Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Мельник, Усреднение некоторых квазидифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 587–593

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1084>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:10:57

УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. А. Мельник

Для квазидифференциальных уравнений с малым параметром дано обоснование одной схемы метода усреднения, откуда следуют соответствующие результаты для дифференциальных уравнений и включений.

Библиография: 12 названий.

Для приближенного решения дифференциальных уравнений с малым параметром широко применяется метод усреднений [1], распространенный и на дифференциальные уравнения с многозначной правой частью [2]–[4].

Введение понятия квазидифференциального уравнения [5] позволяет рассматривать дифференциальные уравнения, дифференциальные включения и уравнения с производной Хукухары с единых позиций. Обоснование одной схемы метода усреднения для квазидифференциальных уравнений было проведено в [6].

В данной работе рассматривается другая схема метода усреднения на конечном промежутке времени, которая позволяет получить ряд результатов для дифференциальных уравнений как с однозначной, так и многозначной правой частью, включая и некоторые известные результаты [2]–[4], [7], [8].

1. Квазидифференциальные уравнения. Пусть W – локально компактное пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$. Отображение $g: [0, \sigma] \times [t_0, t_0 + T) \times W \rightarrow W$ задает квазидвижение [6], если выполнены

- 1) аксиома начальных условий: $g(0, \tau, x_0) = x_0$;
- 2) аксиома квазиприспособывания:

$$d\left(G_n, g\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k, t, G_0\right)\right) = o\left(\sum_{k=1}^n \Delta_k\right),$$

где

$$G_i = g\left(\Delta_i, t + \sum_{k=1}^{i-1} \Delta_k, G_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

- 3) аксиома непрерывности: $g(\Delta, \tau, x)$ непрерывно по Δ и x .

Квазидифференциальным уравнением динамической системы [5] называется уравнение

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} d(x(\tau + \Delta), g(\Delta, \tau, x(\tau))) = 0.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим квазидифференциальное уравнение

$$d(x(t + \Delta, \varepsilon), q(\Delta, t, \varepsilon t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)) = o(\varepsilon \Delta), \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $d(\cdot, \cdot)$ – расстояние в локально компактном метрическом пространстве W ; отображение $g(\varepsilon \Delta, t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) = q(\Delta, t, \varepsilon t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)$ задает квазидвижение в метрическом пространстве W .

Поставим в соответствие уравнению (1) “усредненное” уравнение

$$d(\bar{x}(t + \Delta, \varepsilon), \bar{q}(\Delta, t, \varepsilon t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon)) = o(\varepsilon \Delta), \quad (2)$$

где отображение $\bar{g}(\varepsilon \Delta, t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \bar{q}(\Delta, t, \varepsilon t, \bar{x}(t, \varepsilon), \varepsilon)$ задает квазидвижение в пространстве W , причем

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon \delta} d(q(\delta, t, \tau, x, \varepsilon), \bar{q}(\delta, t, \tau, x, \varepsilon)) = 0. \quad (3)$$

3. Аналог первой теоремы Боголюбова. Имеет место аналог первой теоремы Боголюбова для дифференциальных уравнений [7].

ТЕОРЕМА 1. Пусть в области $Q \subset W$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $t \geq 0$ и $\Delta \in [0, \sigma]$ выполнены условия 1)–3) и следующие:

- 4) отображения $q(\Delta, t, \tau, x, \varepsilon)$ и $\bar{q}(\Delta, t, \tau, x, \varepsilon)$ непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по Δ с константой $\varepsilon \lambda > 0$ и неравенствам

$$\begin{aligned} |d(q(\Delta, t, \tau, x', \varepsilon), q(\Delta, t, \tau, x'', \varepsilon)) - d(x', x'')| &\leq \varepsilon \gamma \Delta d(x', x''), \\ |d(\bar{q}(\Delta, t, \tau, x', \varepsilon), \bar{q}(\Delta, t, \tau, x'', \varepsilon)) - d(x', x'')| &\leq \varepsilon \gamma \Delta d(x', x''); \end{aligned}$$

- 5) равномерно относительно $x \in Q$ и $\tau \geq 0$ существует предел (3);
6) решение $\bar{x}(t, \varepsilon)$ усредненного уравнения (2) с начальным условием $\bar{x}(0, \varepsilon) = x_0 \in \text{int } Q$ определено для всех $t \geq 0$ и лежит вместе с ρ -окрестностью в области Q .

Тогда для решений $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ уравнений (1) и (2) соответственно, удовлетворяющих условию $x(0, \varepsilon) = \bar{x}(0, \varepsilon) = x_0$, для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L/\varepsilon]$ справедливо неравенство

$$d(x(t, \varepsilon), \bar{x}(t, \varepsilon)) \leq \eta. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы существования [6] решение $x(t, \varepsilon)$ квазидифференциального уравнения (1) существует и продолжимо при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ при условии $x(t, \varepsilon) \in Q$. Единственность решений $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ квазидифференциальных уравнений (1) и (2) соответственно вытекает из условия 4) (см. [6], [9]), причем решения $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ являются равномерными пределами при $\Delta \rightarrow 0$ соответствующих обобщенных ломаных Эйлера:

$$\begin{aligned} l(t, \varepsilon) &= q(t - t_i, t_i, \varepsilon t_i, l(t_i, \varepsilon), \varepsilon), \quad \bar{l}(t, \varepsilon) = \bar{q}(t - t_i, t_i, \varepsilon t_i, \bar{l}(t_i, \varepsilon), \varepsilon), \\ t_i &\leq t \leq t_{i+1}, \quad l(0, \varepsilon) = \bar{l}(0, \varepsilon) = x_0; \end{aligned}$$

здесь Δ – ранг разбиения промежутка $[0, T(\varepsilon)]$ точками t_i .

Выберем произвольное $\eta > 0$ и $L > 0$. В силу условия 5) существует $\varepsilon_0 > 0$ (выберем его меньшим $\eta/(8\lambda)$) такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при $\delta = \varepsilon^{-1/4}$ ($\delta \geq \varepsilon_0^{-1/4}$) выполняется неравенство

$$d(q(\delta, t, \varepsilon t, x, \varepsilon), \bar{q}(\delta, t, \varepsilon t, x, \varepsilon)) \leq \varepsilon \delta r(\delta), \quad \text{где } r(\delta) \leq \frac{\eta}{4(e^{\gamma L} - 1)}. \quad (5)$$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0, \infty)$ точками $t^k = k\delta$, $k = 0, 1, \dots$, $\delta = \varepsilon^{-1/4}$, затем точками $t_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \dots$, где $\Delta = \delta/m$. В силу равномерной сходимости ломаных Эйлера существует $\Delta_0(\eta) > 0$ такое, что при $0 < \Delta \leq \Delta_0$ и $t \in [0, T(\varepsilon)]$

$$d(x(t, \varepsilon), l(t, \varepsilon)) \leq \frac{\eta}{4}, \quad d(\bar{x}(t, \varepsilon), \bar{l}(t, \varepsilon)) \leq \frac{\eta}{4}, \quad (6)$$

т.е. неравенства (6) выполняются для всех $m(\varepsilon) \geq m_0$.

Используя неравенство треугольника, неравенство (5) и условия 1)–4), получим оценку

$$\begin{aligned} & d(l(t^k, \varepsilon), \bar{l}(t^k, \varepsilon)) \\ &= d(q(\Delta, t^k - \Delta, \varepsilon(t^k - \Delta), l(t^k - \Delta, \varepsilon), \varepsilon), \bar{q}(\Delta, t^k - \Delta, \varepsilon(t^k - \Delta), \bar{l}(t^k - \Delta, \varepsilon), \varepsilon)) \\ &\leq d(q(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, l(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon), \bar{q}(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, \bar{l}(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon)) + o(\varepsilon \delta) \\ &\leq d(q(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, l(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon), q(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, \bar{l}(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon)) \\ &\quad + d(q(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, \bar{l}(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon), \bar{q}(\delta, t^{k-1}, \varepsilon t^{k-1}, \bar{l}(t^{k-1}, \varepsilon), \varepsilon)) + o(\varepsilon \delta) \\ &\leq (1 + \varepsilon \gamma \delta) d(l(t^{k-1}, \varepsilon), \bar{l}(t^{k-1}, \varepsilon)) + \varepsilon \delta r(\delta) + o(\varepsilon \delta) \\ &\leq (\varepsilon \delta r(\delta) + o(\varepsilon \delta)) (1 + (1 + \varepsilon \gamma \delta) + \dots + (1 + \varepsilon \gamma \delta)^{k-1}) \\ &\leq (\varepsilon \delta r(\delta) + o(\varepsilon \delta)) \frac{(1 + \varepsilon \gamma \delta)^k - 1}{\varepsilon \gamma \delta}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда при $0 \leq t^k \leq L/\varepsilon$

$$d(l(t^k, \varepsilon), \bar{l}(t^k, \varepsilon)) \leq \left(r(\delta) + \frac{o(\varepsilon \delta)}{\varepsilon \gamma \delta} \right) (e^{\gamma L} - 1). \quad (7)$$

Рассмотрим произвольное $t > 0$. Пусть $t \in (t^k, t^{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $t^k + j\Delta \leq t \leq t^k + j\Delta + \Delta$, где $0 < j < m$, и

$$\begin{aligned} & d(l(t, \varepsilon), \bar{l}(t, \varepsilon)) \\ &= d(q(t - t^k - j\Delta, t^k + j\Delta, \varepsilon(t^k + j\Delta), l(t^k + j\Delta, \varepsilon), \varepsilon), \\ &\quad \bar{q}(t - t^k - j\Delta, t^k + j\Delta, \varepsilon(t^k + j\Delta), \bar{l}(t^k + j\Delta, \varepsilon), \varepsilon)) \\ &\leq d(q(t - t^k, t^k, \varepsilon t^k, l(t^k, \varepsilon), \varepsilon), \bar{q}(t - t^k, t^k, \varepsilon t^k, \bar{l}(t^k, \varepsilon), \varepsilon)) + o(\varepsilon j \Delta) \\ &\leq d(q(t - t^k, t^k, \varepsilon t^k, l(t^k, \varepsilon), \varepsilon), q(0, t^k, \varepsilon t^k, l(t^k, \varepsilon), \varepsilon)) + d(l(t^k, \varepsilon), \bar{l}(t^k, \varepsilon)) \\ &\quad + d(\bar{q}(0, t^k, \varepsilon t^k, \bar{l}(t^k, \varepsilon), \varepsilon), \bar{q}(t - t^k, t^k, \varepsilon t^k, \bar{l}(t^k, \varepsilon), \varepsilon)) + o(\varepsilon \delta) \\ &\leq 2\varepsilon \lambda \delta + d(l(t^k, \varepsilon), \bar{l}(t^k, \varepsilon)) + o(\varepsilon \delta). \end{aligned} \quad (8)$$

Уменьшим $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$2\lambda\varepsilon^{3/4} + o(\varepsilon\delta) + \frac{o(\varepsilon\delta)}{\varepsilon\delta\gamma}(e^{\gamma L} - 1) \leq \frac{\eta}{4}. \quad (9)$$

Из неравенств (7)–(9) при $t \in [0, L/\varepsilon]$ заключаем, что

$$d(l(t, \varepsilon), \bar{l}(t, \varepsilon)) \leq \frac{\eta}{2}. \quad (10)$$

Из неравенств (6) и (10) при $t \in [0, L/\varepsilon]$ вытекает неравенство (4), т.е.

$$d(x(t, \varepsilon), \bar{x}(t, \varepsilon)) \leq d(x(t, \varepsilon), l(t, \varepsilon)) + d(l(t, \varepsilon), \bar{l}(t, \varepsilon)) + d(\bar{l}(t, \varepsilon), \bar{x}(t, \varepsilon)) \leq \eta.$$

Таким образом, в силу условия 6) решение $x(t, \varepsilon) \in Q$ при $t \in [0, L/\varepsilon]$, т.е. $T(\varepsilon) = L/\varepsilon$.

4. Частные случаи теоремы 1. Введем обозначения

$$q(\Delta, t, \tau, x, \varepsilon) = x + \varepsilon \int_t^{t+\Delta} F(s, \tau, x) ds, \quad \bar{q}(\Delta, t, \tau, x, \varepsilon) = x + \varepsilon \int_t^{t+\Delta} \bar{F}(s, \tau, x) ds,$$

где отображения $F, \bar{F}: R^2 \times Q \rightarrow W$ ($Q \subset U$) такие, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \tau, x) ds = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{F}(s, \tau, x) ds \quad (11)$$

(сходимость рассматривается в метрике соответствующего пространства W).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предельное равенство (11) задает схему частичного усреднения. Если отображение $\bar{F}(s, \tau, x)$ не зависит от s , то получаем схему полного усреднения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \tau, x) ds = \bar{F}(\tau, x).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$, $d(x', x'') = \|x' - x''\|$. Решения $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ квазидифференциальных уравнений (1) и (2) удовлетворяют системам дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varepsilon F(t, \varepsilon t, x)$, для схемы частичного усреднения $\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{F}(t, \varepsilon t, x)$, для схемы полного усреднения $\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{F}(\varepsilon t, x)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $W = U = \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $d(x', x'') = h(x', x'')$, где $h(A, B)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B , т.е.

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset B + S_r(0), B \subset A + S_r(0)\}, \quad S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\};$$

$\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ – пространство непустых выпуклых компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Интеграл от многозначного отображения в (11) понимается в смысле обобщенного интеграла Римана. В этом случае решения $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ квазидифференциальных уравнений (1) и (2) соответственно совпадают с решениями $X(t, \varepsilon)$ и $\bar{X}(t, \varepsilon)$ дифференциальных уравнений с производной Хукухары [10] $DX = \varepsilon F(t, \varepsilon t, X)$, для схемы частичного усреднения $D\bar{X} = \varepsilon \bar{F}(t, \varepsilon t, X)$, для схемы полного усреднения $D\bar{X} = \varepsilon \bar{F}(\varepsilon t, X)$.

Производная Хукухары $DX(\tau) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} h\left(\frac{X(t) - X(\tau)}{t - \tau}, DX(\tau)\right) = \lim_{t \rightarrow \tau-0} h\left(\frac{X(\tau) - X(t)}{\tau - t}, DX(\tau)\right).$$

Введем обозначения

$$q(\Delta, t, \tau, R, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \left(x + \varepsilon \int_t^{t+\Delta} F(s, \tau, x) ds \right),$$

$$\bar{q}(\Delta, t, \tau, \bar{R}, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \bar{\mathbb{R}}} \left(x + \varepsilon \int_t^{t+\Delta} \bar{F}(s, \tau, x) ds \right),$$

где $F, \bar{F}: \mathbb{R}^2 \times Q \rightarrow W$ – многозначные отображения, $Q \subset U$.

ПРИМЕР 3. Пусть $U = \mathbb{R}^n$, $W = \text{comp}(U)$, где $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ – пространство непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой $d(R', R'') = h(R', R'')$. Интеграл от многозначного отображения в (11) является интегралом Аумана от многозначной функции $G: [t_1, t_2] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t) dt = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \mid g(t) \in G(t) \right\},$$

где в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным ветвям $g(t) \in G(t)$, для которых он существует. Решения $x(t, \varepsilon)$ и $\bar{x}(t, \varepsilon)$ квазидифференциальных уравнений (1) и (2) являются R -решениями [11], т.е. сечениями пучка решений включений:

исходного

$$\dot{y} \in \varepsilon \text{conv } F(t, \varepsilon t, y), \quad (12)$$

частично усредненного

$$\dot{\bar{y}} \in \varepsilon \text{conv } \bar{F}(t, \varepsilon t, \bar{y}) \quad (13)$$

и усредненного

$$\dot{\bar{y}} \in \varepsilon \text{conv } \bar{F}(\varepsilon t, \bar{y}). \quad (14)$$

Заметим, что в силу теоремы из [12] каждое решение включения (12), (13) или (14) является пределом равномерно сходящейся последовательности решений включения $\dot{y} \in \varepsilon F(t, \varepsilon t, y)$, $\dot{\bar{y}} \in \varepsilon \bar{F}(t, \varepsilon t, \bar{y})$ или $\dot{\bar{y}} \in \varepsilon \bar{F}(\varepsilon t, \bar{y})$ соответственно.

ПРИМЕР 4. Пусть $U = \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $W = \text{conv}(U)$, метрика в пространстве W

$$d(R', R'') = \delta(R', R'') = \max \left\{ \sup_{A \in R'} \inf_{B \in R''} h(A, B), \sup_{A \in R''} \inf_{B \in R'} h(A, B) \right\}.$$

Под интегралом от многозначного отображения в (11) понимается интеграл Аумана–Хукухары [4], т.е. для $G: [t_1, t_2] \rightarrow \text{comp}(\text{conv}(\mathbb{R}^n))$

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t) dt = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt \in \text{conv}(\mathbb{R}^n) \mid g(t) \in G(t) \right\},$$

где интеграл от многозначного отображения $g(t)$ является обобщенным интегралом Римана.

Решения $x(t, \mu)$ и $\bar{x}(t, \mu)$ квазидифференциальных уравнений (1) и (2) совпадают с сечениями $R(t, \varepsilon)$ и $\bar{R}(t, \varepsilon)$ множеств решений $Y(t, \varepsilon)$ и $\bar{Y}(t, \varepsilon)$ соответственно следующих включений:

$$\begin{aligned} &\text{исходного } DY \in \varepsilon F(t, \varepsilon t, Y), \\ &\text{частично усредненного } D\bar{Y} \in \varepsilon \bar{F}(t, \varepsilon t, \bar{Y}) \\ &\text{или усредненного } D\bar{Y} \in \varepsilon \bar{F}(\varepsilon t, \bar{Y}). \end{aligned}$$

Для рассмотренных частных случаев квазидифференциальных уравнений условия 4)–6) заменим на следующие:

- 7) отображения $F(t, \tau, x)$, $\bar{F}(t, \tau, x)$ измеримы по t , непрерывны по τ и существуют суммируемые функции $\Lambda(t)$ и $\Gamma(t)$, константы $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} F(t, \tau, x) &\subset S_{\Lambda(t)}(0), & \bar{F}(t, \tau, x) &\subset S_{\Lambda(t)}(0), \\ d(F(t, \tau, x'), F(t, \tau, x'')) &\leq \Gamma(t) d_y(x', x''), & d(\bar{F}(t, \tau, x'), \bar{F}(t, \tau, x'')) &\leq \Gamma(t) d_y(x', x''), \end{aligned}$$

где $d_y(\cdot, \cdot)$ – метрика пространства U ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t) dt \leq \lambda(t_2 - t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} \Gamma(t) dt \leq \gamma(t_2 - t_1)$$

для всех $t \geq 0$, $t_2 \geq t_1 \geq 0$, $\tau \geq 0$;

- 8) равномерно по τ и x существует предел (11);
9) соответствующее (частично) усредненное уравнение (включение) с начальным условием $x_0 \in \text{int } Q$ имеет решение, лежащее в Q вместе со своей ρ -окрестностью, при $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия 7)–9). Тогда для решений дифференциального уравнения (включения) и соответствующего (частично) усредненного уравнения (включения) с начальным условием x_0 , для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L/\varepsilon]$ справедливо неравенство (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если отображения $F(t, \tau, x)$ и $\bar{F}(t, \tau, x)$ непрерывны по t , то возьмем в условии 7) $\Gamma(t) = \gamma$, $\Lambda(t) = \lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если условие 7) в случае полного усреднения выполняется для отображения $F(t, \tau, x)$, то оно выполняется и для отображения $\bar{F}(\tau, x)$ (см. [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если исключить из рассмотрения медленное время εt , то для непрерывных отображений $F(t, x)$ в случае полного усреднения получим для примера 1 первую теорему Боголюбова [7], для примера 2 аналог теоремы Боголюбова для дифференциальных уравнений с производной Хукухары [3], для примера 3 аналог теоремы Боголюбова для дифференциальных включений [2], для примера 4 аналог теоремы Боголюбова для дифференциальных включений с производной Хукухары [4]. Теорема 2 содержит и другие результаты по частичному усреднению [2], усреднению дифференциальных уравнений с измеримой правой частью [8] в случае отсутствия медленного времени εt .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
- [2] Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления. Киев–Одесса: Лыбидь, 1992.
- [3] Kisilewicz M. Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // *Rend. Mat. Appl.* (7). 1976. V. 9. №3. P. 397–408.
- [4] Плотников В. А., Яровой А. Т. Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида на конечном промежутке // *Укр. матем. ж.* 1979. Т. 31. №2. С. 166–171.
- [5] Панасюк А. И. О квазидифференциальных уравнениях в метрических пространствах // *Дифференц. уравнения*. 1985. Т. 21. №8. С. 1344–1353.
- [6] Плотников В. А., Плотникова Л. И. Асимптотические методы в теории квазидифференциальных уравнений // *Деп. ГНТБ Украины* 20.04.94. №825-Ук94. Киев: ГНТБ, 1994.
- [7] Боголюбов Н. Н., Митропольский И. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [8] Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. Исследование резонансных многочастотных систем. М.: Наука, 1986.
- [9] Plotnikov V., Kitanov P. Continuous dependence of solutions of quasidifferential equations with impulses // *Discrete mathematics and applications (Blagoevgrad 1994)*. *Res. Math.* V. 5. Blagoevgrad: “Neofit Rilski” South-West Univ. Publ. House, 1995. P. 238–245.
- [10] De Blasi F. S., Jervolino F. Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso // *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7). 1969. V. 4. №2. P. 491–501.
- [11] Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. Минск: Изд-во БГУ, 1977.
- [12] Piangiani G. On the fundamental theory of multivalued differential equations // *J. Differential Equations*. 1977. V. 25. №1. P. 30–38.

Институт математики, экономики и механики Одесского университета

Поступило

13.05.96

Исправленный вариант

26.01.98