Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Рубинштейн, О наилучшей сходимости рядов по системам $\varphi(nx)$, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 565–569

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:07:38

О наилучшей сходимости рядов по системам $\varphi(nx)$

А. И. Рубинштейн

Получены достаточные условия наилучшей сходимости в L_p рядов по системам $\varphi(nx)$, где $\varphi(x)$ – многочлены и ряды по тригонометрической системе и системе Уолша.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10826

Пусть $\{Q_k(x)\}$ – система функций банахова пространства B , определенных на отрезке $[a, b]$. Сходящийся в B к $f(x)$ ряд

$$\sum_{k \geq 1} a_k Q_k(x) \quad (1)$$

называется *наилучше сходящимся*, если при всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$\inf_{\{C_m\}_{m=1}^{\nu-1}} \left\| \sum_{m=1}^{\nu-1} C_m Q_m(x) + f(x) \right\| = \left\| \sum_{k \geq \nu} a_k Q_k(x) \right\|. \quad (2)$$

В [1] Бернштейн показал, что при выполнении условий

$$n_{k+1} = (2p_{k+1})n_k, \quad n_1 = 1, \quad p_k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

ряд

$$\sum_{k \geq 1} \rho_k \cos(n_k x + \alpha_k), \quad \rho_k > 0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

наилучше сходится в $C(0, 2\pi)$, причем если все $\alpha_k = 0$ (косинус-ряд с неотрицательными коэффициентами), то из наилучшей сходимости (4) (см. (2)) следует (3). Если $\alpha_k = \pm\pi/2$ (синус-ряд), то наилучшая сходимость (4) гарантируется условиями

$$n_{k+1} = q_k n_k, \quad 1 < q_k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

В [2] Стечкин показал, что для любого лакунарного ($n_{k+1} \geq \lambda n_k$, $\lambda > 1$) тригонометрического ряда (4)

$$E_n^{(\infty)}(f) \sim R_n^{(\infty)}(f) = \|f(x) - S_n(x, f)\|_\infty \sim A_n = \sum_{n_k > n} \rho_k.$$

Если же $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1}/n_k) = \infty$, то знаки $\sim$ заменяются на $\approx$ (эквивалентность бесконечно малых).

В [3] автор отметил, что при выполнении условий (3) или (5) ряд (4) наилучше сходится во всех $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$, если $\{\rho_k\} \in l_2$ и в $C(0, 2\pi)$, если $\{\rho_k\} \in l_1$.

Из результатов [4] можно получить, что наилучшая сходимость (4) при $\alpha_k = 0$ во всех $L_{2\mu}(0, 2\pi)$, $\mu \in \mathbb{N}$, влечет выполнение условий (3).

Бернштейн получал в [1] результаты с помощью теоремы о чебышевском альтернансе. В [3], [4] и в настоящей работе используется критерий наилучшего приближения суммы $f(x)$ ряда (1)

$$\int_0^{2\pi} Q_m(x) \left| \sum_{k \geq \nu} a_k Q_k(x) \right|^{p-1} \operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} a_k Q_k(x) \right) dx = 0, \quad m = 1, \dots, \nu - 1, \quad (6)$$

установленный для $p = 1$ в [5] Никольским, а для $p > 1$ – Зингером [6].

Имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. а) Пусть

$$\varphi(x) = T_{m_0}(x) \sin m_0 x,$$

где

$$T_{m_0}(x) = \sum_{m=0}^{m_0-1} a_m \cos mx > 0, \quad x \in [0, 2\pi), \quad a_m > 0.$$

Если $n_{k+1} = q_k n_k$, $n_1 = 1$, $2 < q_k \in \mathbb{N}$ и $\sum_{k \geq 1} |A_k| < \infty$, то ряд

$$\sum_{k \geq 1} A_k \varphi(n_k x) \quad (7)$$

наилучше сходится во всех $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$ ($L_\infty = C$).

б) Пусть

$$\varphi(x) = T_{m_0}(x) \cos(2m_0 + 1)x,$$

где

$$T_{m_0}(x) = \sum_{0 \leq 2m \leq m_0} a_m \cos 2mx > 0, \quad x \in [0, 2\pi), \quad a_m > 0.$$

Если $n_{k+1} = (2p_k + 1)n_k$, $n_1 = 1$, $p_k \in \mathbb{N}$ и $\sum_{k \geq 1} |A_k| < \infty$, то ряд (7) наилучше сходится во всех $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Очевидно, что $\varphi(n_k x)$ и $\varphi(n_{k+1} x)$, $k \in \mathbb{N}$, не содержат тригонометрических функций равных частот.

В случае а)

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x) = -\varphi(x + \pi),$$

так что для

$$f_{\nu,p}(x) = \left| \sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(n_k x) \right|^{p-1} \operatorname{sgn} \left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(n_k x) \right)$$

имеем

$$f_{\nu,p}\left(x + \frac{2\pi}{n_\nu}\right) = f_{\nu,p}(x), \quad f_{\nu,p}\left(\frac{\pi}{n_\nu} + t\right) = -f_{\nu,p}\left(\frac{\pi}{n_\nu} - t\right);$$

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi\left(n_k\left(\frac{\pi}{n_\nu} + t\right)\right)\right) = -\operatorname{sgn}\left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi\left(n_k\left(\frac{\pi}{n_\nu} - t\right)\right)\right),$$

откуда

$$f_{\nu,p}(x) = \sum_{s \geq 1} B_s \sin n_\nu s x$$

и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(n_m x) f_{\nu,p}(x) dx = 0, \quad m = 1, \dots, \nu - 1.$$

Следовательно по критерию Никольского–Зингера ряд (7) в случае а) наилучше сходится в $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$. По непрерывности нормы при $p \rightarrow \infty$ наилучшая сходимость ряда (7) имеет место и при $p = \infty$ (в $C(0, 2\pi)$).

В случае б)

$$f_{\nu,p}\left(x + \frac{2\pi}{n_\nu}\right) = f_{\nu,p}(x) = -f_{\nu,p}\left(x + \frac{\pi}{n_\nu}\right),$$

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi\left(n_k\left(x + \frac{\pi}{n_\nu}\right)\right)\right) = -\operatorname{sgn}\left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(n_k x)\right)$$

и выполнен критерий Никольского–Зингера.

Естественным представляется вопрос: существуют ли $\varphi(x)$, являющаяся суммой тригонометрического ряда, такая, что для некоторых $\{n_k\}$ ряд (7) наилучше сходится в каком-либо пространстве? Ответ дает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для

$$\varphi(x) = \sum_{s \geq 1} a_s \cos 3^{s-1} x, \quad a_s > 0, \quad \sum_{s \geq 1} a_s < \infty,$$

ряд

$$\sum_{k \geq 1} A_k \varphi(5^{k-1} x), \quad A_k > 0, \quad \sum_{k \geq 1} A_k < \infty, \quad (8)$$

наилучше сходится во всех $L_{2\mu}(0, 2\pi)$, $\mu \in \mathbb{N}$ и в $L_\infty = C$.

Вообще, наилучшая сходимость в $L_n(0, 2\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, рассматривалась в [7] и выяснилось, что случаи $n = 2\mu$ и $n = 2\mu - 1$ существенно отличаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пр продемонстрируем справедливость утверждения 2. Действительно,

$$\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(5^{k-1} x) = \sum_{k \geq \nu} A_k \sum_{s \geq 1} a_s \cos 5^{k-1} 3^{s-1} x = \sum_{l \geq 1} B_l \cos 5^{\nu-1} (2l-1)x, \quad B_l > 0.$$

Так как для $p = 2\mu$

$$\left| \sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(5^{k-1} x) \right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(5^{k-1} x)\right) = \left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(5^{k-1} x)\right)^{2\mu-1}$$

и последняя сумма содержит лишь косинусы частот

$$5^{\nu-1}(\pm(2l_1 - 1) \pm (2l_2 - 1) \pm \cdots \pm (2l_{2\mu-1} - 1)) = 5^{\nu-1}(2L - 1).$$

В то же время $\varphi(5^{m-1}x)$ при $m \leq \nu - 1$ есть сумма косинусов частот $5^{m-1} \cdot 3^{s-1}$. Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \varphi(5^{m-1}x) \left(\sum_{k \geq \nu} A_k \varphi(5^{k-1}x) \right)^{2\mu-1} dx = 0, \quad m = 1, \dots, \nu - 1, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

и по критерию Никольского–Зингера справедливо утверждение 2 для $L_{2\mu}(0, 2\pi)$, $\mu \in \mathbb{N}$. По непрерывности нормы при $\mu \rightarrow \infty$ ряд (8) наилучше сходится и в $L_\infty = C(0, 2\pi)$.

Легко понять, что в утверждении 2 вместо чисел 3 и 5 можно взять любые два взаимнопростых числа.

Рассмотрим вместо тригонометрической системы систему Уолша–Пэли $\{w_m(x)\}$. Наилучшая сходимость рядов Уолша–Пэли изучалась автором в работах [7], [8]. Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{2^{m_0}-1} a_m w_m(x),$$

где a_m таковы, что при $t \in [0, 2^{-1}]$ $\varphi(2^{-1} + t) = -\varphi(2^{-1} - t)$, а возрастающая последовательность номеров n_k удовлетворяет условиям $n_k - n_{k-1} > m_0$, $n_0 = 1$. Тогда ряд

$$\sum_{k \geq 1} A_k \varphi(2^{n_{k-1}}x), \quad \sum_{k \geq 1} |A_k| < \infty,$$

наилучше сходится во всех $L_p(0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения 3 практически аналогично доказательству утверждения 1 а).

В утверждении 3 можно взять $\varphi(x) = w_1(x)$ и $n_k = 2^{k-1}$.

В [8] было показано, что если $2^{k-1} \leq n_k < 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, то ряд

$$\sum_{k \geq 1} a_k w_{n_k}(x) \tag{9}$$

наилучше сходится во всех $L_p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, при $\{a_k\} \in \ell_2$ и в $L_\infty(0, 1)$ при $\{a_k\} \in \ell_1$.

Имеет место и

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для

$$\varphi(x) = \sum_{s \geq 1} a_s w_{2^{m_s}}(x), \quad m_s = 3^{s-1}, \quad a_s > 0, \quad \sum_{s \geq 1} a_s < \infty,$$

ряд

$$\sum_{k \geq 1} A_k \varphi(2^{n_k}x), \quad n_k = 5^{k-1}, \quad A_k > 0, \quad \sum_{k \geq 1} A_k < \infty,$$

наилучше сходится во всех $L_{2\mu}(0, 1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, и в $L_\infty(0, 1)$.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_{2^\mu}\}$. На X естественным образом можно определить 2^μ функций $\{w_n^{(d)}(x_j)\}$, аналогичных первым 2^μ функциям Уолша–Пэли. Существуют полиномы $\varphi(x)$, $x \in X$, из аналогов функций Уолша–Пэли и конечный набор номеров $\{n_k\}$ такие, что

$$\sum_{t=1}^T c_t w^{(d)}(n_t x_j)$$

наилучше сходятся в $L_p(X)$ для $1 \leq p \leq \infty$.

Доказательство – дословное повторение доказательства утверждения 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн, “О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье”, *Труды Ленинградского индустриального института. Сер. 3. Физ.-матем. науки*, **10:3** (1936), 3–8.
- [2] С. Б. Стечкин, “Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами”, *Докл. АН СССР*, **76** (1951), 33–36.
- [3] А. И. Рубинштейн, “О наилучше сходящихся рядах”, Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа, **1**, № 2, Тбилиси, 1985, 114–117.
- [4] А. И. Рубинштейн, “О наилучше сходящихся $L_p[0, 2\pi]$ рядах”, *Матем. заметки*, **52:6** (1992), 100–108.
- [5] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10:3** (1946), 207–256.
- [6] I. Zinger, “Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque”, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), 181–189.
- [7] А. И. Рубинштейн, “О наилучшей сходимости”, *Матем. сб.*, **192:2** (2001), 119–138.
- [8] А. И. Рубинштейн, “О модулях непрерывности и наилучших приближениях в L_p функций, представимых лакунарными рядами Уолша”, *Изв. вузов. Матем.*, 1983, № 5, 61–68.

А. И. Рубинштейн

E-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Поступило

21.03.2015