Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, Р. Перез Орtiz, Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 630–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:30:39

Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике

В. В. Власов, Р. Перез Ортиз

1. Введение. На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^2 u - \int_0^t K(t-s) A^{2\xi} u(s) ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (1.2)$$

Здесь A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H , имеющий компактный обратный, а параметр $\xi \in (0, 1)$.

Скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-\gamma_j t), \quad (1.3)$$

где $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$). Предполагается, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\|K(t)\|_{L_1} < 1$. В дальнейшем будет также использоваться условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \quad (1.5)$$

В этом случае ядро $K(t)$ будет принадлежать пространству Соболева $W_1^1(\mathbb{R}_+)$, т.е. будет обладать большей гладкостью.

Уравнение (1.1) является абстрактной формой уравнений, которые возникают во многих областях механики и физики, таких как теория теплопроводности в средах с памятью (уравнения Гуртина–Пипкина), теория вязкоупругости, теория усреднения. Модели распространения тепла в средах с памятью были изучены, в частности, в [1], [2]. Уравнения типа Гуртина–Пипкина возникают также в кинетической теории газов (подробнее см. [3; гл. 3]), в динамике вязкоупругих твердых тел (см. [4; гл. 18]) и в задачах управляемости термоупругих систем с памятью (см. [4; гл. 19]).

Основная цель данной работы состоит в исследовании спектра оператор-функции, являющейся символом уравнения (1.1). Отметим, что в случае $\xi = 1$ спектральный анализ уравнения (1.1) подробно проводился в работах [3], [5]–[7]. На основе результатов, полученных в [3], [5], в работе [8] установлено представление решений интегродифференциальных уравнений в виде суммы рядов по экспонентам, отвечающих точкам спектра оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Однако наличие параметра $\xi \in (0, 1)$ весьма существенно меняет структуру спектра оператор-функции. При этом появляется ряд

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00754) и Мексиканского центра экономических и социальных исследований (CEMEEES в испанской аббревиатуре).

DOI: 10.4213/mzm10829

© В. В. Власов, Р. Перез Ортиз, 2015

новых эффектов по сравнению со случаем $\xi = 1$ (подробнее см. п. 3). Здесь уместно подчеркнуть, что уравнения (1.1) изучалось многими авторами. Ограничимся здесь указанием работ [9]–[11], в которых рассматривался случай $\xi \in [0, 1/2]$. Заметим однако, что в известных нам работах при $\xi \in (0, 1)$ и, в частности, в работах [9]–[11] спектральный анализ символа уравнения (1.1) не проводился. Предлагаемая работа является естественным развитием результатов работ [3], [5]–[7].

2. Корректная разрешимость. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор, действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный. Превратим область определения $\text{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β ($\beta > 0$) в гильбертово пространство H_β , введя на $\text{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β . Обозначим $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ пространство Соболева вектор-функций, заданных на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в пространстве H , снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty \exp(-2\gamma t) (\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A^n u(t)\|_H^2) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [12; гл. I]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A^0) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи (1.1) и (1.2)*, если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geq 0$ и удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (1.2).

В работе [5] при $\xi = 1$ была установлена корректная разрешимость задачи (1.1) и (1.2). Аналогичным образом для $\xi \in (0, 1)$ получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть вектор-функция $A^{2-\xi} f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для всех $\xi \in [0, 1]$ при некотором $\gamma_0 \geq 0$ и условие (1.4) выполнено. Тогда

- 1) если выполнено условие (1.5) и $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$, $\xi \in [0, 1]$, то для любого $\gamma > \gamma_0$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d(\|A^{2-\xi} f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \|A^2 \varphi_0\|_H + \|A \varphi_1\|_H) \quad (2.1)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 и φ_1 ;

- 2) если условие (1.5) не выполнено (т.е. $K(t) \notin W_1^1(\mathbb{R}_+)$) и $\varphi_0 \in H_{2+\xi}$, $\varphi_1 \in H_{1+\xi}$, $\xi \in (0, 1]$, то для $\gamma > \gamma_0$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \leq d(\|A^{2-\xi} f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2 + \|A^{2+\xi} \varphi_0\|_H + \|A^{1+\xi} \varphi_1\|_H) \quad (2.2)$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0 и φ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сформулированной теоремы 1 приведено в [13]. Случай $\xi = 1$ подробно изучался в [2], а также в главе 3 монографии [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\xi = 1$ теорема 1 переходит в теорему 1 из работы [5].

3. Спектральный анализ. Рассмотрим оператор-функцию

$$L(\zeta) = \zeta^2 I + A^2 - \widehat{K}(\zeta) A^{2\xi}, \quad 0 < \xi < 1, \quad (3.1)$$

являющуюся символом уравнения (1.1), где

$$\widehat{K}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta + \gamma_k}$$

является преобразованием Лапласа функции $K(t)$, I – единичный оператор, действующий в пространстве H . Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A , отвечающих собственным значениям a_j : $Ae_j = a_j e_j$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_j упорядочены по возрастанию: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$; при этом $a_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\zeta)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n :

$$\ell_n(\zeta) := (L(\zeta)e_n, e_n) = \zeta^2 + a_n^2 \left(1 - \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta + \gamma_k} \right), \quad 0 < \xi < 1.$$

Перейдем к вопросу о структуре спектра оператор-функции $L(\zeta)$. В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) было введено в работе [14], а также использовалось в работах [3], [5]–[7].

Описательно говоря, условие (3.2) означает, что элементы последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, не могут приближаться друг к другу слишком быстро.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (1.5) и (3.2). Тогда нули мероморфной функции ℓ_n представляют собой счетную серию вещественных корней $\{\mu_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что

$$-\gamma_k < \mu_{n,k} < -\gamma_{k-1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,k} = -\gamma_k,$$

а также пару комплексно-сопряженных корней $\mu_n^{\pm}$, $\mu_n^+ = \overline{\mu_n^-}$ представимых в виде

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{1-2\xi}}\right)\right), \quad \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n}\right) \pm i(a_n + O(1)), \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

$$\mu_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2} \frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}} \sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2\xi-1}}\right)\right), \quad \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \quad (3.5)$$

при $a_n \rightarrow \infty$.

При выполнении условий теоремы 2 спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\zeta)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\mu_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty, \infty}$ функций $\ell_n(\zeta)$, т.е.

$$\sigma(L) = \overline{\bigcup_{n,k=1}^{\infty} \mu_{n,k}} \cup \left(\bigcup_n \mu_n^{\pm} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В соотношениях (3.3)–(3.5) подчиненные слагаемые, содержащие символы $O(1/a_n^k)$, выписаны отдельно для вещественной и мнимой части $\mu_n^{\pm}(\xi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При выполнении условий теоремы 2 и $\xi \in (0, 1)$ не вещественные собственные значения $\mu_n^{\pm}$ асимптотически стремятся к мнимой оси, поскольку $\operatorname{Re} \mu_n^{\pm}(\xi) \rightarrow -0$ при $a_n \rightarrow \infty$, в то время как в случае $\xi = 1$ $\operatorname{Re} \mu_n^{\pm}(\xi) \rightarrow -(1/2) \sum_{j=1}^{\infty} c_j$ (подробнее см. [3; гл. 3], а также [5]). При этом структура вещественного спектра $\sigma_{\mathbb{R}}$ при $\xi \in (0, 1)$ также отличается от случая $\xi = 1$, поскольку при $\xi = 1$ вещественные нули $\mu_{n,k}(\xi) \rightarrow x_k$, где x_k – вещественные нули функции $\sum_{k=1}^{\infty} (c_k/(\zeta + \gamma_k)) = 1$ (подробнее см. [3], [5]). Таким образом, при $\xi \in (0, 1)$ не вещественный спектр оператор-функции $L(\zeta)$ близок к спектру абстрактного волнового уравнения (при $K(t) \equiv 0$).

Перейдем к случаю, когда условие (1.5) не выполнено.

УСЛОВИЕ 1. Предположим, что последовательности $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ имеют следующее представление:

$$c_k = \frac{A}{k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad \gamma_k = Bk^\beta + O(k^{\beta-1}), \quad k \in \mathbb{N},$$

при $k \rightarrow \infty$, где константы $A > 0$, $B > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$ таковы, что $\sum_{k=1}^\infty c_k/\gamma_k < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\gamma_{k+1} - \gamma_k \approx k^{\beta-p}$ удовлетворяется при $k \rightarrow \infty$ с $p \geq 1$, то условие (3.2) выполнено при $p < 2\beta$.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что выполнено условие 1 и $\beta > 1/2$. Тогда нули мероморфной функции ℓ_n представляют собой счетное множество вещественных нулей $\{\lambda_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ таких, что

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k} < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1} < 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,k} = -\gamma_k, \quad (3.6)$$

а также пару комплексно-сопряженных нулей $\lambda_n^\pm$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, представимых в виде

$$\begin{aligned} \lambda_n^\pm(\xi) &= -\frac{AD_1 B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \pm i \left(a_n + \frac{AD_2 B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \right) + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\xi), 2r+3-4\xi\}}}\right), & r \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda_n^\pm(\xi) &= -\frac{AD_1 B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \pm i \left(a_n + \frac{AD_2 B^{r-1}}{\beta a_n^{r+1-2\xi}} \right) + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), & r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ \lambda_n^\pm(\xi) &= -\frac{1}{2} \frac{A}{\beta} \frac{\ln a_n}{a_n^{2(1-\xi)}} \pm i a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{2(1-\xi)}}\right), & r = 1, \end{aligned}$$

при $a_n \rightarrow \infty$, где $r := (\alpha + \beta - 1)/\beta$, и константа $D = D_1 + iD_2$ определяется следующим образом:

$$D := \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^r(i+t)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi r)} \exp\left(i \frac{\pi}{2}(1-r)\right). \quad (3.7)$$

При выполнении условий теоремы 3 спектр $\sigma(L)$ оператор-функции $L(\zeta)$ совпадает с замыканием множества нулей $\{\lambda_n^\pm\}_{n=1}^\infty$ и $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty, \infty}$ функций $\ell_n(\zeta)$, т.е.

$$\sigma(L) = \overline{\left(\bigcup_{n,k=1}^\infty \lambda_{n,k} \right)} \cup \overline{\left(\bigcup_n \lambda_n^\pm \right)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА сформулированных теорем 2, 3 приведены в [15] (см. также [13]). Случай $\xi = 1$ подробно изучался в [5], а также в главе 3 монографии [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $\xi = 1$ теорема 3 переходит в теорему 3 из работы [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При выполнении условий теоремы 3 возможны следующие случаи:

- 1) при $r = 1$ и для любого $\xi \in (0, 1)$ выполнено $\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) \rightarrow -0$;
- 2) при $r \in (0, 1)$ и $\xi \in (0, (r+1)/2) \cup \{1/2\}$ выполнено $\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) \rightarrow -0$;
- 3) при $r \in (0, 1)$ и $\xi \in ((r+1)/2, 1)$ выполнено $\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) \rightarrow -\infty$, когда $a_n \rightarrow \infty$, так как

$$\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) = -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}} a_n^{2(\xi-(r+1)/2)} + O\left(\frac{1}{a_n^{\min\{2(1-\xi), 2r+3-4\xi\}}}\right);$$

- 4) при $r \in (0, 1)$ и $\xi = (r+1)/2$ получаем следующие асимптотики:

$$\operatorname{Re} \lambda_n^\pm = -\frac{AD_1}{\beta B^{1-r}} + O\left(\frac{1}{a_n^{1-r}}\right),$$

которые зависят только от r ; тогда $\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) \rightarrow -AD_1/(\beta B^{1-r})$ при $a_n \rightarrow \infty$.

Таким образом, случай $\xi \in (0, 1)$ существенно отличается от случая $\xi = 1$, поскольку при $\xi = 1$ $\operatorname{Re} \lambda_n^\pm(\xi) \rightarrow -\infty$ (подробнее см. [5]). Тем самым, наличие параметра $\xi \in (0, 1)$ значительно усложняет структуру не вещественного спектра оператор-функции $L(\xi)$. Так в случаях 1), 2) и 4) структура не вещественного спектра близка к спектру волнового уравнения, а в случае 3) к спектру абстрактного параболического уравнения.

Авторы выражают благодарность участникам семинара под руководством профессора А. А. Шкаликова и семинара под руководством А. Л. Скубачевского за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Pandolfi, *Appl. Math. Optim.*, **52**:2 (2005), 143–165. [2] M. E. Gurtin, A. C. Pipkin, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31**:2 (1968), 113–126. [3] В. В. Власов, Д. А. Медведев, Н. А. Раутиан, *Математика*, Вып. 1, Современные проблемы математики и механики, **VIII**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 308. [4] G. Amendola, M. Fabrizio, J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, Springer, New York, 2012. [5] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **28**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 75–113. [6] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев, *Докл. РАН*, **434**:1 (2010), 12–15. [7] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев, *Уравнения в частных производных*, СМФН, **39**, РУДН, М., 2011, 36–65. [8] Н. А. Раутиан, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 470–473. [9] J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, F. M. Vegni, *J. Math. Anal. Appl.*, **286**:2 (2003), 692–704. [10] J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, E. Vuk, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:7 (2004), 819–841. [11] J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, *Asymptotic Anal.*, **49**:3–4 (2006), 189–204. [12] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971. [13] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Correct Solvability of Hyperbolic Volterra Equations with Kernels Depending on the Parameter*, [arXiv: 1412.1067](https://arxiv.org/abs/1412.1067). [14] S. A. Ivanov, T. L. Sheronova, *Spectrum of the Heat Equation with Memory*, [arXiv: 0912.1818v1](https://arxiv.org/abs/0912.1818v1). [15] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Spectra of the Gurtin–Pipkin Type Equations with the Kernel, Depending on the Parameter*, [arXiv: 1403.4382](https://arxiv.org/abs/1403.4382).

В. В. Власов

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: vlasovvv@mech.math.msu.su

Поступило

07.03.2015

Исправленный вариант

23.03.2015

Р. Перез Ортиз

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: cemees.romeo@gmail.com