Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Вложение пространства Соболева в случае предельного показателя, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 498–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 09:12:58

Вложение пространства Соболева в случае предельного показателя

О. В. Бесов

Устанавливаются вложения пространства Соболева W_p^s и пространства B_{pq}^s (в случае предельного показателя) в некоторые пространства локально суммируемых функций нулевой гладкости. Этим уточняются вложения пространства Соболева в пространства Лоренца и в пространства Лоренца–Зигмунда. Выясняется соотношение между пространствами Лоренца и соответствующими пространствами функций нулевой гладкости. Установлены аналогичные вложения пространств потенциалов.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10824

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$; $L_p(G)$, L_θ^* – лебеговы пространства функций с нормами соответственно

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|\varphi\|_{L_\theta^*} = \left(\int_0^T |\varphi(t)|^\theta dt \right)^{1/\theta},$$

где $0 < T \leq \infty$;

$$Q = [-1, 1]^n, \quad hQ = [-h, h]^n, \quad Q_h(x) = Q(x, h) = x + [-h, h]^n, \quad Q_h = Q_h(0);$$

χ – индикатор Q или $[-1, 1]$, $B(x, h) = \{y : |y - x| < h\}$, $\{e_i\}_1^n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Символом $|E|$ обозначим лебегову меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Все рассматриваемые функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ локально суммируемы на области своего определения G (пишем $f \in L(G, \text{loc})$). *Невозрастающей перестановкой* функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется невозрастающая функция

$$f^*(t) = \inf\{\tau : |\{x : |f(x)| > \tau\}| \leq t\}, \quad t > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00684), а также программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Функция f^* неотрицательна, не возрастает на $(0, \infty)$ и равноизмерима с функцией f . Рассмотрим функцию

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du = \frac{1}{t} \sup_{E: |E|=t} \int_E |f(x)| dx.$$

Символом $b_{pq}^{0,r}$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$, обозначим полунормированное пространство функций из $L_r(\mathbb{R}^n, \text{loc})$ с конечной полунормой

$$\|f \mid b_{pq}^{0,r}\| = \left\{ \int_0^\infty \|\delta(h, r)f \mid L_p\|^q \frac{dh}{h} \right\}^{1/q}, \quad (1)$$

где

$$\delta(h, r)f(x) := \left\{ (2h)^{-2n} \int_{[-h, h]^n} \int_{[-h, h]^n} |f(x+y) - f(x+z)|^r dy dz \right\}^{1/r} \\ \text{при } 1 \leq r < \infty, \quad (2)$$

$$\delta(h, \infty)f(x) := \text{ess sup}_{y, z \in [-h, h]^n} |f(x+y) - f(x+z)|.$$

Символом $B_{pq}^{0,r}$ обозначим нормированное пространство функций f с $f^{**}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и нормой $\|f \mid b_{pq}^{0,r}\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространство $b_{\infty\infty}^{0,1}$ совпадает с пространством ВМО, введенным и исследованным в [1]. Возможность характеризовать нулевую гладкость функций в терминах полунормы (1) отмечалась в [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работе [3] в качестве второго слагаемого в норме $B_{pq}^{0,r}$ участвовало $\text{ess sup}_{t>0} f^{**}(t)$. При чтении следует исправить приведенное там определение нормы $B_{pq}^{0,r}$ на $\|f \mid b_{pq}^{0,r}\| + f^{**}(1)$.

В настоящей работе усиливаются теоремы из [3] о вложении пространства $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ Соболева, пространства $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ и пространства потенциалов, заданных на $\mathbb{R}^n$, в пространство функций нулевой гладкости. Устанавливаются также вложения пространства $b_{pq}^{0,p}$ в пространство Лоренца или Лоренца–Зигмунда.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < r < q \leq \infty$,

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0. \quad (3)$$

Тогда

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) \subset b_{qp}^{0,r}(\mathbb{R}^n). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p < r < q \leq \infty$, $s > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и выполнено (3). Тогда

$$B_{p\theta}^s(\mathbb{R}^n) \subset b_{q\theta}^{0,r}(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Теоремы 1, 2 установлены в [3] при ограничении $1/r > 1 - 1/p + 1/q$. Обозначив символом $f_h(x) = (2h)^{-n} \int_{Q(x,h)} f(y) dy$ среднее значение функции f на кубе $Q(x, h)$,

отметим, что (см. [3]) при $1 \leq r \leq \infty$

$$\begin{aligned} \delta(h, r)f(x) &\leq \left\{ \inf_{C \in \mathbb{R}} (2h)^{-2n} \int_{Q(x, h)} \int_{Q(x, h)} (|f(y) - C| + |f(z) - C|)^r dy dz \right\}^{1/r} \\ &\leq 2 \left\{ \inf_{C \in \mathbb{R}} (2h)^{-n} \int_{Q(x, h)} |f(y) - C|^r dy \right\}^{1/r} \\ &\leq 2^r (2h)^{-n} \int_{Q(x, h)} |f(y) - f_h(x)|^r dy \\ &= 2 \left\{ (2h)^{-n} \int_{Q(x, h)} \left| (2h)^{-n} \int_{Q(x, h)} (f(y) - f(z)) dz \right|^r dy \right\}^{1/r} \leq 2\delta(h, r)f(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Положим

$$\bar{\delta}(h, r)f(x) = (2h)^{-n/r} (|f|^r)_h^{1/r}(x) = (2h)^{n/r} \left(\chi\left(\frac{\cdot}{h}\right) * |f(\cdot)|^r \right)^{1/r}(x). \quad (7)$$

Заметим, что

$$\delta(h, r)f(x) \leq 2\bar{\delta}(h, r)f(x) \quad \text{для всех } f \in L(\mathbb{R}^n, \text{loc}). \quad (8)$$

В дальнейшем для $\Psi \in C_0^1(\kappa Q + a)$, $\kappa > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ будет использоваться также оценка

$$\delta(h, r)\Psi(x) \leq Ch\chi\left(\frac{x-a}{\kappa+h}\right) |\text{grad } \Psi|, \quad 0 < h < t < \infty, \quad (9)$$

в которой C не зависит от Ψ , κ , a , h , x . Для функционалов $A = A(f) \geq 0$, $B = B(f) \geq 0$ будем писать $A \lesssim B$, если существует не зависящая от f постоянная $c > 0$ такая, что $A(f) \leq cB(f)$. Будем писать $A \approx B$, если $A \lesssim B$ и $A \gtrsim B$.

Отметим (см. [3]), что при $1 \leq q \leq s \leq \infty$, $1 \leq t \leq r \leq \infty$ имеет место вложение

$$b_{pq}^{0,r}(\mathbb{R}^n) \subset b_{ps}^{0,t}(\mathbb{R}^n). \quad (10)$$

Приведем определения пространств W_p^s , $B_{p\theta}^s$. Положим при $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\Delta_i^m(h)f(x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j f(x + jhe_i).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ символом $W_p^s = W_p^s(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство Соболева с нормой

$$\|f\|_{W_p^s} = \|f\|_{L_p} + \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p}.$$

При $s > 0$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ символом $B_{p,\theta}^s = B_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ [4] (п. 18.1) обозначим банахово пространство функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^s} = \|f\|_{L_p} + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 [h^{-s} \|\Delta_i^m(h)f\|_{L_p}]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta},$$

где $0 < s < m \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p < r < q < \infty$, $\varepsilon = 1/r - 1/q > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $s = n/p - n/q$, $\mu = 1 - 1/p + 1/q$, $\nu = 1 - 1/p + 1/r$, $h > 0$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$,

$$K(y, h) = |y|^{-n\mu} \chi\left(\frac{y}{h}\right) = |y|^{-n\nu+n\varepsilon} \chi\left(\frac{y}{h}\right), \quad F(x, h) := \int K(x - y, h) f(y) dy. \quad (11)$$

Тогда существует постоянная C_r такая, что

$$\left\{ \int_0^\infty h^{-n\varepsilon} \|F(\cdot, h)\|_r^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \leq C_r \|f\|_p \quad (12)$$

для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n \geq 2$ положим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$. Тогда (11) можно записать в виде

$$F((x', x_n), h) = \iint K((x' - y', x_n - y_n), h) f(y', y_n) dy' dy_n.$$

Применяя неравенство Юнга по x' , получаем, что

$$\|F(\cdot, x_n, h)\|_{L_r} \leq C \int K'(x_n - y_n, h) \|f(\cdot, y_n)\|_{L_p} dy_n,$$

где

$$K'(y_n, h) = |y_n|^{-\nu+n\varepsilon} \chi\left(\frac{y_n}{h}\right) h^{-n\varepsilon} \leq |y_n|^{-\nu+\varepsilon} \chi\left(\frac{y_n}{h}\right) h^{-\varepsilon}.$$

Подставляя последнюю оценку в (12), сводим доказательство неравенства (12) к случаю $n = 1$, что дальше и будем предполагать.

Применим к (11) лемму Ильина (2.24 из [4]), в которой в качестве q возьмем r , а также положим $\sigma = p$, $\beta = \varepsilon$, $\tau = h$. Тогда $K(y, h) y^{-1/p} \leq K_2(y, h)$, где K_2 взято из условий леммы Ильина. Приходим к неравенству (12) при $n = 1$ и доказательству леммы.

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1

$$\left\{ \int_0^\infty \|\bar{\delta}(h, r) F(\cdot, h)\|_q^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \leq C_r \|f\|_p, \quad (13)$$

где C_r не зависит от $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Юнга для оператора свертки, действующего из L_1 в $L_{q/r}$, имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{\delta}(h, r) F(\cdot, h)\|_q &\leq (2h)^{-n/r} \left\{ \left[\left(\chi\left(\frac{\cdot}{h}\right) * F(\cdot, h)^r \right)(x) \right]^{q/r} dx \right\}^{1/q} \\ &\leq C h^{-n/r+n/q} \|F(\cdot, h)\|_r. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться леммой 1.

Заметим, что теорема 1 следует из теоремы 2, если учесть вложение (результат Солонникова, см. [4; п. 18.13])

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) \subset B_{q,p}^\sigma(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad \sigma = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0, \quad p > 1,$$

и вложение

$$W_1^s(\mathbb{R}^n) \subset B_{q,1}^\sigma(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad n \geq 2, \quad \sigma = s - n + \frac{n}{q} > 0,$$

являющееся следствием результата Коляды (см. [5]). Из этих же соображений можно ограничиться доказательством теоремы 2 лишь при $p > 1$. Мы изложим прямое доказательство теорем 1, 2 для $p > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Приведем представление функции f через производные, взятое из [4; п. 7.3] при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$. Поскольку здесь в качестве области рассматривается $\mathbb{R}^n$, пути $\Gamma_x(t)$ в представлении функций будем считать точками (т.е. описываемое функциями, не зависящими от t), а параметр $T = \infty$. Имеем

$$f(x) = \int_0^\infty \int \sum_{i=1}^n t^{-1-n+s} K_i\left(\frac{y-x}{t}\right) D_i^s f(y) dy dt \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

где

$$f_t(x) = t^{-n} \int \Omega\left(\frac{y-x}{t}\right) f(y) dy, \quad (15)$$

$\Omega, K_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что для $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_T(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

что вытекает из оценки

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^n} \int_{TQ} |f(x+y)| dy &\leq T^{-n/p} \left(\int_{TQ} |f(x+y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq T^{-n/p} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это позволяет в (14) брать $T = \infty$, считая $f_\infty(x) = 0$.

Положив $f^{[s]}(x) := \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f(x)|$ и применяя к (14) оценки (8), (9), получаем, что

$$\begin{aligned} \delta(h, r) f(x) &\leq C \bar{\delta}(h, r) \int_{|x-y| < h} |x-y|^{-n\mu} f^{[s]}(y) dy \\ &\quad + C \int_h^\infty \int t^{-1+s-1-n} h \chi\left(\frac{y-x}{2t}\right) f^{[s]}(y) dy dt \\ &= CA(h) f^{[s]}(x) + CB(h) f^{[s]}(x), \end{aligned}$$

где

$$B(h) f^{[s]}(x) \leq C_1 h \int (|y-x| + h)^{s-1-n} f^{[s]}(y) dy =: C_1 h^{1/p} \bar{B}(h) f^{[s]}(x).$$

В работе [2] получена при $1/r > 1 - 1/p + 1/q$ оценка оператора $\overline{B}(h)$:

$$\|\overline{B}(h)f^{[s]} \mid L_q(\mathbb{R}^n)\| \leq C\|f^{[s]} \mid L_p(\mathbb{R}^n)\|. \quad (16)$$

Она не зависит от r и сохраняется и при $p < r < q$.

Для оценки оператора $A(h)$ воспользуемся леммой 2, которая вместе с оценкой (16) приводит к оценке

$$\int_0^\infty \|\delta(h, r)f\|_q^p \frac{dh}{h} \leq C\|f^{[s]}\|_p.$$

Этим вложение (4) установлено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При доказательстве можно считать $p > 1$. Как и в [2], доказательство проводится с помощью интегрального представления функции в $L_r(\mathbb{R}^n, \text{loc})$ через ее разности:

$$f(x) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \int \int t^{-2-n} \Psi_i\left(\frac{y}{t}\right) \zeta_i\left(\frac{u}{t}\right) \Delta_i^n(u) f(x+y+ue_i) du dy dt,$$

где Ψ_i, ζ_i – финитные бесконечно дифференцируемые функции. Положим

$$\varphi(x, h) := h^{-s-1/\theta} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^m(h)f(x)|.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, с помощью оценок (8), (9) получаем

$$\begin{aligned} \delta(h, r)f(x) &\leq \bar{\delta}(h, r) \left(\int_0^h \sum_{i=1}^n \int \int (|y - \cdot| + |u|)^{-1-n} |u|^{s+1/\theta} |\varphi(y+ue_i, u)| dy du \right)(x) \\ &\quad + C \sum_{i=1}^n \int_h^\infty \int \int t^{-3-n} h \chi\left(\frac{y-x}{2t}\right) \chi\left(\frac{u}{t}\right) |u|^{s+1/\theta} |\varphi(y+ue_i, u)| du dy dt \\ &= 2I_0(x, h) + CI_\infty(x, h), \\ \|I_\infty(\cdot, h) \mid L_q\| &\lesssim \int_h^\infty \int t^{-3-s} h \chi\left(\frac{u}{2h}\right) |u|^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\| \\ &\lesssim h \int (|u| + h)^{-2-s} |u|^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\| du \\ &\leq h^{-1-s} \int_{|u| < h} |u|^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\| du \\ &\quad + h \int_h^\infty |u|^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\| du. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Харди получаем, что

$$\left\{ \int_0^\infty \|I_\infty(\cdot, h) \mid L_q\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \leq C \left\{ \int_0^\infty \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\|^\theta du \right\}^{1/\theta}. \quad (17)$$

Пусть $p < r < q$. Оценим $I_0(x, h) = \bar{\delta}(h, r)F(x, h)$, где

$$F(x, h) := \left[\int_0^h \sum_{i=1}^n \int \int (|y-x| + |u|)^{-1-n} |u|^{s+1/\theta} |\varphi(y+e_i, u)| dy du \right](x).$$

Воспользуемся неравенством Юнга для оператора свертки, действующего из L_p в L_r . Для этого при $1/\rho := 1 - 1/p + 1/r = 1 - 1/p + 1/q = \varepsilon$, $\varepsilon = 1/r - 1/q$ оценим L_ρ -норму свертывателя:

$$\begin{aligned} & \left(\int |u|^{(s+1/\theta)\rho} (|y| + |u|)^{-(1+n)\rho} dy \right)^{1/\rho} \\ & \leq |u|^{s+1/\theta} \left[\int_{|y| < |u|} \frac{dy}{|u|^{(1+n)\rho}} + \int_{|y| > |u|} \frac{dy}{|y|^{(1+n)\rho}} \right] \leq C |u|^{1/\theta - 1 + n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|F(\cdot, h) \mid L_r\| \leq C \int_0^h |u|^{1/\theta - 1 + n\varepsilon} \|\varphi(\cdot, u) \mid L_\theta\| du.$$

С помощью неравенства Харди получаем, что

$$\int_0^\infty h^{-n\varepsilon\theta} \|F(\cdot, h) \mid L_r\|^\theta \frac{dh}{h} \leq C \int_0^\infty \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\|^\theta du.$$

Применяя лемму 2, получаем отсюда, что

$$\int_0^\infty \|\delta(h, r) F(\cdot, h) \mid L_q\|^\theta \frac{dh}{h} \leq C \int_0^\infty \|\varphi(\cdot, u) \mid L_p\|^\theta du. \quad (18)$$

Из (17), (18) получаем утверждение теоремы 2.

Пространство Лоренца $L_{pq} = L_{pq}(\mathbb{R}^n)$ определяется при $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и при $p = q = \infty$ как множество функций с конечной квазинормой

$$\|f \mid L_{pq}\| = \left\{ \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad (19)$$

причем при $q = \infty$ интеграл в правой части понимается как $\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t)$. Известно, что

$$L_{pq} \subset L_{pr} \quad \text{при} \quad q \leq r. \quad (20)$$

Теорема вложения Соболева $W_p^s(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < q < \infty$, “для предельного показателя”, т.е. при $s - n/p + n/q = 0$, была усилена в терминах пространств Лоренца. Так, в случае $s = 1$ [6], [7]

$$W_p^1(\mathbb{R}^n) \subset L_{qp}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq p < q < \infty, \quad 1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0. \quad (21)$$

Для случая $q = \infty$ аналогом классической теоремы вложения Соболева для предельного показателя является теорема о вложении пространства $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, $s = n/p \in \mathbb{N}$, в соответствующее пространство Орлича [8]. В этом же случае $q = \infty$ аналогом вложения (21) является вложение $W_p^1(G)$ в пространство Лоренца–Зигмунда

$$\dot{W}_p^1(G) \subset L_{\infty p}(\log L)^{-1}(G), \quad p = n, \quad (22)$$

где G – область в $\mathbb{R}^n$ с конечной мерой $|G|$, а $\dot{W}_n^1(G)$ – подпространство пространства функций из $W_n^1(G)$, обращающихся в нуль на ∂G [9]. Принадлежность функции f пространству $L_{\infty p}(\log L)^{-1}(G)$ Лоренца–Зигмунда характеризуется конечностью квазинормы

$$\|f \mid L_{\infty p}(\log L)^{-1}(G)\| = \int_0^{|G|} \left[\frac{f^*(t)}{\ln(1 + |G|/t)} \right]^p \frac{dt}{t} < \infty.$$

Для случая функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, соответствующую квазинорму можно ввести в виде

$$\|f \mid L_{\infty p}(\log L)^{-1}(\mathbb{R}^n)\| = \int_0^\infty \left[\frac{f^*(t)}{1 + |\ln t|} \right]^p \frac{dt}{t}.$$

Вложение (22) усиливает упомянутое вложение в пространство Орлича. Относительно вложений (21), (22) см. также [10], [11].

Для сравнения вложения (3) с вложениями (21), (22) необходимо выяснить соотношение между пространствами $B_{pq}^{0,r}$ и L_{pq} при $(1 < q < p < \infty)$ и соотношение между пространствами $B_{\infty q}^{0,r}$ и $L_{\infty q}(\log L)^{-1}$. Автору известен лишь частный результат: недавно А. И. Тюленевым установлено (устное сообщение), что $B_{pq}^{0,1} \subset L_{pq}$ при $1 < q = p < \infty$.

Мы установим ниже вложения $B_{pq}^{0,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_{pq}$ при $1 \leq p, q < \infty$ и $B_{\infty q}^{0,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset L_{\infty q}(\log L)^{-1}(\mathbb{R}^n)$, используя результаты работы [12] Коляды. Будем пользоваться далее обозначениями

$$Q_h(x) = x + [-h, h]^n, \quad Q_h = Q_h(0).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\tau \in (0, \infty)$, $(2h)^n = 2\tau$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \text{loc})$,

$$E_\tau := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > f^*(\tau)\}, \quad |E_\tau| = \tau,$$

$$N_p(f, h) := \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{E_\tau} \int_{Q_h} |f(x) - f(x+y)|^p dy dx \right\}^{1/p}.$$

Тогда при $0 < \eta < T < \infty$

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\eta f^*(t) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t) dt + \int_\eta^T \tau^{-1/p} N_p(f, h) \frac{d\tau}{\tau} \quad (23)$$

или (в иной записи)

$$f^{**}(\eta) \leq f^{**}(T) + \int_\eta^T \tau^{-1/p} N_p(f, h) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема по существу установлена Колядой [12] в периодическом случае при $1 \leq p < \infty$. Здесь она приведена в несколько измененном варианте, дающим возможность перейти к оценкам для перестановок функции f через $\|\delta(h, p)f\|_p$ (уточняющим оценки через модули непрерывности и охватывающем случай $p = \infty$. Без ограничения общности будем считать, что $f \geq 0$. Пусть сначала $1 \leq p < \infty$). Положим

$$Q_h(x)_\tau = Q_h(x) \setminus E_\tau = \{y \in Q_h(x) : f(y) \leq f^*(\tau)\}, \quad |Q_h(x)_\tau| \geq \tau.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [f^*(t) - f^*(\tau)]^p dt &= \int_{E_\tau} [f(x) - f^*(\tau)]^p dx \\ &\leq \int_{E_\tau} \left[f(x) - \frac{1}{|Q_h(x)_\tau|} \int_{Q_{h,\tau}(x)} f(y) dy \right]^p dx \\ &\leq \int_{E_\tau} \left[\frac{1}{|Q_h(x)_\tau|} \int_{Q_{h,\tau}(x)} |f(x) - f(y)| dy \right]^p dx \leq N_p(f, h)^p, \end{aligned}$$

откуда с помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau f^*(t) dt \leq \left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau f^*(t)^p dt \right]^{1/p} \leq f^*(\tau) + \tau^{-1/p} N_p(f, h). \quad (25)$$

Отсюда при $0 < \eta < T < \infty$

$$\int_\eta^T \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau f^*(t) dt d\tau \leq \int_\eta^T f^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \int_\eta^T \tau^{-1/p} N_p(f, h) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (26)$$

Преобразуем левую часть (26), изменив порядок интегрирования:

$$\int_\eta^T \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau f^*(t) dt d\tau = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f^*(t) dt + \int_\eta^T \frac{f^*(t)}{t} dt - \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t) dt. \quad (27)$$

Из (26), (27) следует (23). Этим доказано утверждение теоремы при $1 \leq p < \infty$. С помощью предельного перехода в (23) при $p \rightarrow \infty$ получаем, что это неравенство остается справедливым и при $p = \infty$. Теорема доказана.

Переходя в (23) к пределу по $T \rightarrow \infty$ и считая, что $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, $f^{**}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, получаем оценку

$$f^{**}(\eta) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f^*(t) dt \leq \int_\eta^\infty \tau^{-1/p} N_p(f, h) \frac{d\tau}{\tau} \quad \text{при} \quad (2h)^n = 2\tau, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (28)$$

Отметим еще, что при $1 \leq p \leq \infty$

$$N_p(f, h) \leq \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{Q_h} |f(x) - f(x+y)|^p dy dx \right\}^{1/p} \leq 2^{(2n+1)/p} \|\delta(2h, p)f\|_p. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $f \in b_{pq}^{0,p}$, $f^{**}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех функций $f \in b_{pq}^{0,p}$, $f^{**}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, выполнено

$$\left\{ \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq C \left\{ \int_0^\infty \|\delta(h, p)f\|_p^q \frac{dh}{h} \right\}^{1/q}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (28), (29) получаем, очевидно, что при $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned} f^{**}(\eta) &= \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f^*(t) dt \\ &\leq 2^{(2n+1)/p} \int_\eta^\infty \tau^{-1/p} \|\delta(2h, p)f\|_p \frac{d\tau}{\tau} \quad \text{при} \quad (2h)^n = 2\tau, \quad 0 < \eta < \infty. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда

$$\left\{ \int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \leq \left\{ \int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} \\ \leq C_1 \left\{ \int_0^\infty \left[t^{1/p} \int_t^\infty \tau^{-1-1/p} \|\delta(2h, p)f\|_p d\tau \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad (2h)^n = 2\tau.$$

Применяя неравенство Харди, приходим к (30).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, $0 < T < \infty$. Тогда

$$\left\{ \int_0^T \left[\frac{f^*(t)}{1 + |\ln t|} \right]^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} \leq A f^{**}(T) + C_T \left\{ \int_0^T \|\delta(2h, \infty)f\|_\infty^p \frac{d\tau}{\tau} \right\}^{1/p} \\ \leq A f^{**}(T) + C'_T \|f\|_{b_{\infty p}^{0, \infty}(\mathbb{R}^n)},$$

где

$$A = \int_0^\infty \frac{dt}{t(1 + |\ln t|)^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (23) и (29) имеем

$$\left\{ \int_0^T \left[\frac{f^*(t)}{1 + |\ln t|} \right]^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} \\ \leq \left\{ \frac{1}{(1 + |\ln t|)^p} \left[f^{**}(T) + C \int_t^T \|\delta(2h, \infty)f\|_\infty \right]^p \frac{d\tau}{\tau} \right\}^{1/p}, \quad (2h)^n = 2\tau. \quad (32)$$

Для дальнейшей оценки воспользуемся весовым неравенством Харди, утверждающим, что при $u, v \geq 0$, $0 \leq T \leq \infty$ из условия

$$\sup_{0 < \xi < T} \left(\int_0^\xi u(t) dt \right)^{1/p} \left(\int_\xi^T v(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} = C_T < \infty \quad (33)$$

следует, что для любой измеримой на $(0, T)$ функции $F \geq 0$

$$\left(\int_0^T (F(\tau) d\tau)^p u(t) dt \right)^{1/p} \leq p^{1/p} (p')^{1/p'} C_T \left(\int_0^T F(t)^p v(t) dt \right)^{1/p}$$

(результат Макенхаупта [13], см. также [14]).

В нашем случае

$$F(t) = t^{-1} \|\delta(h, \infty)f\|_\infty \quad \text{при} \quad (2h)^n = 2t, \quad u(t) = t^{-1} (1 + |\ln t|)^{-p}, \quad v(t) = t^{p-1}.$$

При этом левая часть (33) с точностью до числового множителя равна

$$\sup_{0 < \xi < T} (1 + |\ln \xi|)^{-1/p'} \left(\ln \frac{T}{\xi} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Следовательно,

$$\left\{ \int_0^T \left[\frac{f^*(t)}{1 + |\ln t|} \right]^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} \leq A f^{**}(T) + C_T \left\{ \int_0^T \|\delta(h, \infty)f\|_\infty^p \frac{d\tau}{\tau} \right\}^{1/p},$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Вложения в теоремах 4, 5 являются строгими (т.е. не являются равенствами), что показано в лемме 2 из [2].

Применим использованные выше методы к доказательству принадлежности пространству функций нулевой гладкости в L_q интегралов типа потенциала, имеющих вид

$$I_s(x) = \int \frac{k(x, y)}{|x - y|^{n-s}} f(y) dy, \quad 0 < s < n, \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad (34)$$

где функция $k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема по x на $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, функции k , $|\text{grad}_x k(x, y)|$ локально суммируемы по y на $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ и

$$|k(x, y)| \leq C, \quad |\text{grad}_x k(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|} \quad \text{при } x \neq y. \quad (35)$$

Примерами таких интегралов типа потенциала являются потенциалы Рисса и Бесселя:

$$\int \frac{f(y)}{|x - y|^{n-s}} dy, \quad \int G_s(x - y) f(y) dy,$$

где $G_s(\xi) = F^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-s/2})$, F – преобразование Фурье. Будем считать, что

$$1 < p < r < q \leq \infty, \quad s = \frac{n}{p} - \frac{n}{q} > 0. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, потенциал (34) обладает сформулированными выше свойствами и выполнены условия (36).

Тогда $I_s \in b_{qp}^{0,r}(\mathbb{R}^n)$, причем существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|I_s\|_{b_{qp}^{0,r}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{для всех } f \in L_p(\mathbb{R}^n). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартное разбиение единицы на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, построенное следующим образом. Пусть функция $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \bar{\varphi} \subset \{x : |x| \leq 2\}$, $\bar{\varphi}(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Пусть $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(2x)$.

Тогда

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^j}\right) = 1 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln 2} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} &= \int_{-\infty}^\infty \varphi\left(\frac{x}{2^u}\right) du = \sum_{j=-\infty}^\infty \int_j^{j+1} \varphi\left(\frac{x}{2^u}\right) du \\ &= \int_0^1 \sum_{j=-\infty}^\infty \varphi\left(\frac{2^{-v}x}{2^j}\right) dv = \int_0^1 1 dv = 1. \end{aligned}$$

Представим интеграл (34) при $h > 0$ в виде

$$\begin{aligned} I_s(x) &= \frac{1}{\ln 2} \int \left(\int_0^h + \int_h^\infty \right) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) |x-y|^{s-n} k(x, y) t^{-1} f(y) dt dy \\ &=: F(x, h) + G(x, h). \end{aligned} \quad (38)$$

В силу (35) и оценки

$$\frac{1}{\ln 2} \left| \int_0^h \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right| \leq C_1 \chi\left(\frac{x}{2h}\right)$$

имеем

$$|F(x, h)| \leq C_2 \int_{|x-y| < 2h} |x-y|^{s-n} |f(y)| dy.$$

Применяя лемму 2, получаем, что

$$\left\{ \int_0^\infty \|\delta(h, r) F(x, h)\|_q^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \leq C_r \|f\|_p. \quad (39)$$

Оценим градиент ядра в интеграле $G(x, h)$, положив $\psi(x) = \varphi(x)|x|^{s-n}$, $\psi \in C_0^\infty$, $\text{supp } \psi \subset \{x : 1/2 \leq |x| \leq 2\}$:

$$\begin{aligned} & \left| \text{grad}_x \left[\psi\left(\frac{x-y}{t}\right) k(x, y) t^{s-n-2} \right] \right| \\ & \leq C \left[\left| \text{grad}_x \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| t^{s-n-2} + \left| \psi\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| |\text{grad}_x k(x, y)| t^{s-n-1} \right] \\ & \leq C_1 t^{s-n-2} \left| \chi\left(\frac{x-y}{2t}\right) - \chi\left(\frac{2(x-y)}{t}\right) \right|. \end{aligned}$$

Применяя к $G(x, h)$ оценку (9), имеем

$$\begin{aligned} \delta(h, r) G(x, h) & \leq Ch \int \int_h^\infty t^{s-n-2} \chi\left(\frac{x-y}{2t+h}\right) |f(y)| dt dy \\ & \leq C_1 h \int (|x-y| + h)^{s-n-1} |f(y)| dy = h \bar{B}(h) f(x). \end{aligned}$$

Учитывая оценку (16) оператора $\bar{B}$, имеем

$$\left\{ \int_0^\infty \|\delta(h, r) G(\cdot, h)\|_q^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \leq C_r \|f\|_p.$$

Последняя оценка вместе с оценкой (39) приводит к завершению доказательства теоремы 6.

Результаты этой работы были доложены на конференции “Spectral Theory and Differential Equations”, Москва, МГУ, июнь 2014 г.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415–426.
- [2] A. Gogatishvili, P. Koskela, Y. Zhou, “Characterization of Besov and Triebel–Lizorkin spaces on metric measure spaces”, *Forum Math.*, **25**:4 (2013), 787–819.
- [3] О. В. Бесов, “К теореме вложения Соболева для предельного показателя”, *Функциональные пространства и смежные вопросы анализа*, Тр. МИАН, **284**, МАИК, М., 2014, 89–104.

- [4] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.
- [5] В. И. Коляда, “О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 12*, Тр. МИАН СССР, **181**, Наука, М., 1988, 117–136.
- [6] R. O’Neil, “Convolution operators in $L(p, q)$ spaces”, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 129–142.
- [7] J. Peetre, “Espaces d’interpolation et théorème de Soboleff”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **16**:1 (1966), 279–317.
- [8] В. И. Юдович, “О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **138**:4 (1961), 805–808.
- [9] K. Hansson, “Imbedding theorems of Sobolev type in potential theory”, *Math. Scand.*, **45**:1 (1979), 77–102.
- [10] A. Cianchi, “Optimal Orlicz–Sobolev embeddings”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **20**:2 (2004), 427–474.
- [11] H. Triebel, *The Structure of Functions*, Monogr. Math., **97**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [12] В. И. Коляда, “Оценки перестановок и теоремы вложения”, *Матем. сб.*, **136**:1 (1988), 3–23.
- [13] B. Muckenhoupt, “Hardy’s inequalities with weights”, *Studia Math.*, **44** (1972), 31–38.
- [14] A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson, *The Hardy Inequality. About Its History and Some Related Results*, Vydavatelský Servis, Pilsen, 2007.

О. В. Бесов

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: besov@mi.ras.ru

Поступило
15.01.2015