Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз, Тензорные произведения идемпотентных полумодулей. Алгебраический подход, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 573–586

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:20:15

УДК 517.98

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПОЛУМОДУЛЕЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, Г. Б. Шпиз

Изучены идемпотентные аналоги топологических тензорных произведений в смысле А. Гротендика. Основные понятия и результаты моделируются на алгебраическом уровне. Статья входит в цикл работ по идемпотентному функциональному анализу.

Библиография: 21 название.

Введение

В работе построены и исследованы тензорные произведения для некоторых естественных категорий идемпотентных полумодулей. В рамках идемпотентного анализа эти тензорные произведения играют роль, аналогичную роли топологических тензорных произведений, построенных А. Гротендиком [1], в функциональном анализе. Однако следует отметить, что идемпотентные версии основных понятий и результатов достаточно сильно отличаются от их “традиционных” аналогов.

Основные понятия и результаты (в том числе и “топологической” природы) моделируются на алгебраическом уровне; при этом важно, что операция идемпотентного сложения может быть определена для бесконечного множества слагаемых. Статья входит в цикл работ по идемпотентному функциональному анализу, который является абстрактной версией идемпотентного анализа в смысле работ [2]–[9]. В последующих публикациях будут изучены связи между идемпотентными тензорными произведениями, идемпотентными линейными интегральными и ядерными операторами и следами операторов.

§ 1. Основные понятия

1.1. Напомним, что *идемпотентной полугруппой* (сокращенно ИП) называется аддитивная полугруппа S с коммутативным сложением $\oplus$, если соотношение $x \oplus x = x$ выполняется для всех элементов $x \in S$. Если S содержит нейтральный элемент, то этот элемент обозначается символом 0 . Любая ИП является частично упорядоченным множеством относительно *стандартного порядка* $x \preceq y$, если и только если $x \oplus y = y$.

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

Легко видеть, что это определение корректно и $x \oplus y = \sup\{x, y\}$. Таким образом, любая ИП является верхней полурешеткой, причем понятия ИП и верхней полурешетки по существу совпадают [10].

Приведенные ниже определения частично заимствованы из работ [11], [12]. Идемпотентная полугруппа S называется *a-полной* (или *алгебраически полной*), если она полна как упорядоченное множество, т.е. любое подмножество X в S имеет точную верхнюю грань $\sup X$, обозначаемую также $\oplus X$, и точную нижнюю грань $\inf X$, обозначаемую также $\wedge X$. Эта полугруппа называется *b-полной* (или *ограниченно полной*), если любое ее ограниченное сверху подмножество X (в том числе пустое) имеет точную верхнюю грань $\oplus X$ (в этом случае любое непустое подмножество Y в S имеет точную нижнюю грань $\wedge Y$ и S является решеткой). Отметим, что любая *a-полная* или *b-полная* ИП имеет нуль 0 , совпадающий с $\oplus \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество. Разумеется, из *a-полноты* следует *b-полнота*. Процедура пополнения сечениями [10] дает вложение $S \rightarrow \hat{S}$ произвольной ИП S в *a-полную* ИП $\hat{S}$ (называемую *нормальным пополнением* S); при этом $\hat{\hat{S}} = S$. Аналогично определяется процедура *b-пополнения* $S \rightarrow \hat{S}_b$: если $S \ni \infty = \sup S$, то $\hat{S}_b = S$, иначе $\hat{S} = \hat{S}_b \cup \{\infty\}$. Произвольная *b-полная* ИП S также может отличаться от $\hat{S}$ лишь элементом $\infty = \sup S$.

Пусть полугруппы S и T – *b-полные* ИП. Тогда гомоморфизм $f: S \rightarrow T$ назовем *b-гомоморфизмом*, если $f(\oplus X) = \oplus f(X)$ для любого ограниченного подмножества X в S . Если *b-гомоморфизм* f продолжается до гомоморфизма $\hat{S} \rightarrow \hat{T}$ нормальных пополнений, причем $f(\oplus X) = \oplus f(X)$ для всех $X \subset S$, то f назовем *a-гомоморфизмом*. Любой *a-гомоморфизм* является *b-гомоморфизмом*. Если полугруппа S является *a-полной*, то любой *b-гомоморфизм* является *a-гомоморфизмом*. Если S и T являются топологическими ИП, то гомоморфизм $f: T \rightarrow S$, переводящий нуль в нуль, является *a-гомоморфизмом* тогда и только тогда, когда отображение f полунепрерывно снизу [11], [12].

1.2. Идемпотентным полукольцом (сокращенно ИПК, или *полукольцом*) называется идемпотентная полугруппа K , на которой наряду с идемпотентным сложением $\oplus$ определено ассоциативное умножение $\odot$ и выполнены оба соотношения дистрибутивности. Если это умножение коммутативно, то ИПК называется *коммутативным*. Элемент $1 \in K$ называется *единицей* полукольца K , если $x \odot 1 = 1 \odot x = x$ для всех $x \in K$. Элемент $0 \in K$, $0 \neq 1$, называется *нулем* полукольца K , если $x \oplus 0 = x$ и $x \odot 0 = 0 \odot x = 0$ для всех $x \in K$. В этой статье мы рассматриваем только ИПК с единицей. Наличие нуля, в основном, также предполагается (если не оговорено противное). *Идемпотентным полуполем* (сокращенно *полуполем*) называется коммутативное ИПК, в котором каждый ненулевой элемент обратим относительно умножения. Идемпотентное полукольцо K назовем *a-полным* (*b-полным*), если K является *a-полной* (соответственно *b-полной*) ИП и для любого подмножества (соответственно для любого ограниченного подмножества) X в K и любого $k \in K$ выполнены обобщенные дистрибутивные законы $k \odot (\oplus X) = \oplus (k \odot X)$ и $(\oplus X) \odot k = \oplus (X \odot k)$. Из обобщенной дистрибутивности вытекает, что любое *a-полное* или *b-полное* ИПК имеет нуль, совпадающий с $\oplus \emptyset$. Понятие *a-полного* ИПК совпадает с понятием полного диоида в смысле [13], [14].

Множество $\mathbb{R}(\max, +)$ вещественных чисел, наделенное идемпотентным сложением $\oplus = \max$ и умножением $\odot = +$, является примером ИПК; в этом случае $1 = 0$. Добавляя к этому ИПК элемент $0 = -\infty$, мы получаем *b-полное* полукольцо $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с теми же операциями и нулем. Добавляя к $\mathbb{R}_{\max}$ элемент $+\infty$ и полагая $0 \odot$

$(+\infty) = \mathbf{0}$, $x \odot (+\infty) = +\infty$ при $x \neq \mathbf{0}$, $x \oplus (+\infty) = +\infty$ при всех x , получим a -полное ИПК $\widehat{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R}_{\max} \cup \{+\infty\}$. Стандартный порядок на $\mathbb{R}(\max, +)$, $\mathbb{R}_{\max}$ и $\widehat{\mathbb{R}}_{\max}$ совпадает с обычным порядком. ИПК $\mathbb{R}(\max, +)$, $\mathbb{R}_{\max}$ являются полуполями. Напротив, a -полное ИПК, не совпадающее с $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, не может быть полуполем. Важный класс примеров связан с (топологическими) векторными решетками (см., например, [15, гл. V] и [10]). Определяя сумму $x \oplus y$ как $\sup\{x, y\}$, а умножение $\odot$ как сложение векторов, векторные решетки можно трактовать как идемпотентные полуполя. Добавляя к полной векторной решетке (в смысле [10], [15]) элемент $\mathbf{0}$, получим b -полное полуполе. Добавив еще “бесконечный” элемент, получим a -полное ИПК (совпадающее как упорядоченное множество с нормальным пополнением исходной решетки).

1.3. Пусть V – идемпотентная полугруппа, K – идемпотентное полукольцо и определено умножение $k, x \mapsto k \odot x$ элементов из K на элементы из V , причем это умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения в V и $\mathbf{1} \odot x = x$ для всех $x \in V$. В этом случае полугруппа V называется *идемпотентным полумодулем* (или просто *полумодулем*) над K . Элемент $\mathbf{0}_V \in V$ называется *нулем полумодуля* V , если $k \odot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_K \odot x = \mathbf{0}_V$ и $\mathbf{0}_V \oplus x = x$ для всех $k \in K, x \in V$. Пусть V – полумодуль над b -полным идемпотентным полукольцом K . Этот полумодуль назовем *b -полным*, если он является b -полным как ИП и для любых ограниченных подмножеств Q в K и X в V выполняются обобщенные дистрибутивные законы $(\oplus Q) \odot x = \oplus(Q \odot x)$ и $k \odot (\oplus X) = \oplus(k \odot X)$ для всех $k \in K, x \in X$. Этот полумодуль назовем *a -полным*, если он b -полный и содержит элемент $\infty = \sup V$.

Пусть V и W – идемпотентные полумодули над идемпотентным полукольцом K . Отображение $p: V \rightarrow W$ называется *линейным* (над K), если $p(x \oplus y) = p(x) \oplus p(y)$ и $p(k \odot x) = k \odot p(x)$ для всех $x, y \in V$ и $k \in K$. Пусть полумодули V и W b -полны. Линейное отображение $p: V \rightarrow W$ назовем *b -линейным*, если оно является b -гомоморфизмом ИП; это отображение назовем *a -линейным*, если оно продолжается до a -гомоморфизма нормальных пополнений $\widehat{V}$ и $\widehat{W}$. Любое a -линейное отображение является b -линейным. Если отображение $V \rightarrow W$ является b -линейным, а полумодуль V – a -полным, то это отображение a -линейно. Свойство a -линейности имитирует свойство непрерывности (полунепрерывности) для линейных отображений. Полукольцо K или нормальное пополнение $\widehat{K}$ полуполя K является полумодулем над K . Если W совпадает с K (или $\widehat{K}$), то линейное отображение p называется *линейным функционалом*. Линейные (b -линейные) отображения будем также называть *линейными* (соответственно *b -линейными*) операторами.

Наиболее важные для анализа примеры идемпотентных полумодулей и пространств либо являются подполумодулями топологических векторных решеток [15] (или совпадают с ними), либо двойственны к ним, т.е. состоят из линейных функционалов с тем или иным требованием регулярности, например из a -линейных функционалов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что идемпотентные полумодули над фиксированным ИПК образуют категорию с линейными отображениями в качестве морфизмов. В настоящей статье, в основном, рассматривается другая категория, образованная b -полными идемпотентными полумодулями над фиксированным b -полным ИПК с b -линейными отображениями в качестве морфизмов, а также ее полная подкатегория, образованная a -полными полумодулями с a -линейными отображениями в качестве морфизмов. Отметим, что указанные категории неаддитивны (их естественно считать полуаддитивными); основ-

ные понятия теории категорий см., например, в [16].

В дальнейшем (если не оговорено противное) будут рассматриваться только b -полные (в том числе a -полные) ИПК и идемпотентные полумодули.

§ 2. Прямые произведения и суммы b -полных идемпотентных полумодулей

Пусть K – b -полное ИПК, $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство b -полных идемпотентных полумодулей над K . Элемент из прямого произведения всех множеств из этого семейства будем записывать в виде (вообще говоря, бесконечного) кортежа (“вектора”) $x = \{x_\alpha\} = (\dots, x_\alpha, \dots)$, где $x_\alpha \in V_\alpha$. Покомпонентные операции $x \oplus y = \{x_\alpha + y_\alpha\} = (\dots, x_\alpha \oplus y_\alpha, \dots)$, $k \odot x = \{k \odot x_\alpha\} = (\dots, k \odot x_\alpha, \dots)$, где $k \in K$, превращают прямое произведение множеств V_α , $\alpha \in A$, в идемпотентный полумодуль, который называется *прямым произведением полумодулей* V_α , $\alpha \in A$, и обозначается $\prod_\alpha V_\alpha$. Прямое произведение полумодулей $V_1, \dots, V_n$ будем также обозначать $V_1 \times \dots \times V_n$. Для любого индекса $\alpha \in A$ определим проекцию $p_\alpha: \prod_\alpha V_\alpha \rightarrow V_\alpha$ формулой $p_\alpha(x) = x_\alpha$, а также вложение $i_\alpha: V_\alpha \rightarrow \prod_\alpha V_\alpha$, полагая $(i(x))_\alpha = x$ и $(i(x))_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Полумодуль $\prod_\alpha V_\alpha$ является a -полным (b -полным), если все полумодули V_α являются a -полными (соответственно b -полными).*

Это утверждение непосредственно выводится из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство b -полных полумодулей над K и пусть V – b -полный полумодуль над K . Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) *для любого семейства b -линейных отображений $f_\alpha: V \rightarrow V_\alpha$ существует единственное b -линейное отображение $f: V \rightarrow \prod_\alpha V_\alpha$ такое, что $p_\alpha f = f_\alpha$ для любого индекса $\alpha \in A$;*
- 2) *если множество индексов A конечно, то для любого семейства b -линейных отображений $f_\alpha: V_\alpha \rightarrow V$ существует единственное b -линейное отображение $f: \prod_\alpha V_\alpha \rightarrow V$ такое, что $f i_\alpha = f_\alpha$ для любого индекса $\alpha \in A$;*
- 3) *если все полумодули V и V_α , $\alpha \in A$, являются a -полными, то для любого множества индексов A и для любого семейства a -линейных отображений $f_\alpha: V_\alpha \rightarrow V$ существует единственное a -линейное отображение $f: \prod_\alpha V_\alpha \rightarrow V$ такое, что $f i_\alpha = f_\alpha$ для любого индекса $\alpha \in A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с утверждения 1). Положим $f(x) = \{f_\alpha(x)\}$. Легко убедиться, что подмножество в $\prod_\alpha V_\alpha$ ограничено тогда и только тогда, когда ограничена проекция этого подмножества на каждую компоненту. Отсюда и из определений немедленно следует b -линейность отображения f , причем по построению $p_\alpha f = f_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Единственность такого отображения также очевидна, так что утверждение доказано. Отображение f называется *прямым произведением* отображений f_α .

Для доказательства утверждения 2) положим $f(\{x_\alpha\}) = \bigoplus_\alpha f_\alpha(x_\alpha)$. Легко видеть, что если ограничено подмножество X в $\prod_\alpha V_\alpha$, то ограничено и множество $\{f_\alpha(x_\alpha) \mid \alpha \in A, x_\alpha \in p_\alpha(X)\}$. Поэтому отображение f определено корректно; соотношения $f i_\alpha = f_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ и b -линейность отображения f , равно как и его единственность, проверяются непосредственно. Это отображение называется *прямой суммой* отображений f_α .

Утверждение 3) доказывается аналогично. Конечность множества индексов была использована лишь при доказательстве ограниченности множества $\{f_\alpha(x_\alpha) \mid \alpha \in A, x_\alpha \in p_\alpha(X)\}$. Но для a -полного полумодуля V это выполнено автоматически. Осталось заметить, что в условиях этого утверждения a -линейность и b -линейность совпадают.

Таким образом, предложение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На категорном языке предложение 2 означает следующее. В категории b -полных идемпотентных полумодулей существует (категорное) прямое произведение любого семейства полумодулей V_α , совпадающее с $\prod_\alpha V_\alpha$; если это семейство конечно, то существует и (категорная) прямая сумма $\sum_\alpha V_\alpha$ полумодулей V_α , совпадающая с прямой суммой $\prod_\alpha V_\alpha$. В категории a -полных полумодулей для любого семейства полумодулей V_α существуют (категорные) прямая сумма $\sum_\alpha V_\alpha$ и прямое произведение $\prod_\alpha V_\alpha$, совпадающие между собой и с прямым произведением в категории b -полных полумодулей.

§ 3. Тензорные произведения b -полных полумодулей

Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство b -полных идемпотентных полумодулей над фиксированным b -полным коммутативным идемпотентным полукольцом K и пусть $V = \prod_\alpha V_\alpha$.

Обозначим через T множество формальных сумм вида

$$t = \bigoplus_{x=\{x_\alpha\} \in X} \lambda(x) \odot \bigotimes_{\alpha} x_\alpha, \quad (1)$$

где $X \subset V$, $x = \{x_\alpha\} = (\dots, x_\alpha, \dots)$, а λ – произвольное отображение множества X в K . Элемент вида (1) назовем *представлением* тензора (ниже тензор будет определен как класс своих эквивалентных представлений). Естественное (формальное) идемпотентное сложение (которое не следует смешивать со сложением в $V = \prod_\alpha V_\alpha$) и умножение на элементы k из K (при этом функция $\lambda(x)$ переходит в $x \mapsto k \odot \lambda(x)$) превращает T в полумодуль над K .

Назовем представление вида (1) *ограниченным*, если множество X ограничено в V , а $\lambda(x)$ – ограниченная функция на X (со значениями в K). Множество всех ограниченных представлений обозначим через T_b . Ясно, что T_b – подполумодуль в T . Нетрудно убедиться, что полумодуль T_b является b -полным.

Как обычно, введем в T и T_b отношение эквивалентности, порожденное соотношениями

$$k \odot (\dots \otimes x_\alpha \otimes \dots) = (\dots \otimes k \odot x_\alpha \otimes \dots), \quad (2)$$

$$(\dots \otimes (\oplus X_\alpha) \otimes \dots) = \bigoplus_{x \in X_\alpha} (\dots \otimes x \otimes \dots), \quad (3)$$

где $k \in K$, $X_\alpha \subset V_\alpha$, фиксировано значение индекса α и все соответствующие компоненты (формальные сомножители) в правых и левых частях равенств (2), (3) совпадают за исключением выделенных компонент. Соотношение (2) позволяет заменить сумму вида (1) на эквивалентное представление вида

$$t = \bigoplus_{x=\{x_\alpha\} \in X} \bigotimes_{\alpha} x_\alpha. \quad (4)$$

В дальнейшем будем рассматривать представления вида (4); в этом случае, допуская некоторую вольность речи, множество $X \subset \prod_{\alpha} V_{\alpha}$, фигурирующее в (4), также будем называть *представлением* данного тензора. *Сложение тензоров вида (4) соответствует объединению их представлений (слагаемых)*. Это сложение должно быть идемпотентным; поэтому, добавив к данному представлению все эквивалентные ему представления, мы получим тот же самый тензор (с точностью до эквивалентности). *Соответствующее представление естественно называть полным и отождествить тензор, т.е. класс его эквивалентных представлений, с полным представлением*. Мы будем считать, что полное представление всегда содержит элемент $0_V = \bigotimes_{\alpha} 0_{V_{\alpha}} \in V$.

Перейдем к точным определениям. Для любого элемента $k \in K$ обозначим через k_{α} отображение прямого произведения $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$ в себя, которое состоит в умножении на k одной компоненты с индексом α у любого элемента $x \in V$. Подмножество S в V назовем α -*слоем* или просто *слоем*, если проекция $p_{\beta}(S)$ состоит из одной точки при $\alpha \neq \beta$ и $p_{\alpha}(S) = V_{\alpha}$. Таким образом, у элементов из слоя S фиксированы все компоненты кроме одной (с индексом α), которая может принимать произвольные возможные значения из V_{α} .

Назовем *тензором* или *полным представлением* тензора любое подмножество X в $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$, обладающее следующими свойствами:

- 1) если $k_{\alpha}(x) \in X$ для некоторого индекса $\alpha \in A$ и $k \in K$, то $k_{\beta}(x) \in X$ для всех индексов $\beta \in A$;
- 2) $\oplus(X \cap S) \in X$ для любого слоя $S \subset V$;
- 3) если $y \in S$, $x \in X \cap S$ и $y \preceq x$, то $y \in X$ для любого слоя $S \subset V$.

Разумеется, свойство 1) соответствует равенству (2), а свойства 2) и 3) соответствуют равенству (3) с учетом того, что $x \oplus y = x$ при $y \preceq x$. Будем считать, что полное представление X всегда содержит $0_V = \{0_{\alpha}\}$. Формально это соответствует равенству $\sup \emptyset = 0_V$.

Для произвольного подмножества X в $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$ определим его τ -*оболочку* X^{τ} как пересечение всех тензоров (их полных представлений), содержащих X . Подмножества X и Y в V назовем *эквивалентными* (и обозначим это отношение эквивалентности через τ), если их τ -оболочки X^{τ} и Y^{τ} совпадают.

Элементарная проверка показывает, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *На множестве представлений вида (4) эквивалентность, порожденная равенствами (2) и (3) с учетом идемпотентности сложения, совпадает с эквивалентностью τ . Любое представление вида (1) эквивалентно единственному полному представлению вида (4). Указанная эквивалентность совместима со структурой полумодуля над K на T и T_b .*

Отсюда следует, что определены факторполумодули $\tilde{T}$ и $\tilde{T}_b$. Нетрудно убедиться, что полумодуль $\tilde{T}_b$ является b -полным; кроме того, это следует из предложения 4, доказанного ниже. Факторполумодуль $\tilde{T}_b$ обозначим через $\bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$ и назовем b -*тензорным* (или просто *тензорным*) *произведением b -полных полумодулей V_{α}* .

Напомним, что тензор мы отождествляем с его полным представлением, т.е. с подмножеством $X = X^{\tau} \subset V$.

Назовем тензор X *ограниченным* или b -*тензором*, если он (как множество) содержится в тензоре $\{x\}^{\tau}$, где $x \in V$. В этом случае будем говорить, что X ограничен

тензором $\{x\}^\tau$, т.е. тензором с представлением $\bigotimes_\alpha x_\alpha$, где $x = \{x_\alpha\}$.

Обозначим через $T_b(V)$ множество всех b -тензоров, упорядоченное по включению. Указанный порядок порождает идемпотентное сложение в $T_b(V)$. Сумма произвольного ограниченного семейства $\{X_\alpha\}$ тензоров совпадает с τ -оболочкой $\{\bigcup_\alpha X_\alpha\}^\tau$ их объединения. Если b -тензор X ограничен тензором $\{x\}^\tau$, а b -тензор Y ограничен тензором $\{y\}^\tau$, то тензор $X \oplus Y = \{X \cup Y\}^\tau$ ограничен тензором $\{x \oplus y\}^\tau$, где $x \oplus y \in V$. Ясно, что пересечение любого семейства b -тензоров снова является b -тензором, совпадающим с точной нижней гранью этого множества тензоров (относительно порядка, заданного отношением включения подмножеств в V). Отсюда следует, что любое ограниченное сверху подмножество M в $T_b(V)$ имеет точную верхнюю грань

$$\sup M = \inf\{X \mid Y \preceq X \text{ для всех } Y \in M\} = \bigcap_{X \supset Y \in M} X$$

(см., например, [10]). Таким образом, $T_b(V)$ является решеткой и b -полной ИП.

Элементы $X \in T_b(V)$ можно умножать на элементы $k \in K$ по формуле $k \odot X = (k_\alpha(X))^\tau$ для фиксированного индекса $\alpha \in A$; в силу свойства 1) полного представления тензора это умножение не зависит от выбора индекса α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Идемпотентная полугруппа $T_b(V)$ с определенным выше умножением на элементы из K является b -полным полумодулем над K . Этот полумодуль изоморфен полумодулю $\bigotimes_\alpha V_\alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $T_b(V)$ является b -полным полумодулем. Выше мы убедились, что $T_b(V)$ является b -полной ИП. Поэтому достаточно проверить выполнение дистрибутивных законов и ассоциативность умножения на элементы из K . Легко проверить, что для любого b -гомоморфизма $g: V \rightarrow V$ и любого b -тензора $X \subset V$ множество $g^{-1}(X)$ снова является b -тензором. Поэтому $g(X^\tau) \subset (g(X))^\tau$ и $(g(X^\tau))^\tau = (g(X))^\tau$ для любого подмножества X в V . Применяя полученные соотношения к b -гомоморфизмам вида k_α , получим, что $(k_\alpha(X))^\tau = (k_\alpha(X^\tau))^\tau$ для всех $X \subset V$, $k \in K$, $\alpha \in A$, откуда и выводится ассоциативность умножения на элементы из K .

Перейдем к дистрибутивности. Для любого ограниченного (сверху) подмножества $\mathcal{T}$ в $T_b(V)$ выполнено соотношение $\bigoplus \mathcal{T} = (\bigcup_{t \in \mathcal{T}} t)^\tau$. Поэтому

$$k \odot (\bigoplus \mathcal{T}) = k \odot \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} t \right)^\tau = \left(k_\alpha \left(\left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} t \right)^\tau \right) \right)^\tau = \left(k_\alpha \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} t \right) \right)^\tau = \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} k_\alpha(t) \right)^\tau.$$

Поскольку

$$\left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} k_\alpha(t) \right)^\tau = \left(\bigcup_{t \in \mathcal{T}} (k_\alpha(t))^\tau \right)^\tau = \bigoplus_{t \in \mathcal{T}} k \odot t = \bigoplus (k \odot \mathcal{T}),$$

получаем, что $k \odot (\bigoplus \mathcal{T}) = \bigoplus (k \odot \mathcal{T})$, так что один из дистрибутивных законов доказан. Здесь строчной буквой t обозначается b -тензор, тогда как выше (и ниже) тензоры обозначаются заглавными буквами.

Проверим теперь второй из дистрибутивных законов, т.е. $(\oplus Q) \odot X = \oplus (Q \odot X)$, где Q – любое ограниченное подмножество в K , а X – произвольный b -тензор. Достаточно проверить, что совпадают пересечения этих множеств с α -слоем S для произвольного индекса $\alpha \in A$. Но по построению при $x \in S$ справедливо соотношение $(\oplus Q)_\alpha(x) = \oplus (Q \odot x) \in \{k \odot x \mid k \in Q\}^\tau$. Поэтому $(\oplus Q)_\alpha(x) \in (\bigcup_{k \in Q} k_\alpha(X))^\tau$ при $x \in S \cap X$, откуда $((\oplus Q)_\alpha(X)) \subset (\bigcup_{k \in Q} k_\alpha(X))^\tau$ и, следовательно, $(\oplus Q) \odot X = ((\oplus Q)_\alpha(X))^\tau \subset (\bigcup_{k \in Q} k_\alpha(X))^\tau$. Однако, $(\bigcup_{k \in Q} k_\alpha(X))^\tau = (\bigcup_{k \in Q} (k_\alpha(X))^\tau)^\tau = \bigoplus_{k \in Q} k \odot X = \oplus (Q \odot X)$. Таким образом, $(\oplus Q) \odot X \preceq \oplus (Q \odot X)$. Поскольку обратное неравенство очевидно, второй из дистрибутивных законов проверен. Тем самым, доказано, что $T_b(V)$ является b -полным полумодулем над K .

Осталось указать (и проверить) изоморфизм между $T_b(X)$ и $\bigoplus_\alpha V_\alpha$. По существу, это теперь легко выводится из предложения 3. Отображение $T_b(V) \rightarrow \bigoplus_\alpha V_\alpha$ получим, сопоставляя b -тензору X его (полное) формальное представление $\bigoplus_{x=\{x_\alpha\} \in X} \bigotimes_\alpha x_\alpha$ вида (4) и переходя к соответствующему классу эквивалентности в T_b . Обратное отображение получим, сопоставляя произвольному представлению вида (1) или (4) его полное представление вида (4). Проверка того, что эти отображения взаимно обратны, а структуры полумодулей над K согласованы (совпадают), элементарна. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношение (2) и свойство 1) полного представления тензора указывают причину, по которой на основное полукольцо K наложено требование коммутативности.

§ 4. Основные результаты о b -полилинейных отображениях

Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – произвольное семейство b -полных идемпотентных полумодулей над b -полным коммутативным полукольцом K , а W – произвольный b -полный полумодуль над K . Положим $V = \prod_\alpha V_\alpha$, т.е. V – прямое произведение полумодулей V_α ; через $\bigotimes_\alpha V_\alpha$ обозначим b -тензорное произведение этих полумодулей.

Отображение $f: \prod_\alpha V_\alpha \rightarrow W$ называется b -полилинейным, если оно раздельно b -линейно по каждой компоненте V_α ; это означает, что при любом фиксированном индексе $\beta \in A$ отображение $x_\beta \mapsto f(\dots, x_\beta, \dots)$ при фиксированных произвольных значениях всех остальных координат является b -линейным отображением $V_\beta \rightarrow W$.

Определим каноническое отображение π прямого произведения $V = \prod_\alpha V_\alpha$ в тензорное произведение $T_b(V) = \bigotimes_\alpha V_\alpha$, полагая $\pi(x) = \{x\}^\tau$, т.е. $\pi(\{x_\alpha\}) = \bigotimes_\alpha x_\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Образ канонического отображения π порождает полумодуль $\bigotimes_\alpha V_\alpha$, т.е. любой элемент этого полумодуля является линейной комбинацией (необязательно конечной) элементов $\bigotimes_\alpha x_\alpha$; более того, любой элемент является суммой (необязательно конечной) элементов вида $\bigotimes_\alpha x_\alpha$. Другими словами, множество $\pi(\prod_\alpha V_\alpha)$ является системой образующих полумодуля $\bigotimes_\alpha V_\alpha$ и даже соответствующей ИП.

ТЕОРЕМА 1. Каноническое отображение $\{x_\alpha\} \mapsto \bigotimes_\alpha x_\alpha$ прямого произведения $V = \prod_\alpha V_\alpha$ полумодулей V_α в тензорное произведение $T_b(V) = \bigotimes_\alpha V_\alpha$ этих полумодулей является b -полилинейным. Для любого b -полилинейного отображения $f: \prod_\alpha V_\alpha \rightarrow W$ существует единственное b -линейное отображение $f_\otimes: \bigotimes_\alpha V_\alpha \rightarrow W$ такое, что $f = f_\otimes \pi$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Будем, по-прежнему, отождествлять тензор с его полным представлением вида (4), т.е. с соответствующим подмножеством в $\prod_{\alpha} V_{\alpha}$. Для любого элемента w из произвольной ИП W обозначим через $\text{Low}(w)$ множество $\{u \in W \mid u \preceq w\}$.

ЛЕММА 1. Пусть W – произвольный b -полный полумодуль над K . Для любого b -полилинейного отображения $f: \prod_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow W$ полный прообраз любого множества вида $\text{Low}(w)$, где $w \in W$, является b -тензором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = f^{-1}(\text{Low}(w))$. Если x и y – элементы некоторого слоя, $x \in X, y \preceq x$, то $f(y) \preceq f(x) \preceq w$, откуда $y \in X$. Если $S \subset X$ и S лежит в одном слое, то $f(\oplus S) = \oplus f(S) \preceq w$, откуда $\oplus S \in X$. Если $y = k_{\alpha}(x)$ и $k_{\beta}(x) \in X$ для некоторого индекса β , то $f(y) = k \odot f(x) = f(k_{\beta}(x)) \preceq w$, откуда $y \in X$. Таким образом, условия 1)–3) из определения тензора выполнены, и лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Для любого b -полилинейного отображения $f: \prod_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow W$ и подмножества X в $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$ выполнено равенство $\oplus f(X) = \oplus f(X^{\tau})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что множество $\{x \in V \mid f(x) \preceq w\}$ является b -тензором при любом $w \in W$. В частности, множество $\{x \in V \mid f(x) \preceq \oplus f(X)\}$ является b -тензором, содержащим X . Поэтому оно содержит множество X^{τ} , откуда $\oplus f(X) \succeq \oplus f(X^{\tau})$. Поскольку обратное неравенство очевидно, лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Проверим, что каноническое отображение b -полилинейно. Проверим, что для любого подмножества X в $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$, лежащего в α -слое $S \subset V$, выполнено равенство $\pi(\oplus X) = \oplus \pi(X)$. Поскольку $\oplus X \in X^{\tau}$, выполнено включение $\pi(\oplus X) \subset X^{\tau}$. С другой стороны, если $x \in X$, то $x \in S, \oplus X \in S$ и $x \preceq \oplus X$, откуда $x \in (\oplus X)^{\tau}$. Поэтому $X \subset (\oplus X)^{\tau}$, откуда $X^{\tau} \subset (\oplus X)^{\tau} = \pi(\oplus X)$, так что $\oplus \pi(X) = X^{\tau} = \pi(\oplus X)$, что и требовалось. Поскольку соотношение $\pi(k_{\alpha}(x)) = k \odot \pi(x)$, где $x \in V, k \in K$, непосредственно выводится из определения умножения b -тензора на элемент $k \in K$, доказана b -полилинейность канонического отображения π .

Осталось проверить существование и единственность отображения $f_{\otimes}$. Для любого b -тензора t положим $f_{\otimes}(t) = \oplus f(t)$, где $f(t)$ – образ множества t (полного представления тензора t) при отображении f . Корректность этого определения и равенство $f_{\oplus}(\pi(x)) = f(x)$ вытекают из леммы 2.

Для любого подмножества T в тензорном произведении $\bigotimes V_{\alpha}$ справедливы равенства

$$f_{\otimes}(\oplus T) = f_{\otimes}\left(\left(\bigcup_{t \in T} t\right)^{\tau}\right) = \oplus f\left(\bigcup_{t \in T} t\right) = \bigoplus_{t \in T} (\oplus f(t)) = \oplus f_{\otimes}(T),$$

так что $f_{\otimes}$ является b -гомоморфизмом соответствующих ИП.

Легко доказать и однородность отображения $f_{\otimes}$. Действительно, справедливы равенства

$$f_{\otimes}(k \odot \pi(x)) = f_{\otimes}(\pi(k_{\alpha}(x))) = f(k_{\alpha}(x)) = k \odot f(x) = k \odot f_{\otimes}(\pi(x)).$$

Таким образом, $f_{\otimes}$ однородно на $\pi(V)$. Поскольку $f_{\otimes}$ является b -гомоморфизмом, а образ $\pi(V)$ канонического отображения порождает $\bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$ (см. замечание 4), однородность отображения $f_{\otimes}$ доказана полностью. Единственность этого отображения также вытекает из замечания 4. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $V = \prod_{\alpha} V_{\alpha}$, W является b -полным полумодулем над K и определено b -полилинейное отображение $\varepsilon: V \rightarrow W$ такое, что его образ порождает полумодуль W , так что любой элемент из W является линейной комбинацией элементов вида $\varepsilon(x)$. Предположим, что для любого b -полилинейного отображения $f: V \rightarrow U$, где U – произвольный b -полный полумодуль над K , существует b -линейное отображение $F: W \rightarrow U$ такое, что $F\varepsilon = f$. Тогда существует изоморфизм $\delta: W \rightarrow \bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$ полумодуля W на b -тензорное произведение $\bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$ такой, что $\delta\varepsilon = \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta: W \rightarrow \bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$ является b -линейным отображением таким, что $\delta\varepsilon = \pi$. Это отображение существует в силу условия теоремы 2, примененного к b -полилинейному отображению $f = \pi$. С другой стороны, применяя теорему 1 к b -полилинейному отображению ε , построим b -линейное отображение $\varepsilon_{\otimes}: \bigotimes_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow W$ такое, что $\varepsilon_{\otimes}\pi = \varepsilon$. Поскольку $\delta\varepsilon_{\otimes}\pi = \delta\varepsilon = \pi$, b -линейное отображение $\delta\varepsilon_{\otimes}$ оставляет на месте все элементы из $\pi(V)$; это отображение совпадает с тождественным, так как $\pi(V)$ порождает $\bigotimes_{\alpha} V_{\alpha}$. Аналогично можно проверить, что $\varepsilon_{\otimes}\delta$ также является тождественным отображением, т.е. b -линейные отображения $\varepsilon_{\otimes}$ и δ взаимно обратны и являются изоморфизмами. Таким образом, теорема 2 является следствием теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теоремы 1 и 2 показывают, что в категории b -полных полумодулей (с b -линейными отображениями в качестве морфизмов) построено естественное тензорное произведение. Построено оно и в полной подкатегории a -полных полумодулей, так как нетрудно проверить, что b -тензорное произведение любого семейства a -полных полумодулей (над фиксированным ИПК) является a -полным полумодулем.

Используя конструкции, подобные описанным выше, нетрудно построить и тензорное произведение (с конечным числом сомножителей) в категории произвольных идемпотентных полумодулей над фиксированным коммутативным ИПК (с линейными отображениями в качестве морфизмов).

§ 5. Тензорные произведения b -линейных отображений

Пусть $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ и $\{W_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ – семейства b -полных полумодулей над фиксированным b -полным коммутативным полукольцом K и пусть для любого индекса $\alpha \in A$ определено b -линейное отображение $f_{\alpha}: V_{\alpha} \rightarrow W_{\alpha}$. Обозначим через f прямое произведение $\prod_{\alpha} f_{\alpha}$ этих отображений, т.е. $f: \prod_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow \prod_{\alpha} W_{\alpha}$ и $f(\{x_{\alpha}\}) = \{f(x_{\alpha})\}$. Легко видеть, что это отображение продолжается до b -полилинейного отображения

$$\prod_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow \bigotimes_{\alpha} W_{\alpha}. \quad (5)$$

Из теоремы 1 следует, что отображение (5) продолжается до b -линейного отображения

$$\bigotimes_{\alpha} V_{\alpha} \rightarrow \bigotimes_{\alpha} W_{\alpha}. \quad (6)$$

Отображение (6) называется b -тензорным (или просто *тензорным*) *произведением b -линейных отображений* f_{α} и обозначается через $\bigotimes_{\alpha} f_{\alpha}$.

§ 6. Тензорная алгебра

Пусть U, V, W – b -полные полумодули над b -полным коммутативным идемпотентным полукольцом K . Будем использовать знак $\dot{+}$ для обозначения прямой суммы двух полумодулей и знак $\sum_{\alpha} V_{\alpha}$ для обозначения прямой суммы произвольного семейства a -полных полумодулей. В указанных случаях прямая сумма совпадает с прямым произведением (см. замечание 2).

ТЕОРЕМА 3. *Следующие b -полные полумодули изоморфны:*

- 1) $U \otimes V$ и $V \otimes U$;
- 2) $(U \dot{+} V) \otimes W$ и $U \otimes W \dot{+} V \otimes W$;
- 3) $(U \otimes V) \otimes W$ и $U \otimes (V \otimes W)$;
- 4) $(\sum_{\alpha} V_{\alpha}) \otimes W$ и $\sum_{\alpha} V_{\alpha} \otimes W$,

где $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ – произвольное семейство a -полных полумодулей над K .

СЛЕДСТВИЕ. *Множество b -полных полумодулей (над фиксированным b -полным коммутативным ИПК), рассматриваемых с точностью до изоморфизма, образует коммутативное ассоциативное полукольцо относительно операций прямой суммы и b -тензорного произведения.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Указанное полукольцо полумодулей не является идемпотентным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Утверждение 1) тривиально и непосредственно вытекает из определения b -тензорного произведения. Утверждение 3) следует из того, что прямые произведения $U \times (V \times W)$ и $(U \times V) \times W$ изоморфны, причем множество b -тензоров (т.е. их полных представлений вида (4)) в обоих случаях одинаково и совпадает с множеством b -тензоров в $U \times V \times W$, т.е. с $U \otimes V \otimes W$, что и требовалось.

Докажем утверждения 2) и 4). Пусть существует прямая сумма $\sum_{\alpha} V_{\alpha} = V$ семейства полумодулей V_{α} , совпадающая с его прямым произведением $\prod_{\alpha} V_{\alpha}$ (см. замечание 2); для утверждения 2) это семейство конечно (или даже состоит из двух полумодулей). Пусть $i_{\alpha}: V_{\alpha} \rightarrow V$ и $p_{\alpha}: V \rightarrow V_{\alpha}$ – соответствующие канонические вложения и проекции и пусть $i: \sum_{\alpha} (V_{\alpha} \otimes W) \rightarrow V \otimes W$ является прямой суммой отображений $i_{\alpha} \otimes I_W$, где I_W – тождественный оператор в W (тензорное произведение b -линейных отображений определено в § 5). Таким образом, ограничение отображения i на $V_{\alpha} \otimes W$ совпадает с $i_{\alpha} \otimes I_W$. Аналогично, пусть $p: V \otimes W \rightarrow \sum_{\alpha} (V_{\alpha} \otimes W) = \prod_{\alpha} (V_{\alpha} \otimes W)$ является прямым произведением отображений $p_{\alpha} \otimes I_W$. Рутинная проверка показывает, что i и p являются взаимно обратными изоморфизмами.

§ 7. Тензорные произведения полумодулей ограниченных функций

Пусть, по-прежнему, K – b -полное коммутативное ИПК, X – произвольное множество. Обозначим через $\mathcal{B}(X, K)$ множество *ограниченных функций на X со значениями в K* , т.е. отображений $X \rightarrow K$ с ограниченным множеством значений. Если $f, g \in \mathcal{B}(X, K)$, то поточечное сложение и умножение

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x),$$

где x – любой элемент из X , наделяют $\mathcal{B}(X, K)$ структурой b -полного полумодуля над K (см., например, [17], [18], [5], [12]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых множеств X и Y b -полные полумодули $\mathcal{B}(X \times Y, K)$ и $\mathcal{B}(X, K) \otimes \mathcal{B}(Y, K)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через δ_x функцию из $\mathcal{B}(X, K)$, принимающую значение $\mathbf{1}$ в точке $x \in X$ и значение $\mathbf{0}$ во всех остальных точках. Отображение

$$(f, g) \mapsto \oplus \{f(x) \odot f(y) \odot \delta_{(x, y)}\},$$

как легко проверить, является b -линейным отображением $\mathcal{B}(X, K) \times \mathcal{B}(Y, K) \rightarrow \mathcal{B}(X \times Y, K)$; поэтому оно продолжается до b -линейного отображения

$$i: \mathcal{B}(X, K) \otimes \mathcal{B}(Y, K) \rightarrow \mathcal{B}(X \times Y, K). \quad (7)$$

Полагая $j(f) = \oplus \{f(x, y) \odot \delta_x \otimes \delta_y\}$, определим b -линейное отображение

$$j: \mathcal{B}(X \times Y, K) \rightarrow \mathcal{B}(X, K) \otimes \mathcal{B}(Y, K). \quad (8)$$

Корректность этого определения проверяется просто. Легко убедиться, что отображения (7) и (8) взаимно обратны и осуществляют искомым гомоморфизм. Достаточно проверить это на системе образующих. Для элемента $(x, y) \in X \times Y$ легко проверить равенство $i(j(\delta_{(x, y)})) = i(\delta_x \otimes \delta_y) = \delta_{(x, y)}$, так что ij – тождественное отображение на $\mathcal{B}(X \times Y, K)$. С другой стороны, элементы вида $\delta_x \otimes \delta_y$, как несложно убедиться, порождают $\mathcal{B}(X, K) \otimes \mathcal{B}(Y, K)$ и $j(i(\delta_x \otimes \delta_y)) = j(\delta_{(x, y)}) = \delta_x \otimes \delta_y$; отсюда следует, что ji – тождественное отображение. Предложение доказано.

§ 8. Ядерные операторы на b -полных полумодулях

Пусть V и W есть b -полные полумодули над b -полным коммутативным ИПК K . Обозначим через W^* полумодуль всех b -линейных отображений $W \rightarrow K$ (b -линейных функционалов). Множество всех b -линейных отображений $W \rightarrow V$ обозначается через $\text{Hom}_b(W, V)$. На этом множестве естественно возникает структура b -полного полумодуля над K . Таким образом, $W^* = \text{Hom}_b(W, K)$.

Если $v \in V$, $w^* \in W^*$, то определим оператор (т.е. b -линейное отображение) $p_{w^*, v}: W \rightarrow V$ формулой

$$p_{w^*, v}: x \mapsto w^*(x) \odot v. \quad (9)$$

Операторы вида (9) будем называть *операторами ранга 1* (или *одномерными операторами*).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Существует единственное b -линейное отображение $p: W^* \otimes V \rightarrow \text{Hom}_b(W, V)$ такое, что $p(w^* \otimes v) = p_{w^*, v}$. Образ оператора p является подполумодулем в $\text{Hom}_b(W, V)$, порожденным множеством всех операторов вида (9), т.е. ранга 1.

Для доказательства достаточно заметить, что отображение $W^* \times V \rightarrow \text{Hom}_b(W, V)$, переводящее пару (w^*, v) в оператор $p_{w^*, v}$, является b -билинейным, а его образ состоит из всех операторов ранга 1, а затем применить теорему 1. Описанное в предложении 6 отображение p будем называть *каноническим*.

По аналогии с [1] назовем b -линейное отображение $n: W \rightarrow V$ *b -ядерным оператором* (или *ядерным отображением*), если n лежит в образе указанного канонического отображения p . Из предложения 6 следует, что ядерное отображение $W \rightarrow V$ может быть представлено в виде суммы операторов ранга 1. Из этого предложения и определений легко выводится

СЛЕДСТВИЕ. Если полумодули V и W являются a -полными, то образ канонического отображения r является a -полным подполумодулем в $\text{Hom}_b(W, V)$; b -линейное отображение $W \rightarrow V$ ядрено тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде суммы (быть может, бесконечной) операторов ранга 1.

Подробному изучению b -ядерных операторов в связи с идемпотентными аналогами теорем о ядре (в духе результатов Л. Шварца и А. Гротендика) будет посвящена одна из следующих статей. Здесь мы рассмотрим лишь следующий пример.

ПРИМЕР (см. [17], [18]). Пусть $W = \mathcal{B}(X, K)$ и $V = \mathcal{B}(Y, K)$ (как это описано в § 7). По теореме о ядре [18] каждый b -линейный оператор $f: W \rightarrow V$ имеет вид

$$f: \varphi(x) \mapsto \tilde{\varphi}(y) = \int_X^{\oplus} K_f(x, y) \odot \varphi(x) dx = \sup_{x \in X} (K_f(x, y) \odot \varphi(x)), \quad (10)$$

где $\varphi \in W$, $K_f(x, y) \in \mathcal{B}(X \times Y, K)$ и “идемпотентный интеграл” $\int_X^{\oplus} \psi(x) dx$ (см., например, [2], [4]–[8]) определяется как $\sup_{x \in X} \psi(x)$ для любой функции $\psi \in \mathcal{B}(X, K)$. Определим b -линейный функционал $K_{f,y}$ на W формулой

$$K_{f,y}(\varphi) = \int_X^{\oplus} K_f(x, y) \varphi(x) dx.$$

Интегральное представление (10) можно записать в виде $f(\varphi) = \bigoplus_{y \in Y} K_{f,y}(\varphi) \odot \delta_y$. Из теоремы о ядре вытекает, что любой b -линейный оператор $f: \mathcal{B}(X, K) \rightarrow \mathcal{B}(Y, K)$ является b -ядерным. Из теоремы о структуре b -линейного функционала [18] видно, что любой b -ядерный оператор $f: W \rightarrow V$ можно задать “интегральным” ядром $K_f(x, y)$. Таким образом, возможность интегрального представления оператора обеспечивается его ядерностью и возможностью интегрального представления для b -линейных функционалов. Для широкого класса b -полных полумодулей указанная схема допускает обобщение.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что $W^* = (\widehat{W}_b)^*$, где $\widehat{W}_b$ – b -пополнение полумодуля (о процедуре b -пополнения для полумодулей см., например, в [12]). Поэтому требование b -полноты полумодуля W не очень существенно. Вообще, если полумодули V и W над K допускают b -пополнения $\widehat{V}_b$ и $\widehat{W}_b$ над $\widehat{K}_b$, то “пополненное” b -тензорное произведение $V \widehat{\otimes} W$ можно определить как $\widehat{V}_b \otimes \widehat{W}_b$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для случая a -полных идемпотентных полумодулей (и тензорных произведений конечных семейств полумодулей этого типа) часть результатов настоящей работы изложена (в других терминах и другим способом) в [19]. При этом исследовался весьма общий категорный подход к тензорным произведениям, предложенный в [20] (см. также [21]). Отметим, что предложенный в [20] подход не всегда удобен для приложений в анализе в духе Гротендика [1]. Например, для категории локально выпуклых (или банаховых) пространств этот подход выделяет лишь одно из возможных (и важных для анализа) топологических тензорных произведений в смысле [1]. В следующих работах мы рассмотрим различные варианты идемпотентных аналогов топологических тензорных произведений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. V. 16. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1955.
- [2] Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987.
- [3] Маслов В. П. О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации // УМН. 1987. Т. 42. № 3. С. 39–48.
- [4] Maslov V. P. Méthodes opératorielles. Moscow: Mir, 1987.
- [5] Maslov V. P., Samborskii S. N. (ed.) Idempotent Analysis // Adv. Soviet Math. V. 13. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1992.
- [6] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994.
- [7] Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
- [8] Litvinov G. L., Maslov V. P. Correspondence Principle for Idempotent Calculus and Some Computer Applications. Preprint IHES/M/95/33. Bures-sur-Yvette: Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1995. (см. также [9, с. 420–443]).
- [9] Gunawardena J. (ed.) Idempotency. Publ. of the Newton Institute. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [10] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.
- [11] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход: Докл. РАН. (в печати).
- [12] Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б. Идемпотентный функциональный анализ. I. Алгебраический подход. Препринт. М.: Международный центр “Софус Ли”, 1998.
- [13] Bacelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems. New York: Wiley, 1992.
- [14] Gondran M., Minoux M. Graphes et algorithms. Clarendon Paperbacks. Oxford: Oxford Univ. Press, 1979.
- [15] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [16] Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории. М.: Наука, 1988.
- [17] Дудников П. И., Самборский С. Н. Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией. (Киев: ИМ АН УССР, 1987) // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 1. С. 91–105.
- [18] Шубин М. А. Алгебраические замечания об идемпотентных полукольцах и теорема о ядре в пространствах ограниченных функций. М.: Институт новых технологий, 1990.
- [19] Joyal A., Tierney M. An extension of the Galois theory of Grothendieck // Mem. Amer. Math. Soc. 1984. V. 51. № 309. VII+71.
- [20] Banaschewski B., Nelson E. Tensor products and bimorphisms // Canad. Math. Bull. 1976. V. 19. № 4. P. 385–402.
- [21] Pumplün D. Das Tensorprodukt als universelles Problem // Math. Ann. 1967. V. 171. P. 247–262.

Международный центр “Софус Ли”

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: litvinov@isl.c.msk.su

Поступило

03.08.98