \in K$, причем y отождествляется с оператором $\alpha f \mapsto \alpha y$ из M в K , а символом x^* обозначается оператор из K в L , действующий по формуле $x^*(z) = (z, x)e$. Естественный смысл операторов (между одномерными пространствами) имеют здесь и числа λ, μ, γ . Для экономии места мы часто вместо матрицы будем писать $A = T(A_0, \lambda, \mu, \gamma, x, y)$. Множество $\mathcal{E}$ всех операторов, сохраняющих L и $L^\perp$, образует J^* -алгебру, содержащую $\mathcal{A}$, так что достаточно доказать утверждение для случая $\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{E} : AH \subseteq L, A^*H \subseteq L\}$ – двусторонний одномерный нильпотентный идеал в $\mathcal{E}$. Мы будем доказывать, что если нормальные операторы $A, B \in \mathcal{E}$ коммутируют, то

$$A^*B - BA^* \in \mathcal{J}. \quad (4.1)$$

Прямой подсчет показывает, что

$$T(A_0, \lambda, \mu, \gamma, x, y)^* = T(A_0^*, \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}, y, x),$$

$$\begin{aligned} & T(A_0, \lambda, \mu, \gamma, x, y)T(B_0, \lambda', \mu', \gamma', x', y') \\ &= T(A_0B_0, \lambda\lambda', \mu\mu', \lambda\gamma' + (y', x) + \gamma\mu', B_0^*x + \bar{\lambda}x', A_0y' + \mu'y). \end{aligned}$$

Мы немного упростим вычисления, если прибавим к A и B операторы, кратные единичному, таким образом, что будут выполнены равенства $\mu = -\lambda$, $\mu' = -\lambda'$. Кроме того, разделив на подходящее число, можно считать числа λ и λ' вещественными (и даже равными 0 или 1). Тогда условия коммутирования A с B записываются в виде

$$(A_0^* - \lambda I)x' = (B_0^* - \lambda' I)x, \quad (4.2)$$

$$(A_0 + \lambda I)y' = (B_0 + \lambda' I)y, \quad (4.3)$$

$$2(\lambda'\gamma - \lambda\gamma') = (y', x) - (y, x'). \quad (4.4)$$

Условия нормальности A выглядят так:

$$(A_0 + \lambda I)x = (A_0^* - \lambda I)y, \quad (4.5)$$

$$4\lambda \operatorname{Re} \gamma = \|y\|^2 - \|x\|^2. \quad (4.6)$$

Условия нормальности B следующие:

$$(B_0 + \lambda' I)x' = (B_0^* - \lambda' I)y', \quad (4.7)$$

$$4\lambda' \operatorname{Re} \gamma' = \|y'\|^2 - \|x'\|^2. \quad (4.8)$$

Так как $\mathcal{J}$ состоит из операторов $T(0, 0, 0, \gamma, 0, 0)$, то включение (4.1), которое мы должны установить, записывается с учетом теоремы Фуглида в виде следующих двух равенств:

$$(A_0 + \lambda I)x' = (B_0^* - \lambda' I)y, \quad (4.9)$$

$$(A_0^* - \lambda I)y' = (B_0 + \lambda' I)x. \quad (4.10)$$

Мы докажем первое из них, опуская аналогичное доказательство второго.

Заметим, прежде всего, что взяв вещественную часть от обеих частей равенства (4.4) и используя (4.6), (4.8), легко получить

$$4(\lambda - \lambda') \operatorname{Re}(\gamma + \gamma') + 2 \operatorname{Re}(y', x) - 2 \operatorname{Re}(y, x') = \|y\|^2 + \|x'\|^2 - \|x\|^2 - \|y'\|^2,$$

т.е.

$$\|x + y'\|^2 - \|x' + y\|^2 = 4(\lambda - \lambda') \operatorname{Re}(\gamma + \gamma'). \quad (4.11)$$

Мы начнем выводить (4.9) из (4.2), (4.3), (4.5) и (4.7), хотя впоследствии нам понадобятся и другие условия. Заметим, что эти равенства *ортогонально разложимы*, т.е. для любого разложения пространства K в ортогональную сумму подпространств $K = PK + (I - P)K$, инвариантных для A_0 и B_0 , справедливость каждого из них для набора (A_0, B_0, x, y, x', y') равносильна справедливости для проекций, т.е. наборов

$$(PA_0|_{PK}, PB_0|_{PK}, Px, Py, Px', Py'), \\ ((I - P)A_0|_{(I-P)K}, (I - P)B_0|_{(I-P)K}, (I - P)x, (I - P)y, (I - P)x', (I - P)y').$$

Ортогональная разложимость позволяет сужать задачу на подходящие спектральные подпространства операторов A_0 , B_0 (они инвариантны для A_0 и B_0 одновременно в силу теоремы Фуглида). Рассмотрим вначале подпространство $\overline{(A_0 - \lambda I)K}$. Оно имеет нулевое пересечение с $\ker(A_0 - \lambda I)$, поэтому условие (4.9) в этой ситуации эквивалентно равенству

$$(A_0^* - \lambda I)(A_0 + \lambda I)x' = (A_0^* - \lambda I)(B_0^* - \lambda' I)y,$$

правую часть которого можно, используя (4.5) и (4.2), можно переписать в виде

$$(B_0^* - \lambda' I)(A_0^* - \lambda I)y = (B_0^* - \lambda' I)(A_0 + \lambda I)x \\ = (A_0 + \lambda I)(B_0^* - \lambda' I)x = (A_0 + \lambda I)(A_0^* - \lambda I)x'.$$

Таким образом, (4.9) верно.

Дополнительное подпространство, на котором нужно теперь рассматривать задачу, это $K_0 = \ker(A_0 - \lambda I)$. Здесь мы можем считать, что $A_0 = \lambda I$, и доказывать, что

$$(B_0^* - \lambda' I)y = 2\lambda x'. \quad (4.12)$$

Условия (4.2), (4.3), (4.5), (4.7) переписываются в виде

$$(B_0^* - \lambda' I)x = 0, \quad (B_0 + \lambda' I)y = 2\lambda y', \quad 2\lambda x = 0, \quad (B_0 + \lambda' I)x' = (B_0^* - \lambda' I)y'. \quad (4.13)$$

Снова применяя ортогональное разложение, рассмотрим подпространство

$$\overline{(B_0 + \lambda' I)K} \cap \ker(A_0 - \lambda I),$$

на котором оператор $B_0 + \lambda' I$ инъективен. Действуя им на обе части равенства (4.12) и применяя второе из условий (4.13), получим равенство

$$(B_0^* - \lambda' I)2\lambda y' = 2\lambda(B_0 + \lambda' I)x',$$

которое верно в силу (4.13).

Остается перейти к подпространству

$$K_{00} = \ker(B_0 + \lambda'I) \cap \ker(A_0 - \lambda I).$$

На нем можно считать, что $A_0 = \lambda I$, $B_0 = -\lambda'I$. Требуется доказать, что

$$-2\lambda'y = 2\lambda x', \quad (4.14)$$

а система условий имеет вид

$$-2\lambda'x = 0, \quad 2\lambda y' = 0, \quad 2\lambda x = 0, \quad -2\lambda'y' = 0. \quad (4.15)$$

Заметим, что если $\lambda = \lambda' = 0$, то равенство (4.14) очевидно.

Пусть теперь $\lambda = \lambda' \neq 0$; тогда $x = y' = 0$.

Далее, равенство (4.11) в нашем случае принимает вид

$$\|x + y'\|^2 - \|x' + y\|^2 = 0. \quad (4.16)$$

Следовательно, $x' = -y$, откуда немедленно вытекает (4.14).

Пусть $\lambda \neq \lambda'$, тогда можно считать, что $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$. Из (4.15) следует, что $x = y' = 0$. Далее, условие (4.8) в этой ситуации записывается в виде $\|y'\|^2 = \|x'\|^2$ (и, поскольку оно ортогонально разложимо, сохраняется на подпространстве K_{00}). Следовательно, $x' = 0$ и обе части равенства (4.14) нулевые. Теорема доказана.

Естественно предположить, что теорема 4 может быть усилена до утверждения об условной фуглидовости фактор-алгебры общей J^* -алгебры по одномерному идеалу. Однако, полагая

$$A = T(1, 1, -1, 0, 0, y), \quad B = T(-1, 1, -1, 0, x, 0),$$

где векторы $x, y \in K$ таковы, что $x + y \neq 0$, легко убедиться, что

$$AB - BA \in \mathcal{I}, \quad A^*A - AA^* \in \mathcal{I}, \quad B^*B - BB^* \in \mathcal{I}, \quad \text{но} \quad A^*B - BA^* \notin \mathcal{I}.$$

Заметим, что пример этот работает и в случае одномерного K , т.е. когда сама алгебра $\mathcal{E}$ условно фуглидова (как подалгебра $\mathcal{B}_{2,1}$, которая условно фуглидова в силу теоремы 3). Это дает пример конечномерной условно фуглидовой алгебры, фактор-алгебра которой по идеалу не является условно фуглидовой.

Причина этого эффекта в том, что мы, доказывая перестановочность A с B^* по модулю $\mathcal{I}$, пользовались настоящей перестановочностью A с B , A с A^* и B с B^* (а технически – условиями (4.4), (4.6) и (4.8)). Однако, как отмечено в доказательстве, эти условия не нужны, если $\lambda = \lambda' = 0$. Таким образом, мы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть L – нейтральное подпространство в пространстве H типа Π_1 , $\mathcal{E}_0$ – алгебра всех операторов A таких, что $AL = 0$, $A^*L = 0$, а $\mathcal{I}$ – ее одномерный идеал, состоящий из операторов, удовлетворяющих условиям

$$AH \subseteq L, \quad A^*H \subseteq L.$$

Тогда алгебра $\mathcal{E}_0/\mathcal{I}$ является условно фуглидовой.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ совокупность всех троек $\xi = (A, x, y)$, где $x, y \in \mathcal{H}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Вводя в $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ операции сложения (покомпонентно) и умножения на число: $\lambda(A, x, y) = (\lambda A, \lambda x, \lambda y)$, мы получим линейное пространство, которое превратим в алгебру, определяя умножение формулой

$$(A_1, x_1, y_1)(A_2, x_2, y_2) = (A_1 A_2, A_2^* x_1, A_1 y_2).$$

Зададим инволюцию формулой $(A, x, y)^* = (A^*, y, x)$. Инволютивная алгебра $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ является банаховой $*$ -алгеброй относительно нормы $\|(A, x, y)\| = \|A\| + \|x\| + \|y\|$. Замкнутые $*$ -подалгебры алгебры $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ называются *алгебрами Наймарка*.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Всякая алгебра Наймарка условно фуглидова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение для $\mathcal{N}(\mathcal{H})$.

Пусть $H = \mathbb{C}e \oplus \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}f$ – пространство Π_1 , в котором векторы e и f нейтральны, кососвязны и ортогональны $\mathcal{H}$. Определим алгебру $\mathcal{E}_0$ так же, как и выше. Прямой подсчет показывает, что отображение $\Phi: \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{H})$, заданное формулой $\Phi(T(A, 0, 0, \gamma, x, y)) = (A, x, y)$, является сюръективным $*$ -гомоморфизмом. Ядро этого гомоморфизма состоит из операторов $T(0, 0, 0, \gamma, 0, 0)$, т.е. совпадает с $\mathcal{I}$. Следовательно, $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ $*$ -эквивалентна алгебре $\mathcal{E}_0/\mathcal{I}$, которая является условно фуглидовой в силу следствия 3.

В заключение рассмотрим пример, показывающий, что свойство (F) , вообще говоря, неустойчиво относительно расширений. Сохраняя терминологию, введенную при доказательстве следствия 4, обозначим через $\mathcal{E}_{00}$ подалгебру в $\mathcal{E}_0$, состоящую из всех четверок вида $(0, x, y, \gamma)$. Она содержит J , причем $\mathcal{E}_{00}/J$ – это алгебра Наймарка $\{(0, x, y) : x, y \in K\}$. Как идеал, так и фактор по нему коммутативны, поэтому обладают свойством (F) . Покажем, что алгебра W_{00} не является даже условно фуглидовой, если $\dim H \geq 3$.

Пусть e_1, e_2, e_3 – попарно ортогональные единичные векторы. Положим

$$a = (0, e_2, e_1, 0), \quad b = (0, e_3, e_1, 0).$$

Тогда $a^*a = aa^* = b^*b = bb^* = (0, 0, 0, 1)$, поэтому элементы a, b нормальны. Далее, имеем $ab = (0, 0, 0, (e_1, e_2)) = (0, 0, 0, 0) = ba$, т.е. a и b коммутируют, но $a^*b = (0, 0, 0, (e_1, e_1)) = (0, 0, 0, 1)$, в то время как $ba^* = (0, 0, 0, (e_2, e_3)) = (0, 0, 0, 0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Fuglede, “A commutativity theorem for normal operators”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 35–40.
- [2] C. R. Putnam, “On normal operators in Hilbert space”, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 357–362.
- [3] S. K. Berberian, “Note on a theorem of Fuglede and Putnam”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 175–182.
- [4] М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, В. И. Чилин, “Теорема Фуглида–Путнама для локально измеримых операторов”, *Динамические системы*, **4(32)**:1–2 (2014), 3–8.
- [5] G. Weiss, “The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert–Schmidt class and generating functions for matrix operators. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 193–209.

- [6] V. Shulman, “Some remarks on the Fuglede–Weiss theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **28**:4 (1996), 385–392.
- [7] V. Shulman, L. Turowska, “Operator synthesis. II. Individual synthesis and linear operator equations”, *J. Reine Angew Math.*, **590** (2006), 143–187.
- [8] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [9] Р. С. Исмагилов, “О неприводимости представлений групп измеримых токов”, *Функци. анализ и его прил.*, **28**:2 (1994), 21–30.
- [10] М. А. Наймарк, “О перестановочных унитарных операторах в пространстве Π_k ”, *Докл. АН СССР*, **149** (1963), 1261–1263.
- [11] Л. С. Понтрягин, “Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:6 (1944), 243–280.
- [12] М. Г. Крейн, “Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой”, *УМН*, **5**:2(36) (1950), 180–190.
- [13] V. Lomonosov, “On stability of non-negative invariant subspaces”, *New Results in Operator Theory and its Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **98**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, 186–189.
- [14] М. А. Наймарк, “Условия унитарной эквивалентности коммутативных симметричных алгебр в пространстве Понтрягина Π_k ”, *Тр. ММО*, **15**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, 383–399.
- [15] Р. С. Исмагилов, “О кольцах операторов в пространстве с индефинитной метрикой”, *Докл. АН СССР*, **171** (1966), 269–271.
- [16] А. И. Логинов, В. С. Шульман, “Неприводимые J -симметричные алгебры операторов в пространствах с индефинитной метрикой”, *Докл. АН СССР*, **248** (1978), 21–23.
- [17] E. Kissin, A. I. Loginov, V. S. Shulman, “Derivations of C^* -algebras and almost Hermitian representations on Π_k -spaces”, *Pacific J. Math.*, **174**:2 (1996), 411–430.
- [18] В. С. Шульман, “Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа Π_1 ”, *Матем. сб.*, **89**:2 (1972), 264–279.
- [19] E. Kissin, V. S. Shulman, *Representations on Krein Spaces and Unbounded Derivations of C^* -Algebras*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **89**, Longman, Harlow, 1997.

М. В. Ахрамович

Таврическая академия Крымского федерального
университета имени В. И. Вернадского
E-mail: fromen@bk.ru

Поступило

23.03.2015

Исправленный вариант

05.04.2015

М. А. Муратов

Таврическая академия Крымского федерального
университета имени В. И. Вернадского
E-mail: mamuratov@gmail.com

В. С. Шульман

Вологодский государственный университет
E-mail: shulman.victor80@gmail.com