Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Басалаев, Простое доказательство теоремы о лифтинге векторных полей, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 626–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:26:24

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Простое доказательство теоремы о лифтинге векторных полей

С. Г. Басалаев

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — набор вещественных векторных полей в окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^N$ класса C^{r-1} , $r \geq 1$. Для каждого мультииндекса $I = (i_1, \dots, i_k)$, где $1 \leq i_l \leq n$, $l = 1, \dots, k$, определим порядок $|I| = k$. С каждым мультииндексом I , $|I| = k \leq r$, ассоциируем дифференциальный оператор k -го порядка $X_I = X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k}$ и итерированный коммутатор

$$X_{[I]} = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]],$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли. При этом операторы X_I и $X_{[I]}$ принадлежат классу гладкости $C^{r-|I|}$. Заметим, что каждый коммутатор $X_{[I]}$ можно представить в виде линейной комбинации операторов порядка $|I|$:

$$X_{[I]} = \sum_{|J|=|I|} A_{IJ} X_J,$$

где A_{IJ} — универсальные комбинаторные постоянные. Дадим классическое определение свободных векторных полей, введенное в [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторные поля $X_1, \dots, X_n$ называются *свободными до порядка $s \leq r$* в нуле, если для любого набора постоянных $\{a_I : |I| \leq s\}$ тождество $\sum_{|I| \leq s} a_I X_I(0) \equiv 0$ влечет $\sum_{|I| \leq s} a_I A_{IJ} = 0$ для всех J .

Неформально это определение означает, что нет никаких соотношений между векторными полями и их коммутаторами, кроме естественно возникающих для скобки Ли (антисимметричность, тождество Якоби).

В статье [1] доказано, что семейство гладких векторных полей $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющих условию Хёрмандера (т.е. таких, что $\text{span}\{X_I(x) : |I| \leq r\} = T_x U$ для всех $x \in U$), можно продолжить до семейства векторных полей

$$\tilde{X}_i(x, t) = X_i(x) + \sum_{j=1}^m u_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial t_j},$$

определенных в окрестности нуля $U \times V \subset \mathbb{R}^{N+m}$ так, что поля $\tilde{X}_i$ свободны до порядка r . Данная конструкция называется *поднятием* или *лифтингом* векторных полей. Здесь u_{ij} — некоторые гладкие функции. Однако в силу трудоемкости доказательства в [1] вычислить явно эти u_{ij} не представляется возможным. В статье [2] предложен конструктивный подход к построению поднятых векторных полей: к векторным полям пошагово добавляется по

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00552) и программы “Ведущие научные школы” (проект № НШ-2263.2014.1).

DOI: 10.4213/mzm10827

одной переменной, а функции u_{ij} выражаются в виде многочленов. Эта итерационная процедура повторена в работе [3] для векторных полей гладкости C^{r-1} . Стоит отметить, что хотя в работах [2], [3] на векторные поля также накладывается условие Хёрмандера, по существу в процедуре поднятия оно не используется.

В данной статье предлагается простое конструктивное доказательство теоремы о поднятии. Существенное упрощение основано на том, что мы работаем не с коммутаторами векторных полей, а непосредственно с дифференциальными операторами X_I . Мы предлагаем следующее определение свободных векторных полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторные поля $X_1, \dots, X_n$ назовем свободными до порядка s в нуле, если все дифференциальные операторы $X_I(0)$, $|I| \leq s$, линейно независимы в пространстве линейных дифференциальных операторов порядка не более s .

Поясним наше определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, где все α_i – неотрицательные целые числа. Введем стандартные обозначения

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Тогда каждый оператор X_I , $|I| \leq s$, можно единственным образом представить как $X_I(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} A_{I\alpha}(x) D^\alpha$. Таким образом, $X_I(0)$ суть линейные комбинации операторов D^α , $|\alpha| \leq s$.

Для универсальности рассуждений также включим в наше множество мультииндексов пустой индекс $I = () = \emptyset$ и положим $|\emptyset| = 0$ и $X_\emptyset = \text{Id}$ – тождественное отображение. В соответствии с нашим определением векторные поля всегда «свободны» до порядка 0.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{J}$ – конечный набор мультииндексов. Семейство дифференциальных операторов $\{X_I\}_{I \in \mathcal{J}}$ линейно независимо в нуле тогда и только тогда, когда для любого набора постоянных $\{c_I\}_{I \in \mathcal{J}}$ найдется функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что $X_I u(0) = c_I$, $I \in \mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем достаточность. Пусть операторы $X_I(0)$ линейно зависимы, т.е. существует ненулевой набор постоянных $\{a_I\}_{I \in \mathcal{J}}$ такой, что $\sum_{I \in \mathcal{J}} a_I X_I(0) \equiv 0$. Допустим, что существует $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ такая, что $X_I u(0) = a_I$. Но тогда

$$0 = \sum_{I \in \mathcal{J}} a_I X_I u(0) = \sum_{I \in \mathcal{J}} a_I^2.$$

Теперь докажем необходимость. Пусть $s = \max\{|I| : I \in \mathcal{J}\}$. Покажем, что для любого набора постоянных $\{c_I\}_{I \in \mathcal{J}}$ можно найти многочлен $u(x)$ степени не выше s такой, что $X_I u(0) = c_I$. По замечанию после определения 2 каждый оператор $X_I(0)$ единственным образом представляется как $X_I(0) = \sum_{|\alpha| \leq s} A_{I\alpha}(0) D^\alpha$. Если $\alpha \neq \beta$ – два мультииндекса, то $D^\alpha x^\alpha \equiv \alpha!$ и $D^\alpha x^\beta(0) = 0$. Таким образом, если

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq s} \frac{b_\alpha}{\alpha!} x^\alpha,$$

получаем систему линейных уравнений

$$X_I u(0) = \sum_{|\alpha| \leq s} A_{I\alpha}(0) D^\alpha u(0) = \sum_{|\alpha| \leq s} A_{I\alpha}(0) b_\alpha = c_I.$$

Поскольку операторы $X_I(0)$ линейно независимы, эта система всегда разрешима относительно коэффициентов b_α . Таким образом, искомая функция $u(x)$ всегда существует.

Очевидно, что определение 2 сильнее определения 1. В работе [2] доказано, что если семейство векторных полей свободно до порядка s в нуле (в смысле определения 1), то система $\{X_I u(0) = c_I : |I| \leq s\}$ разрешима. Таким образом, определение 2 и определение 1 эквивалентны.

ЛЕММА 2. Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_n$ определены в окрестности нуля U и свободны в нуле до порядка $s - 1$, но не до порядка s . Тогда существуют такие функции $u_1, \dots, u_n \in C^\infty(U)$, что векторные поля

$$\tilde{X}_i(x, t) = X_i(x) + u_i(x) \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n,$$

определенные в $U \times \mathbb{R}$, свободны в нуле до порядка $s - 1$, и

$$\text{rank}\{\tilde{X}_I(0)\}_{|I| \leq s} > \text{rank}\{X_I(0)\}_{|I| \leq s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из вида векторных полей $\tilde{X}_i$ следует, что какие бы ни были u_i , выполнено $\text{rank}\{\tilde{X}_I(0)\}_{|I| \leq s} \geq \text{rank}\{X_I(0)\}_{|I| \leq s}$. Действительно, если для некоторого ненулевого набора $\{a_I\}_{|I| \leq s}$ выполнено $\sum_{|I| \leq s} a_I \tilde{X}_I(0) \equiv 0$, то для всех функций $f(x) \in C^\infty(U)$, т.е. не зависящих от t , имеем

$$0 = \sum_{|I| \leq s} a_I \tilde{X}_I f(0) = \sum_{|I| \leq s} a_I X_I f(0).$$

Таким образом,

$$\left\{ \{a_I\} : \sum_{|I| \leq s} a_I \tilde{X}_I(0) = 0 \right\} \subset \left\{ \{a_I\} : \sum_{|I| \leq s} a_I X_I(0) = 0 \right\}.$$

Докажем индукцией по s , что можно выбрать функции u_i таким образом, что это вложение строгое. Для $s = 1$ невыполнение определения 2 означает, что векторные поля X_i линейно зависимы, т.е. существует ненулевой набор постоянных $\{a_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\sum_{i=1}^n a_i X_i(0) \equiv 0$. Возьмем $u_i(x) \equiv a_i$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i \tilde{X}_i(0) = \sum_{i=1}^n \left(a_i X_i(0) + a_i^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Пусть теперь векторные поля свободны до порядка $s - 1$ и существует ненулевой набор постоянных $\{a_I\}_{|I| \leq s}$ такой, что $\sum_{|I| \leq s} a_I X_I(0) \equiv 0$.

Пусть

$$\tilde{X}_i(x, t) = X_i(x) + u_i(x) \frac{\partial}{\partial t},$$

где $u_i \in C^\infty(U)$ – произвольные функции. Рассмотрим действие операторов $\tilde{X}_I$ на функцию $f(x, t) = t$. Если $I = (i)$, где $1 \leq i \leq n$, то

$$\tilde{X}_i t = \text{Id } u_i(x) = u_i(x).$$

Если же $I = (J, i)$, где J – мультииндекс меньшего порядка и $1 \leq i \leq n$, то

$$\tilde{X}_i t = \tilde{X}_J \tilde{X}_i t = \tilde{X}_J u_i(x) = X_J u_i(x).$$

При этом $|\text{Id}| = 0$ и $|J| = |I| - 1 \leq s - 1$. Поскольку векторные поля свободны до порядка $s - 1$, по лемме 1 существуют функции $u_i \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что $u_i(0) = a_I$, если $I = (i)$, и $X_J u_i(0) = a_I$, если $I = (J, i)$. Подставив выбранные таким образом u_i в поля $\tilde{X}_i$, для $f(x, t) = t$ получаем

$$\sum_{|I| \leq s} a_I \tilde{X}_I f(0) = \sum_{|I| \leq s} a_I^2 \neq 0,$$

т.е. данная линейная комбинация не обращается в нуль на функции t .

ТЕОРЕМА 1. Пусть в окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^N$ определено семейство векторных полей $X_1, \dots, X_n$ класса $C^{r-1}(U)$. Тогда существует натуральное m и векторные поля $\tilde{X}_i$, определенные в $U \times \mathbb{R}^m$, вида

$$\tilde{X}_i(x, t_1, \dots, t_m) = X_i(x) + \sum_{j=1}^m u_{ij}(x, t_1, \dots, t_{j-1}) \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где u_{ij} – многочлены степени не выше r , и $\tilde{X}_i$ свободны до порядка r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нужно применить лемму 2 достаточное число раз. Поскольку операторов X_I , $|I| \leq r$, конечное число, через конечное число шагов ранг системы $\{X_I(0) : |I| \leq r\}$ будет максимален.

Заметим, что наши рассуждения достаточно тривиально обобщаются на весовой случай. Пусть векторным полям $X_1, \dots, X_n$ присвоены некоторые натуральные веса $1 = w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$. В этом случае *весом* дифференциального оператора X_I назовем величину

$$w(I) = w(i_1, \dots, i_k) = w_{i_1} + \dots + w_{i_k}.$$

Векторные поля $X_1, \dots, X_n$ назовем *свободными до веса s* , если семейство операторов $\{X_I(0) : w(I) \leq s\}$ линейно независимо.

ТЕОРЕМА 2. Пусть фиксирован набор весов $1 = w_1 \leq \dots \leq w_n$ и в окрестности нуля $U \subset \mathbb{R}^N$ определено ассоциированное с ним семейство векторных полей $X_1, \dots, X_n$, причем каждое X_i класса C^{r-w_i} . Тогда существует натуральное m и векторные поля $\tilde{X}_i$, определенные в $U \times \mathbb{R}^m$, вида

$$\tilde{X}_i(x, t_1, \dots, t_m) = X_i(x) + \sum_{j=1}^m u_{ij}(x, t_1, \dots, t_{j-1}) \frac{\partial}{\partial t_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где u_{ij} – многочлены степени не выше r , и $\tilde{X}_i$ свободны до веса r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы каждый оператор X_I , $w(I) \leq r$, определен и принадлежит классу гладкости $C^{r-w(I)}$. Лемма 1 выполнена для каждого семейства $\{X_I : w(I) \leq s\}$, $s \leq r$. В рассуждениях леммы 2 достаточно всюду заменить выражение $|I| \leq s$ на $w(I) \leq s$, а в случае $s = 1$ рассматривать линейные комбинации только векторных полей веса 1. В остальном доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Acta Math.*, **137**:3-4 (1976), 247–320. [2] L. Hörmander, A. Melin, *Ark. Mat.*, **16**:1 (1978), 83–88. [3] M. Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni, *Indiana Univ. Math. J.*, **59**:6 (2010), 2093–2138.

С. Г. Басалаев

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской
академии наук, г. Новосибирск
E-mail: sbasalaev@gmail.com

Поступило

28.01.2015