Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ал. И. Буфетов, Унитарно-инвариантные эргодические матрицы и свободная вероятность, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 824–831

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:04:01

Унитарно-инвариантные эргодические матрицы и свободная вероятность

Ал. И. Буфетов

В данной работе рассматриваются вероятностные меры на пространстве эрмитовых матриц, которые являются эргодическими относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группой. Мы доказываем, что собственные значения случайных матриц, распределенных по этим мерам, удовлетворяют закону больших чисел. Мы также устанавливаем связь таких моделей случайных матриц и объектов свободной вероятности – свободно безгранично делимых мер.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10830

1. Введение. В работе [1] (см. также [2]) была дана классификация эргодических унитарно-инвариантных мер на пространстве эрмитовых матриц. Цель данной работы – исследование асимптотики спектра случайных эрмитовых матриц, распределенных по таким мерам. Помимо стремления к лучшему пониманию этих мер мотивацией для рассматриваемой нами постановки задачи служат два обстоятельства. Во-первых, возникающая вероятностная модель является непрерывным аналогом модели, рассмотренной в [3]. Во-вторых, с точки зрения теории случайных матриц мы получаем естественную модель для свободно безгранично делимых мер. Полученная связь между эргодическими мерами и объектами теории свободной вероятности представляется любопытной.

Пусть $H(N) = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^N$ – пространство эрмитовых матриц N -го порядка. Рассмотрим естественное вложение $H(N) \subset H(N+1)$ такое, что $h_{N+1,j} = h_{j,N+1} = 0$, $1 \leq j \leq N+1$. Будем обозначать символом $H(\infty)$ индуктивный предел пространств $H(N)$ относительно этих вложений, а символом H – проективный предел. Иначе говоря, $H(\infty)$ – это пространство бесконечных эрмитовых матриц, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля, а H – пространство всех бесконечных эрмитовых матриц.

Будем обозначать символом i мнимую единицу. Для произвольной борелевской вероятностной меры μ на H определим ее *преобразование Фурье*

$$f_\mu(X) = \int_H \exp(i \operatorname{tr}(XB)) d\mu(B), \quad X \in H(\infty).$$

Легко показать (см. [1; утверждение 1.1]), что любая мера на H однозначно определяется своим преобразованием Фурье, которое является положительно-определенной функцией на $H(\infty)$.

В этой работе мы будем называть *параметрами* набор вещественных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ таких, что

$$\gamma_2 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots, \quad \sum_{i \geq 1} \alpha_i^2 < \infty.$$

Обозначим все наборы параметров, удовлетворяющих этому условию, символом $\mathcal{P}$.

Пусть $w \in \mathcal{P}$. Определим функции

$$F_w(x) := \exp\left(i\gamma_1 x - \frac{\gamma_2 x^2}{2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-i\alpha_k x)}{1 - i\alpha_k x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

и

$$f_w(X) := \prod_{x \in \text{Spec}(X)} F(x), \quad X \in H(\infty). \quad (1.2)$$

Классификационная теорема Вершика–Ольшанского (см. введение к [1]) утверждает, что все меры на H , эргодические относительно действия сопряжениями бесконечномерной унитарной группы (см. необходимые определения в введении к [1]), параметризуются множеством $\mathcal{P}$ и преобразование Фурье меры, соответствующей $w \in \mathcal{P}$, задается формулой (1.2).

Пусть дана последовательность параметров $w_N \in \mathcal{P}$. Для каждого $w = w_N$ ограничим меру с преобразованием Фурье (1.2) на множество эрмитовых матриц размера $N \times N$. Обозначим символами $\lambda_{1;N} \geq \dots \geq \lambda_{N;N}$ (случайные) собственные числа такой матрицы. Определим (случайную) вероятностную меру:

$$L_N^w := \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \delta\left(\frac{\lambda_{i;N}}{N}\right);$$

эту меру называют *эмпирическим распределением собственных значений* случайной матрицы. Нас будет интересовать асимптотика собственных значений – меры L_N^w – при некотором условии на изменение параметров w_N .

Введем несколько обозначений, которые потребуются нам для формулировки и доказательства основных результатов. Для комплексной функции $V(x)$, голоморфной в ε -окрестности 0, определим

$$G(x) := -iV'(-ix) = t_1 + t_2 x + t_3 x^2 + \dots \quad \text{при } |x| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

Пусть z – формальная переменная. Определим формальный степенной ряд $C_0(z)$ с помощью формального обращения рядов (относительно суперпозиции)

$$C_0(z) := \left(\frac{z}{1 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots} \right)^{(-1)}. \quad (1.4)$$

Пусть

$$c_k := \frac{1}{k+1} [u^k] (1 + t_1 u + t_2 u^2 + \dots)^{k+1}, \quad (1.5)$$

где под $[u^k]A(u)$ мы понимаем коэффициент при u^k в степенном ряде $A(u)$. Из формулы обращения Лагранжа следует, что

$$C_0(z) = z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + \dots$$

Обозначим символом μ_V вероятностную меру на $\mathbb{R}$, последовательность моментов которой равна $\{1, c_1, c_2, \dots\}$ (т.е. выполнено $\int_{\mathbb{R}} x^k d\mu_V = c_k$, для всех $k \geq 0$). Существование и единственность этой меры будут установлены в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность параметров $w = w_N$ такова, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln F_w(x) = V(x), \quad \text{равномерная сходимость при } |x| < \varepsilon.$$

Предположим также, что существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что для любого N все альфа-параметры из w меньше C . Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L_N^w = \mu_V \quad \text{в слабом смысле; по вероятности.}$$

Более подробно, для любой непрерывной ограниченной функции $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \phi dL_N^w = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu_V \quad \text{по вероятности.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Частные случаи этого результата кратко описаны в п. 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формула (1.4) дает связь между последовательностью моментов предельной меры и функцией $V(x)$. Отметим, что поскольку все рассматриваемые меры будут иметь компактный носитель, то моменты полностью определяют предельную меру. Плотность предельной меры может быть определена из моментов с помощью стандартной техники преобразования Стильтьеса.

Следующая теорема описывает все возможные вероятностные меры, которые могут возникать в качестве μ_V .

ТЕОРЕМА 2. В качестве предельной меры μ_V из теоремы 1 могут возникать все свободно безгранично делимые меры с компактным носителем и только они.

В п. 2 доказывается теорема 1. Необходимые сведения из теории свободной вероятности напоминаются в п. 3. В п. 4 доказывается теорема 2. В п. 5 приводится взаимосвязь между тотально положительными функциями и свободной вероятностью, вытекающая из теорем 1 и 2. Наконец, в п. 6 приводятся частные случаи теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство использует метод моментов и сводится к комбинаторному вычислению из работы [3].

Пусть $w = w(N)$ – последовательность параметров, удовлетворяющая условию теоремы. Тогда мы можем записать характеристическую функцию $f_w(X)$ случайной матрицы из $H(N)$ в виде

$$f_w(X) = \exp\left(N \sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{a_{k;N}}{k} \operatorname{tr}(X^k)\right), \quad X \in H(N),$$

где коэффициенты Тейлора $a_{k;N}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_{k;N} = t_k, \quad 1 \leq k < \infty \quad (2.1)$$

(напомним, что последовательность t_k определяется через $V(x)$ формулой (1.3)).

Заметим, что выполнено $\sum_{i=1}^N \lambda_{i;N}^k = \text{tr}(X^k)$ и что математические ожидания произведений элементов матрицы X могут быть получены с помощью дифференцирования известной нам характеристической функции $f_w(x)$. А именно, выполнено

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w = i^k \mathbb{E} \frac{\text{tr}(X^k)}{N^{k+1}} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N} \partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} f_w(X) \Big|_{X=0}. \quad (2.2)$$

Аналогично, мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w \right)^2 &= i^k \mathbb{E} \left(\frac{\text{tr}(X^k)}{N^{k+1}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^{k+1}} \left(\sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N} \partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} \right)^2 f_w(X) \Big|_{X=0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нахождение асимптотики (при $N \rightarrow \infty$) выражений (2.2) и (2.3) при условии (2.1) является нетривиальной комбинаторной задачей. Однако заметим, что уравнение (2.2) совпадает с [3; уравнение (4.4)], а уравнение (2.3) совпадает с [3; уравнение (4.9)]. Асимптотика этих выражений приведена в [3; предложения 4.1 и 4.2] и доказана в разделах 4.2 и 4.3 из [3]. Ключевую роль в доказательстве играет описание наборов индексов $(i_1, \dots, i_k)$, дающих максимально возможный вклад в выражение $\partial_{i_1 i_2} \partial_{i_2 i_3} \dots \partial_{i_k i_1} f_w(X) \Big|_{X=0}$. Используя предложения 4.1 и 4.2 из [3], мы получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w = c_k, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}} x^k dL_N^w \right)^2 = c_k^2$$

(напомним, что числа c_k по определению выражаются через $\{t_k\}_{k \geq 1}$ согласно уравнению (1.5)).

Лемма 2.3 из [3] (условия которой выполнены в силу равенств выше и ограниченности рассматриваемых альфа-параметров) показывает, что мера μ_V с моментами $\{c_k\}_{k \geq 1}$ существует, имеет компактный носитель (следовательно, однозначно определяется своими моментами) и что мера L_N^w сходится к ней в указанном в теореме 1 смысле.

3. Сведения из теории свободной вероятности. Для любой вероятностной меры μ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем можно определить моменты $m_k(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x)$ и свободные кумулянты $\kappa_k(\mu)$, $k \geq 1$, которые связаны с моментами следующим образом (см., например, [4; замечание 11.19]):

$$m_k(\mu) = \frac{1}{k+1} \sum_{b_1+2b_2+\dots+kb_k=k} \kappa_1^{b_1}(\mu) \kappa_2^{b_2}(\mu) \dots \kappa_k^{b_k}(\mu) \frac{(k+1)!}{b_1! b_2! \dots b_k! (k+1 - \sum b_i)!}; \quad (3.1)$$

отметим, что свободные кумулянты могут быть выражены через моменты с помощью обращения этой формулы.

Для двух вероятностных мер μ_1 и μ_2 можно рассмотреть операцию их свободной свертки; результатом этой свертки является вероятностная мера, которую мы будем обозначать символом $\mu_1 \boxplus \mu_2$. Ее можно определить с помощью условия

$$\kappa_k(\mu_1 \boxplus \mu_2) := \kappa_k(\mu_1) + \kappa_k(\mu_2), \quad k \geq 1. \quad (3.2)$$

Известна классификация всех безгранично делимых мер относительно операции свободной свертки. Следующая теорема была доказана Войкулеску в [5].

ТЕОРЕМА 3. *Вероятностная мера ν с компактным носителем является свободно безгранично делимой тогда и только тогда, когда существуют число $K_1 \in \mathbb{R}$ и конечная мера $\mathcal{K}$ на $\mathbb{R}$ такие, что*

$$\kappa_1(\nu) = K_1, \quad \kappa_r(\nu) = m_{r-2}(\mathcal{K}), \quad r \geq 2.$$

Нам также потребуется следующий факт, доказанный в [6].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A_n и B_n – две последовательности эрмитовых случайных матриц размера $n \times n$ таких, что для любого n матрицы A_n и B_n независимы. Предположим, что при $n \rightarrow \infty$ эмпирическое распределение собственных значений матриц A_n сходится к некоторой вероятностной мере μ_A , а для матриц B_n – к некоторой вероятностной мере μ_B . Кроме того, предположим, что для любого n распределение матриц A_n и B_n унитарно инвариантно. Тогда матрицы A_n и B_n асимптотически свободны. В частности, это означает, что предельная эмпирическая мера для спектра матриц $A_n + B_n$ является свободной сверткой мер μ_A и μ_B .*

4. Доказательство теоремы 2.

ЛЕММА 1. *Пусть последовательность параметров $w_N = (\gamma_{1;N}, \gamma_{2;N}, \{\alpha_{i;N}\}_{i \geq 1})$ такова, что существуют пределы*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{1;N}}{N} = A_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2}{N} = A_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{N} = A_k, \quad k \geq 3.$$

Пусть $T \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число. Тогда существуют параметры $(\tilde{\gamma}_{1;N}, \tilde{\gamma}_{2;N}, \{\tilde{\alpha}_{i;N}\}_{i \geq 1})$ такие, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = A_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = A_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = A_k, \quad k \geq 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\tilde{\alpha}_{i;N} := \alpha_{T+i+1;N}$ для всех $i \geq 1$. Легко видеть, что

$$T(\alpha_{1;N}^k + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k) \geq \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k \geq T \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k, \quad k \geq 2.$$

Из этого следует, что выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k = \frac{A_k}{T}, \quad k \geq 3.$$

Выбирая $\tilde{\gamma}_{1;N} = \gamma_{1;N}/T$ и $\tilde{\gamma}_{2;N} = \gamma_{2;N}/T$, мы получаем требуемую последовательность параметров.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Докажем сначала, что в качестве меры μ_V из теоремы 1 может выступать только свободно безгранично делимая мера.

Пусть последовательность параметров $w_N = (\gamma_{1;N}, \gamma_{2;N}, \{\alpha_{i;N}\}_{i \geq 1})$ удовлетворяет условию теоремы 1 и случайные матрицы, отвечающие ей, имеют предельный спектр μ_V . Отметим, что

$$f_{w_N}(X) = \exp \left(N \left(i \frac{\gamma_{1;N}}{N} \operatorname{tr}(X) + i^2 \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2 + \gamma_{2;N}}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} i^k \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{k} \operatorname{tr}(X^k) \right) \right),$$

где $X \in H(N)$. Из условий теоремы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{1;N}}{N} = t_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^2}{N} = t_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \alpha_{i;N}^k}{N} = t_k, \quad k \geq 3.$$

Заметим, что последовательности $\{c_k\}$ и $\{t_k\}$ связаны точно так же, как моменты и свободные кумулянты меры (см. уравнения (1.5) и (3.1)). Поскольку $\{c_k\}$ – это моменты меры μ_V , мы получаем, что выполнено равенство $t_k = \kappa_k(\mu_V)$ для любого $k \geq 1$. Нам нужно доказать существование меры $\mu_V^{1/T}$, $T \in \mathbb{N}$, относительно свободной свертки; эта мера должна удовлетворять условию

$$\underbrace{\mu_V^{1/T} \boxplus \mu_V^{1/T} \boxplus \dots \boxplus \mu_V^{1/T}}_{T-1 \text{ свертка}} = \mu_V.$$

Из уравнения (3.2) и теоремы 4 следует, что для этого достаточно найти последовательность параметров, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = \frac{t_1}{T}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = \frac{t_2}{T}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = \frac{t_k}{T}, \quad k \geq 3.$$

Существование таких параметров доказано в лемме 1, что завершает доказательство теоремы 2 в одну сторону.

Докажем теперь, что любая свободно безгранично делимая мера с компактным носителем может быть получена в качестве предела в теореме 1. Пусть даны произвольные $K_1 \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{K}$ (см. теорему 3), задающие такую меру.

Достаточно показать, что существует последовательность параметров таких, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{1;N}}{N} = K_1, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\gamma}_{2;N} + \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^2}{N} = m_0(\mathcal{K}),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_{i;N}^k}{N} = m_{k-2}(\mathcal{K}), \quad k \geq 3.$$

Идея рассуждения заключается в том, что дискретной мерой $1/N \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_{i;N})$ можно приблизить (в смысле слабой сходимости) любую меру на прямой, в частности, “меру” $\mathcal{K}/x^2$.

Более формально, для любого N на множестве $\mathbb{R} \setminus (-1/N; 1/N)$ можно определить конечную меру $\mathcal{K}/x^2$ по формуле

$$\frac{\mathcal{K}}{x^2}(A) := \int_A \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2}, \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Эту конечную меру можно приблизить дискретной мерой $1/N \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_{i;N})$. Это можно сделать, например, так: определим положительные параметры $\alpha_{i;N}$ по формулам $\alpha_{1;N} := \sup\{\text{support}(\mathcal{K})\}$ и

$$\alpha_{k+1;N} := \min\left(0, \inf\left\{y: \frac{k-1}{N} \leq \frac{\mathcal{K}}{x^2}(y; +\infty) < \frac{k}{N}\right\}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \left[N \cdot \frac{\mathcal{K}}{x^2}(0; +\infty)\right],$$

и аналогичным образом определим отрицательные $\alpha_{i;N}$. Легко видеть, что мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \alpha_i^k = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^k \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2} = m_{k-2}(\mathcal{K}), \quad k \geq 3,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i \geq 1} \alpha_i^2 = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x^2 \frac{d\mathcal{K}(x)}{x^2} = m_0(\mathcal{K}) - \mathcal{K}(\{0\}).$$

Определяя так же $\gamma_{2;N} = \mathcal{K}(\{0\})N$ и $\gamma_{1;N} = \kappa_1 N$, мы получаем искомое утверждение.

5. Тотальная положительность и свободная вероятность. Функция $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *тотально положительной*, если для любого натурального r и любых вещественных $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_r$ определитель матрицы $[\phi(x_i - y_j)]_{i,j=1}^r$ неотрицателен. Наложим также условие нормировки $\phi(0) = 1$. Задача о классификации нормированных тотально-положительных функций была решена Шенбергом в [7]. Оказывается, что все такие функции даются в точности формулой (1.1). Отметим, что это множество функций является полугруппой относительно операции умножения. Из теорем 1 и 2 следует

ТЕОРЕМА 5. Пусть ϕ_N – последовательность нормированных тотально положительных функций на $\mathbb{R}$, и пусть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \phi_N(x)}{N} = V(x), \quad \text{равномерно в окрестности 0.}$$

Рассмотрим разложение

$$-iV(ix) = t_1 + t_2x + t_3x^2 + \dots$$

Тогда множество наборов коэффициентов $\{t_k\}_{k \geq 1}$, которые могут возникнуть в таком пределе, совпадает с множеством наборов свободных кумулянтов свободно безгранично делимых мер.

Неформально говоря, данная теорема утверждает, что в некотором пределе тотально положительные функции на прямой переходят в свободно безгранично делимые распределения. Такая связь между объектами столь различной природы представляется любопытной. Отметим, что приведенное в данной работе доказательство основано на явных классификациях тотально-положительных функций и свободно безгранично делимых мер. Было бы интересно обнаружить какую-либо связь между этими объектами без использования классификационных теорем.

6. Частные случаи теоремы 1. а) Пусть $\gamma_{2;N} = c_2 N$, $c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, и остальные параметры равны 0. Тогда теорема 1 превращается в теорему Вигнера (для гауссовского унитарного ансамбля).

б) Пусть $\alpha_{1;N} = \dots = \alpha_{[c_1 N]} = c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, и все остальные параметры равны 0. Тогда теорема 1 дает теорему Марченко–Пастура для уишартовских матриц (с гауссовским распределением элементов матриц).

в) Пусть параметры таковы, что $(1/N) \sum_{i \geq 1} \delta(\alpha_i)$ сходится в слабом смысле к конечной мере μ_P , и пусть $\gamma_{1;N} = \sum_{i \geq 1} \alpha_i$, $\gamma_{2;N} = 0$. Теорема 1 показывает, что для таких параметров в пределе возникает свободная составная пуассоновская мера (см. определение, например, в [4; гл. 15]).

Я глубоко признателен А.М. Бородину и Г.И. Ольшанскому за чрезвычайно полезные обсуждения данного материала.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Olshanski, A. Vershik, “Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices”, *Contemporary Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 137–175.
- [2] А.М. Вершик, “Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечномерных групп”, *Докл. АН СССР*, **218**:4 (1974), 749–752.
- [3] A. Borodin, A. Bufetov, G. Olshanski, “Limit shapes for growing extreme characters of $U(\infty)$ ”, *Ann. Appl. Probab.*, **25**:4 (2015), 2339–2381.
- [4] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the Combinatorics of Free Probability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **335**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [5] D. Voiculescu, “Addition of certain non-commuting random variables”, *J. Funct. Anal.*, **66**:3 (1986), 323–346.
- [6] L. Pastur, V. Vasilchuk, “On the law of addition of random matrices”, *Comm. Math. Phys.*, **214**:2 (2000), 249–286.
- [7] I. J. Schoenberg, “On Pólya frequency functions. I. The totally positive functions and their Laplace transforms”, *J. Anal. Math.*, **1** (1951), 331–374.

Ал. И. Буфетов

Математический институт им. В.А. Стеклова

Российской академии наук

E-mail: alexey.bufetov@gmail.com

Поступило

23.09.2015