Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Грешнов, М. В. Трямкин, Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$ -квазиметрик на канонических группах Карно, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 635–639

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:10:44

Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$ -квазиметрик на канонических группах Карно

А. В. Грешнов, М. В. Трямкин

1. Введение. Неотрицательная функция d_X , определенная на декартовом произведении $X \times X$, где X – некоторое множество, называется (q_1, q_2) -квазиметрикой [1], если выполняются следующие условия:

- 1°) $d_X(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$ для всех $u, v \in X$ (аксиома тождества),
- 2°) $d_X(u, w) \leq q_1 d_X(u, v) + q_2 d_X(v, w)$ для всех $u, v, w \in X$, где $q_1, q_2 > 0$ – некоторые константы ((q_1, q_2) -обобщенное неравенство треугольника).

Пара (X, d_X) называется (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством. Если функция d_X дополнительно удовлетворяет условию $d_X(u, v) = d_X(v, u)$ для всех $u, v \in X$, то (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство называется симметрическим.

$(1, 1)$ -Квазиметрические пространства обычно называют просто квазиметрическими [2]. Возникновение концепции (q_1, q_2) -квазиметрических пространств было инициировано, в частности, интенсивным развитием геометрического анализа на пространствах Карно–Каратеодори (M, ρ_{cc}) , важным примером которых служат группы Карно, см. [3]. Напомним, что алгебра Ли V называется градуированной [4], если $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ и при этом

- $[V_i, V_k] \subset V_{i+k}$, если $i + k \leq r$;
- $[V_i, V_k] = \{0\}$, если $i + k > r$.

r -Ступенчатая стратифицированная [5] алгебра Ли V – это нильпотентная степени r алгебра Ли, обладающая стратификацией, т.е.

$$V = \bigoplus_{i=1}^r V_i, \quad V_{i+1} = [V_1, V_i], \quad [V_1, V_r] = \{0\}.$$

Алгеброй Карно [6] называется градуированная стратифицированная алгебра Ли; группа Ли G , соответствующая алгебре Карно, называется группой Карно. Расстояние Карно–Каратеодори [7] $\rho_{cc}(u, v)$ для любых двух точек $u, v \in G$ определяется как точная нижняя грань длин всех путей $\gamma(t): [0, t_0] \rightarrow G$ таких, что $\dot{\gamma}(t) \in V_1(\gamma(t))$ для почти всех t (здесь длина пути измеряется при помощи стандартного риманова скалярного произведения).

Метрика Карно–Каратеодори малоприспособлена для вычислений, поэтому для получения тех или иных оценок обычно используют некоторую эквивалентную ей (q, q) -квазиметрику, например, Вох-квазиметрику d_G , см., например, [3], [8], [9], которая определяется здесь следующим образом. Пусть

$$N = \dim V = \sum_{i=1}^r n_i, \quad n_i = \dim V_i,$$

и базис левоинвариантных векторных полей $\{X_1, \dots, X_N\}$ группы Карно G упорядочен таким образом, что значения первых n_1 из них в каждой точке $v \in G$ образуют базис подпространства $V_1(v)$, значения следующих n_2 из них в каждой точке $v \in G$ образуют базис

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029).

DOI: 10.4213/mzm10825

© А. В. Грешнов, М. В. Трямкин, 2015

подпространства $V_2(v)$, и т. д. Каждому векторному полю X_k сопоставим натуральное число $j = \deg X_k$, определяемое по включению $X_k \in V_j$. Тогда

$$d_G(u, w) = \max\{|a_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1, \dots, N\}, \quad \text{где } w = \exp\left(\sum_{i=1}^N a_i X_i\right)(u).$$

Известно, что функция d_G является симметрической $(1, q_2)$ -квазиметрикой, см., например, [10]. Теорема Ball-Vox об эквивалентности метрики Карно–Каратеодори и Vox-квазиметрики была доказана в [9] в геометрии гладких векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера; обобщение теоремы Ball-Vox см. в [3]. Симметрические $(1, q_2)$ -квазиметрики, подобные d_G , находят широкое применение на общих пространствах Карно–Каратеодори, см., например, [3], [8], [9]. Настоящая заметка посвящена отысканию точных (неулучшаемых) значений константы q_2 для Vox-квазиметрик некоторых канонических групп [11] (или групп алгебр [12]) Карно $\mathbb{G}$. Под канонической конечномерной группой Ли мы подразумеваем такую группу Ли, стандартное экспоненциальное отображение $\exp$ которой является тождественным. Таким образом, каноническую группу Карно $\mathbb{G}$ можно рассматривать как стандартное пространство $\mathbb{R}^N$ соответствующей размерности, на котором задана соответствующая таблица коммутаторов

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^N C_{ij}^k e_k,$$

используя которую умножение двух произвольных элементов

$$x = \sum_{k=1}^N x_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^N y_k e_k \in \mathbb{G}$$

(левый сдвиг элемента y на элемент x) определяют по формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$L_x y = x \cdot y = \sum_{k=1}^N f_k(x, y) e_k;$$

точка 0 (начало координат) является единицей канонической группы. Отметим, что функция $d_G(u, w)$ инвариантна относительно левых сдвигов $d_G(u, w) = d_G(L_x u, L_x w)$ и группы растяжений

$$d_G(\delta_t u, \delta_t w) = |t| d_G(u, w), \quad \text{где } \delta_t u = (t^{\deg X_i} u_i)_{i=1, \dots, N}.$$

Задача о нахождении точных констант в обобщенном неравенстве треугольника для Vox-квазиметрик на нильпотентных группах ранее не рассматривалась.

2. Основные результаты. Ниже мы вычисляем точные (неулучшаемые) значения константы q_2 для Vox-квазиметрик канонических групп $\mathbb{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, которые определяются, см. [13], в стандартном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ при помощи таблицы коммутаторов

$$[e_i, e_{n+i}] = \alpha_i e_{2n+1}, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и их важных частных случаев – одномерной $\mathbb{H}_\alpha^1$ ($n = 1$) и n -мерной $\mathbb{H}_\alpha^n$ ($\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$) групп Гейзенберга, а также для канонических групп Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$, которые определяются в стандартном пространстве $\mathbb{R}^4$ при помощи таблицы коммутаторов

$$[e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad [e_1, e_3] = \beta e_4, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Для решения поставленной задачи для любой тройки точек $u, v, w \in \mathbb{G}$ нам необходимо найти число $q = q(u, v, w)$ такое, что

$$d_G(u, w) = d_G(u, v) + q d_G(v, w),$$

и тогда

$$q_2 = \sup_{u,v,w \in \mathbb{G}} q(u, v, w).$$

Но, учитывая инвариантность $(1, q_2)$ -квазиметрики $d_{\mathbb{G}}$ относительно левого сдвига и группы растяжений, нам достаточно рассматривать только такие тройки точек u, v, w , где $u = 0$, $d_{\mathbb{G}}(0, v) = 1$, $w = v \cdot \delta_{\varepsilon} w'$, $d_{\mathbb{G}}(0, w') = 1$, $\varepsilon > 0$, и, соответственно, искать $q = q(0, v, w)$ из равенства

$$d_{\mathbb{G}}(0, w) = d_{\mathbb{G}}(0, v) + q d_{\mathbb{G}}(v, w) = 1 + q\varepsilon.$$

Пусть

$$S_{\mathbb{G}}(0, 1) = \{x \in \mathbb{G} \mid d_{\mathbb{G}}(0, x) = 1\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для канонической группы Гейзенберга $\mathbb{H}_{\alpha}^1$*

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \alpha \leq 2, \\ \frac{\alpha}{2}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$v = (x, y, t) \in S_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}(0, 1), \quad w' = (x', y', t') \in S_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}(0, 1).$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа, мы имеем

$$\begin{aligned} w &= v \cdot \delta_{\varepsilon} w' = (x, y, t) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t') \\ &= \left(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha \varepsilon}{2} (y'x - yx') \right) = \sum_{i=1}^3 f_i(v, \delta_{\varepsilon} w') e_i. \end{aligned}$$

Пусть $f(v, w') = y'x - yx'$. Понятно, что $|y'x - yx'| \leq 2$ и

$$\max_{v, w' \in S_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}(0, 1)} f(v, w') = 2 \quad \text{при} \quad v = (1, 1, t), \quad w' = (-1, 1, t').$$

Тогда для всех $v, w' \in S_{\mathbb{H}_{\alpha}^1}(0, 1)$, $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$|f_1(v, \delta_{\varepsilon} w')| \leq 1 + \varepsilon, \quad |f_2(v, \delta_{\varepsilon} w')| \leq 1 + \varepsilon, \quad |f_3(v, \delta_{\varepsilon} w')| \leq 1 + \alpha \varepsilon + \varepsilon^2,$$

причем

$$f_3(v, \delta_{\varepsilon} w') = 1 + \alpha \varepsilon + \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad v = (1, 1, 1), \quad w' = (-1, 1, 1).$$

Несложно видеть, что если $\alpha \leq 2$, то всегда $1 + \alpha \varepsilon + \varepsilon^2 \leq (1 + \varepsilon)^2$; если же $\alpha > 2$, то для того, чтобы для всех $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка $1 + \alpha \varepsilon + \varepsilon^2 \leq (1 + q_2 \varepsilon)^2$, необходимо и достаточно, чтобы $q_2 \geq \alpha/2$.

ТЕОРЕМА 2. *Для канонической группы*

$$\mathbb{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, \quad \alpha_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

выполнено

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \alpha_0 \leq 2, \\ \frac{\alpha_0}{2}, & \alpha_0 > 2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$v = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t), \quad w' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, t'),$$

$$d_{\mathbb{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}(0, v) = d_{\mathbb{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}(0, w') = 1.$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа, мы имеем

$$w = v \cdot \delta_\varepsilon w' = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \cdot (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, t') = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i(v, \delta_\varepsilon w') e_i$$

$$= \left(x_1 + \varepsilon x'_1, \dots, x_n + \varepsilon x'_n, y_1 + \varepsilon y'_1, \dots, y_n + \varepsilon y'_n, t + \varepsilon^2 t' + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i y'_i - y_i x'_i) \right).$$

Рассуждая, как и в теореме 1, найдем минимальные и максимальные значения функций $g_i(v, \delta_\varepsilon w')$, $v, w' \in S_{\mathbb{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}(0, 1)$, для каждого $\varepsilon > 0$, после чего для определения точных значений константы q_2 нам остается сравнить выражения $1 + \varepsilon^2 + \alpha_0 \varepsilon$ и $(1 + q_2 \varepsilon)^2$ при всех $\varepsilon > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для канонической группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^n$

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \frac{2}{n}, \\ \frac{\alpha n}{2}, & \alpha > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3. Для канонической группы Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}$

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \max \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} \right\} \leq 1, \\ \max \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} \right\}, & \max \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha\beta}{18} \right\} > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = (x, y, t, z)$, $w' = (x', y', t', z')$. Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа, мы имеем

$$w = v \cdot \delta_\varepsilon w' = (x, y, t, z) \cdot (\varepsilon x', \varepsilon y', \varepsilon^2 t', \varepsilon^3 z') = \sum_{i=1}^4 h_i(v, \delta_\varepsilon w') e_i$$

$$= \left(x + \varepsilon x', y + \varepsilon y', t + \varepsilon^2 t' + \frac{\alpha\varepsilon}{2} (xy' - x'y), \right.$$

$$\left. z + \varepsilon^3 z' + \frac{\beta\varepsilon}{2} (x\varepsilon t' - x't) + \frac{\alpha\beta\varepsilon}{12} (x - x'\varepsilon)(xy' - x'y) \right).$$

Для всех $u, w' \in S_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(0, 1)$, $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$|h_1(v, \delta_\varepsilon w')| \leq 1 + \varepsilon, \quad |h_2(v, \delta_\varepsilon w')| \leq 1 + \varepsilon, \quad |h_3(v, \delta_\varepsilon w')| \leq 1 + \alpha\varepsilon + \varepsilon^2,$$

$$|h_4(v, \delta_\varepsilon w')| \leq 1 + \varepsilon^3 + \frac{\beta\varepsilon(1 + \varepsilon)}{2} + \frac{\alpha\beta\varepsilon(1 + \varepsilon)}{6}.$$

Несложно видеть, что

$$\max_{u, w' \in S_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(0, 1)} h_4(v, \delta_\varepsilon w') = 1 + \varepsilon \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{6} \right) + \varepsilon^3,$$

$$\max_{u, w' \in S_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(0, 1)} h_3(v, \delta_\varepsilon w') = 1 + \varepsilon^2 + \alpha\varepsilon$$

при $v = (1, 1, 1, 1)$, $w' = (-1, 1, 1, 1)$. Если $\beta/6 + \alpha\beta/18 \leq 1$, то

$$\max_{u, w' \in S_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(0, 1)} h_4(v, \delta_\varepsilon w') \leq (1 + \varepsilon)^3 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Если же $\beta/6 + \alpha\beta/18 > 1$, то для того, чтобы для всех $\varepsilon > 0$ выполнялась оценка

$$\max_{u, w' \in S_{\mathbb{E}_{\alpha, \beta}}(0, 1)} h_4(v, \delta_\varepsilon w') \leq (1 + q_2\varepsilon)^3,$$

необходимо и достаточно, чтобы $q_2 \geq \beta/6 + \alpha\beta/18$. Точные значения параметра q_2 , при которых для всех $\varepsilon > 0$ выполняется оценка $|h_3(v, \delta_\varepsilon w')| \leq (1 + q_2\varepsilon)^2$, фактически уже получены в теореме 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Накрывающие отображения в квазиметрических пространствах и пространствах Карно–Каратеодори”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015 (в печати). [2] W. A. Wilson, *Amer. J. Math.*, **53**:3 (1931), 675–684. [3] M. Karmanova, S. Vodop'yanov, *Analysis and Mathematical Physics*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2009, 233–335. [4] L. P. Rothchild, E. S. Stein, *Acta Math.*, **137**:3-4 (1976), 247–320. [5] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub-Laplacian*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2007. [6] P. Pansu, *Ann. of Math.* (2), **129** (1989), 1–60. [7] M. Gromov, *Sub-Riemannian Geometry*, Progr. Math., **144**, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–323. [8] А. В. Грешнов, *Матем. тр.*, **14**:1 (2011), 70–98. [9] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, *Acta Math.*, **155**:1-2 (1985), 103–147. [10] А. В. Грешнов, *Матем. тр.*, **15**:2 (2012), 72–88. [11] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [12] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982. [13] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **43**:3-4 (2012), 355–388.

А. В. Грешнов

Новосибирский государственный университет;
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук, г. Новосибирск
E-mail: greshnov@math.nsc.ru

Поступило

02.04.2015

М. В. Трямкин

Новосибирский государственный университет;
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук, г. Новосибирск
E-mail: maxtryamkin@yandex.ru