Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов, М. Е. Нурсултанов, Теорема Харди–Литтлвуда для кратных рядов Фурье с монотонными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 502–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 03:10:58

УДК 517.52

Теорема Харди–Литтлвуда для кратных рядов Фурье с монотонными коэффициентами

М. И. Дьяченко, Е. Д. Нурсултанов, М. Е. Нурсултанов

Как было доказано ранее, для кратных рядов Фурье с коэффициентами, монотонными по каждому индексу, классическая теорема Харди–Литтлвуда неверна при $p \leq 2m/(m+1)$, где m – размерность пространства. В статье устанавливается, каким образом следует модифицировать теорему в этом случае.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10844

1. Введение. Хорошо известна следующая теорема Харди–Литтлвуда [1; с. 657]. Здесь и ниже $T = [-\pi, \pi)$.

ТЕОРЕМА А. Пусть последовательность $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ коэффициентов тригонометрического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \quad (1.1)$$

действительна и монотонно невозрастает. Тогда если число $p \in (1, \infty)$, то ряд (1.1) является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L_p(T)$ в том и только том случае, когда

$$J_p(\mathbf{a}) \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} \right)^{1/p} < \infty.$$

При этом существует постоянная $C(p) > 0$ такая, что если $J_p(\mathbf{a}) < \infty$, то

$$\|f\|_p \leq C(p) J_p(\mathbf{a}).$$

Для кратных тригонометрических рядов существуют различные определения монотонности последовательности их коэффициентов. Наиболее часто используется монотонность в смысле Харди.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-01236) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3682.2014.1). Работа второго автора поддержана МОН РК (гранты 4080/ГФ4, 3311/ГФ4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть натуральное $m \geq 2$. Тогда m -кратная последовательность $\mathbf{a} = \{a_{n_1, \dots, n_m}\}_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty}$ называется *монотонно невозрастающей в смысле Харди*, если

$$a_{n_1, \dots, n_m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m \rightarrow \infty$$

и

$$\Delta \mathbf{a}_{n_1, \dots, n_m} = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \{0, 1\}} (-1)^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} a_{n_1 + \gamma_1, \dots, n_m + \gamma_m} \geq 0$$

при всех $n_1, \dots, n_m \geq 1$.

Как установил Мориц [2], для двойных рядов с коэффициентами, монотонными в смысле Харди, справедлива следующая двумерная версия теоремы Харди–Литтлвуда (в работе Морица утверждение было установлено для косинус-рядов, но это не оказывает существенного влияния на доказательство).

ТЕОРЕМА В. Пусть последовательность $\mathbf{a} = \{a_{n_1, \dots, n_m}\}_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty}$ коэффициентов тригонометрического ряда

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^m} a_{n_1, \dots, n_m} e^{i \sum_{j=1}^m n_j x_j} \quad (1.2)$$

действительна и монотонно не возрастает. Тогда если число $p \in (1, \infty)$, то ряд (1.2) является рядом Фурье некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ в том и только том случае, когда

$$J_p(\mathbf{a}) \equiv \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^m} a_{n_1, \dots, n_m}^p \prod_{j=1}^m n_j^{p-2} \right)^{1/p} < \infty.$$

При этом существует постоянная $C(p) > 0$ такая, что если $J_p(\mathbf{a}) < \infty$, то

$$\|f\|_p \leq C(p) J_p(\mathbf{a}). \quad (1.3)$$

Условие монотонности в смысле Харди является довольно жестким. В частности, ему не удовлетворяют последовательности коэффициентов сферических, треугольных и многих других ядер Дирихле. Поэтому представляется естественным ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть натуральное $m \geq 2$. Тогда m -кратная последовательность $\mathbf{a} = \{a_{n_1, \dots, n_m}\}_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty}$ называется *монотонной по каждому индексу*, если

$$a_{n_1, \dots, n_m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_m \rightarrow \infty$$

и из того, что

$$k_1 \geq n_1 \geq 1, \quad \dots, \quad k_m \geq n_m \geq 1,$$

вытекает, что $0 \leq a_{k_1, \dots, k_m} \leq a_{n_1, \dots, n_m}$.

Легко заметить, что если последовательность монотонна в смысле Харди, то она монотонна и по каждому индексу. Обратное, вообще говоря, неверно.

Кратные тригонометрические ряды с коэффициентами, монотонными по каждому индексу, изучались в работах [3]–[5] Дьяченко. Нурсултанов [6], [7] установил аналоги теоремы Харди–Литтлвуда для более широких классов функций. Ряды с обобщенно-монотонными коэффициентами рассматривались также в статьях [8]–[10] Дьяченко и Тихонова.

В частности, в [3]–[5] были установлены такие результаты.

ТЕОРЕМА С. Пусть последовательность $\mathbf{a}$ коэффициентов ряда

$$\sum_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_m x_m)} \quad (1.4)$$

монотонна по каждому индексу, число $p \in (1, \infty)$ и ряд (1.4) является рядом Фурье некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$. Тогда

$$J_p(\mathbf{a}) \equiv \left(\sum_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m}^p n_1^{p-2} \dots n_m^{p-2} \right)^{1/p} < \infty.$$

ТЕОРЕМА Д. Пусть последовательность $\mathbf{a}$ коэффициентов ряда (1.4) монотонна по каждому индексу, число $p \in (2m/(m+1), \infty)$ и $J_p(\mathbf{a}) < \infty$. Тогда этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и выполняется условие (1.3). При этом, если $p \in (1, 2m/(m+1)]$ и $J_p(\mathbf{a}) < \infty$, то, вообще говоря, ряд (1.2) не обязан быть даже рядом Фурье–Лебега.

Следует отметить, что теорема С при $1 < p \leq 2$ и теорема Д при $p \geq 2$ являются частными случаями общей теоремы Пэли.

В связи с последним утверждением теоремы Д возникают два вопроса.

ВОПРОС 1. Если ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$, число $p \in (1, 2m/(m+1)]$ и $J_p(\mathbf{a}) < \infty$, то верно ли, что $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$?

ВОПРОС 2. Если ответ на первый вопрос отрицателен, то можно ли указать усреднение функции $f(\mathbf{x})$ до некоторой функции $g(\mathbf{x})$ такое, что $g(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$?

Нам не удалось получить ответ на первый вопрос для двойных рядов, но ниже, в п. 4 будет показано, что для размерности 3 ответ на аналог первого вопроса отрицателен. В связи с этим можно предположить, что и для размерности 2 дело обстоит аналогично. Поэтому решение второй проблемы представляется актуальным, и данная работа, в основном, посвящена этому.

Сформулируем центральный результат статьи. Для $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$ определим функцию

$$\bar{f}(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{y_1 \dots y_m} \left| \int_0^{y_1} \dots \int_0^{y_m} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \right|,$$

где $y_i \in T \setminus \{0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \geq 2$, $1 < p < 2$, функция $f(x_1, \dots, x_m) \in L(T^m)$ и имеет ряд Фурье вида (1.4), где последовательность $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}^m}$ монотонна по каждому индексу. Тогда для того, чтобы $J_p(\mathbf{a}) < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{f}(y_1, \dots, y_m) \in L_p(T^m).$$

2. Вспомогательные результаты. Следующая лемма является модификацией утверждения, доказанного в [4].

ЛЕММА 1. Пусть тригонометрический полином

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{M_m} a_{k_1, \dots, k_m} \sin k_1 x_1 \cdots \sin k_m x_m,$$

где $a_{n_1, \dots, n_m} \geq a_{k_1, \dots, k_m} \geq 0$ при $1 \leq n_1 \leq k_1, \dots, 1 \leq n_m \leq k_m$. Тогда если

$$F_Q(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} Q(t_1, \dots, t_m) dt_1 \cdots dt_m$$

при $x_1, \dots, x_m \in (0, \pi]$, а $\alpha = 1/\sin^{2m}(\pi/8)$, то при всех

$$1 \leq n_1 \leq M_1, \quad \dots, \quad 1 \leq n_m \leq M_m, \quad (2.1)$$

$$u_1 \in \left[\frac{\pi}{n_1 + 1}, \frac{\pi}{n_1} \right], \quad \dots, \quad u_m \in \left[\frac{\pi}{n_m + 1}, \frac{\pi}{n_m} \right] \quad (2.2)$$

имеем

$$a_{n_1, \dots, n_m} \leq \alpha F_Q(u_1, \dots, u_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} Q(t_1, \dots, t_m) dt_1 \cdots dt_m \\ &= \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{M_m} \frac{a_{k_1, \dots, k_m}}{k_1 \cdots k_m} (1 - \cos k_1 x_1) \cdots (1 - \cos k_m x_m) \\ &= 2^m \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{M_m} \frac{a_{k_1, \dots, k_m}}{k_1 \cdots k_m} \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_1 x_1 \right) \cdots \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_m x_m \right). \end{aligned}$$

Если натуральное $n \geq 2$, $[n/2] \leq k \leq n$, а число $u \in [\pi/(n+1), \pi/n]$, то

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{ku}{2} \geq \frac{\pi}{8}.$$

Теперь, если выполнены (2.1) и (2.2), то

$$\begin{aligned} & F_Q(u_1, \dots, u_m) \\ &= 2^m \sum_{k_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{M_m} \frac{a_{k_1, \dots, k_m}}{k_1 \cdots k_m} \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_1 u_1 \right) \cdots \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_m u_m \right) \\ &\geq 2^m \frac{a_{n_1, \dots, n_m}}{n_1 \cdots n_m} \sum_{k_1=\max(1, [n_1/2])}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=\max(1, [n_m/2])}^{n_m} \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_1 u_1 \right) \cdots \left(\sin^2 \frac{1}{2} k_m u_m \right) \\ &\geq 2^m \frac{a_{n_1, \dots, n_m}}{n_1 \cdots n_m} \frac{1}{\alpha} \frac{n_1}{2} \cdots \frac{n_m}{2} = \frac{1}{\alpha} a_{n_1, \dots, n_2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m) \in L(T^m)$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m} (\sin n_1 x_1) \cdots (\sin n_m x_m), \quad (2.3)$$

где последовательность $\mathbf{a} = \{a_{n_1, \dots, n_m}\}_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty}$ монотонна по каждому индексу, а функция

$$F_f(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} f(t_1, \dots, t_m) dt_1 \cdots dt_m$$

при $x_1, \dots, x_m \in (0, \pi]$. Тогда если $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, то при всех

$$u_1 \in \left[\frac{\pi}{n_1 + 1}, \frac{\pi}{n_1} \right], \quad \dots, \quad u_m \in \left[\frac{\pi}{n_m + 1}, \frac{\pi}{n_m} \right] \quad (2.4)$$

имеем

$$a_{n_1, \dots, n_m} \leq \alpha F_f(u_1, \dots, u_m),$$

где число α было определено в лемме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – натуральное число. Рассмотрим чезаровские средние

$$\sigma_M(f; (x_1, \dots, x_m)) = \frac{1}{(M+1)^m} \sum_{n_1=0}^M \cdots \sum_{n_m=0}^M S_{n_1, \dots, n_m}(f; (x_1, \dots, x_m)), \quad (2.5)$$

где $S_{n_1, \dots, n_m}(f; (x_1, \dots, x_m))$ – соответствующая прямоугольная частичная сумма ряда (2.3). Отметим, что поскольку коэффициенты $\mathbf{a}$ ряда (2.3) были монотонны по каждому индексу, этим же свойством обладают и коэффициенты $\mathbf{b}$ средних (2.5). Кроме того,

$$b_{n_1, \dots, n_m} = a_{n_1, \dots, n_m} \frac{(M - n_1 + 1) \cdots (M - n_m + 1)}{(M + 1)^m}$$

при $1 \leq n_1 \leq M, \dots, 1 \leq n_m \leq M$. Теперь, если $M \geq \max(n_1, \dots, n_m)$ и выполнено (2.4), то, применяя лемму 1, получим

$$b_{n_1, \dots, n_m} \leq \alpha F_{\sigma(f)}(u_1, \dots, u_m). \quad (2.6)$$

Если теперь при фиксированных $n_1, \dots, n_m$ устремим $M \rightarrow \infty$, то

$$b_{n_1, \dots, n_m} \rightarrow a_{n_1, \dots, n_m}.$$

В то же время средние $\sigma_M(f; (x_1, \dots, x_m)) \rightarrow f(x_1, \dots, x_m)$ в метрике $L(T^m)$, откуда

$$F_{\sigma(f)}(u_1, \dots, u_m) \rightarrow F_f(u_1, \dots, u_m).$$

Но тогда из оценки (2.6) получаем утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m) \in L(T^m)$ и имеет ряд Фурье вида (1.2), где последовательность $\mathbf{a} = \{a_{n_1, \dots, n_m}\}_{n_1, \dots, n_m=1}^{\infty}$ монотонна по каждому индексу, а функция

$$\begin{aligned} G_f(x_1, \dots, x_m) \\ = \frac{1}{2^m i^m} \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m = \pm 1} (-1)^{l(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} f(\gamma_1 t_1, \dots, \gamma_m t_m) dt_1 \cdots dt_m \end{aligned}$$

при $x_1, \dots, x_m \in (0, \pi]$, где $l(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ – число компонент вектора $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, равных -1 . Тогда если $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, то при всех

$$u_1 \in \left[\frac{\pi}{n_1 + 1}, \frac{\pi}{n_1} \right], \quad \dots, \quad u_m \in \left[\frac{\pi}{n_m + 1}, \frac{\pi}{n_m} \right]$$

имеем

$$a_{n_1, \dots, n_m} \leq \alpha G_f(u_1, \dots, u_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что функция

$$\frac{1}{2^{m_i m}} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m = \pm 1} (-1)^{l(\gamma_1, \dots, \gamma_m)} f(\gamma_1 t_1, \dots, \gamma_m t_m) \in L(T^m)$$

и имеет ряд Фурье вида (2.3), а тогда можно применить лемму 2.

Нам понадобится утверждение теоремы 7 из [7]. Приведем его в удобной для нас форме.

ЛЕММА 4. Пусть $p \in (1, \infty)$, M – множество всех отрезков из тора T . Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m) \in L(T^m)$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} \widehat{f}(k_1, \dots, k_m) e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m)}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|f(\cdot, M)\|_{L_p(\mathbb{T}^m)} \leq C_p \left(\sum_{r \in \mathbb{N}^m} (a_{r_1 \dots r_m}^{*1 \dots *m})^p \prod_{j=1}^m r_j^{p-2} \right)^{1/p}, \quad (2.7)$$

где $\{a_{r_1 \dots r_m}^{*1 \dots *m}\}_{r \in \mathbb{N}^m}$ – повторная невозрастающая перестановка последовательности $\{\widehat{f}(k_1, \dots, k_m)\}_{k \in \mathbb{Z}^m}$, взятая последовательно по индексам $k_1, \dots, k_m$, и

$$f(t, M) = \sup_{\substack{|Q_j| \geq t_j \\ Q_j \in M}} \frac{1}{\prod_{j=1}^m |Q_j|} \left| \int_{Q_1 \times \dots \times Q_m} f(x) dx \right|, \quad t_j \in (0, 2\pi], \quad j = 1, \dots, m.$$

3. Доказательство основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $J_p(\mathbf{a}) < \infty$. Так как последовательность коэффициентов Фурье функции f монотонна по каждому индексу, то ее повторная перестановка есть тождественное преобразование. Поэтому правая часть неравенства (2.7) совпадает с $J_p(\mathbf{a})$. С другой стороны, $\bar{f}(y) \leq f(y, M)$, следовательно, из леммы 4 имеем

$$\|\bar{f}\|_{L_p} \leq C(p) J_p(\mathbf{a}).$$

Покажем обратное соотношение. Пусть $\bar{f} \in L_p(T^m)$. Отметим, что тогда и (см. обозначения леммы 3) $G_f(x_1, \dots, x_m)/(x_1 \cdots x_m) \in L_p(T^m)$, причем

$$\left\| \frac{1}{x_1 \cdots x_m} G_f \right\|_p \leq \|\bar{f}\|_p.$$

Если $n_1, \dots, n_m$ – натуральные числа, то, воспользовавшись леммой 3, получаем, что

$$a_{n_1, \dots, n_m}^p n_1^{p-2} \dots n_m^{p-2} \leq 2^m \alpha^p \pi^{m(p-1)} \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi/n_1} \dots \int_{\pi/(n_m+1)}^{\pi/n_m} \frac{1}{u_1^p \dots u_m^p} (G_f(u_1, \dots, u_m))^p du_1 \dots du_m.$$

Обозначая $C = 2^m \alpha^p \pi^{m(p-1)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} J_p^p(\mathbf{a}) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m}^p n_1^{p-2} \dots n_m^{p-2} \\ &\leq C \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_m=1}^{\infty} \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi/n_1} \dots \int_{\pi/(n_m+1)}^{\pi/n_m} \frac{1}{u_1^p \dots u_m^p} (G_f(u_1, \dots, u_m))^p du_1 \dots du_m \\ &= C \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \frac{1}{u_1^p \dots u_m^p} (G_f(u_1, \dots, u_m))^p du_1 \dots du_m \leq C \|\bar{f}\|_p^p, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. Трехмерные ряды. Пусть натуральное $R \geq 1$, а функции

$$D_R(u) = \sum_{n=1}^R e^{inu}, \quad \Gamma_R(s, t) = \sum_{m, n \geq 1: m^2 + n^2 \leq R^2} e^{i(nx+my)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $p \in (1, 4/3)$. Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_p > 0$ такие, что для любого натурального $R \geq 1$ для функции

$$U_R(x_1, x_2, x_3) = D_R(x_1) \cdot \Gamma_R(x_2, x_3)$$

имеем

$$\|U_R\|_1 \leq C_1 R^{1/2} \ln R, \quad \|U_R\|_p \geq C_p R^{1/2+1-1/p} \quad \text{при } p > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что

$$\|D_R\|_1 \leq C_2 \ln R, \quad \|D_R\|_p \geq C_{1,p} R^{1-1/p}.$$

В то же время из результатов Юдина [11] и Кользани и Соарди [12] следует, что

$$C_{2,p} R^{1/2} \leq \|\Gamma_R\|_p \leq C_{3,p} R^{1/2}$$

при всех $p \in [1, 4/3]$, $C_2, C_{1,p}, C_{2,p}, C_{3,p} > 0$. Из этих оценок и вытекает утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. Существует функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) \in L(T^3)$ такая, что ее ряд Фурье имеет вид (1.4), последовательность коэффициентов Фурье $\mathbf{a}(f)$ монотонно невозрастает по каждому индексу, $J_p(\mathbf{a}) < \infty$ при $p \in (1, 6/5]$, но

$$f(x_1, x_2, x_3) \notin L_p(T^3)$$

ни при каком $p > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} k^{-3} U_{4^k}(x_1, x_2, x_3). \quad (4.1)$$

Из первой оценки леммы 5 следует, что при всех $1 < r \leq q$ имеем

$$\left\| \sum_{k=r}^q 2^{-k} k^{-3} U_{4^k}(x_1, x_2, x_3) \right\|_1 \leq C_3 \sum_{k=r}^q k^{-2}.$$

Поэтому ряд (4.1) сходится в метрике L_1 к некоторой функции $f(x_1, x_2, x_3) \in L(T^3)$. Введем расширяющиеся области индексов

$$Q_k = \{(n_1, n_2, n_3) : 1 \leq n_1 \leq 4^k, n_2, n_3 \geq 1, n_2^2 + n_3^2 \leq 4^{2k}\}.$$

Пусть $W_1 = Q_1$ и $W_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$ при $k > 1$. Тогда при $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in W_k$ имеем коэффициент Фурье

$$a_{\mathbf{n}}(f) = \sum_{r=k}^{\infty} 2^{-r} r^{-3} \leq C_4 2^{-k} k^{-3}. \quad (4.2)$$

Отсюда при $p \in (1, 6/5]$ имеем

$$\begin{aligned} (J_p(\mathbf{a}))^p &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}^p (n_1 n_2 n_3)^{p-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{n} \in W_k} a_{\mathbf{n}}^p (n_1 n_2 n_3)^{p-2} \\ &\leq C_5 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} k^{-3p} \sum_{\mathbf{n} \in W_k} (n_1 n_2 n_3)^{p-2} \leq C_5 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} k^{-3p} \left(\sum_{l=1}^{4^k} l^{p-2} \right)^3 \\ &\leq C_{6,p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kp} k^{-3p} 4^{k(3p-3)} = C_{6,p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(5p-6)} k^{-3p} < \infty. \end{aligned}$$

Теперь при $N \geq 1$ обозначим через $S_N(f; \mathbf{x})$ N -ю кубическую частичную сумму ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$. Тогда при любом $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{x}) &\equiv S_{4^{k+1}}(f; \mathbf{x}) - S_{4^k}(f; \mathbf{x}) \\ &= a_{4^{k+1}}(f) \prod_{s=1}^3 D_{4^{k+1}}(x_s) - 2^{-k} k^{-3} \prod_{s=1}^3 D_{4^k}(x_s) + 2^{-k} k^{-3} U_{4^k}(x_1, x_2, x_3) \\ &\equiv g_{1,k}(\mathbf{x}) - g_{2,k}(\mathbf{x}) + g_{3,k}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Пусть $p \in (1, 6/5]$. Тогда из (4.2) и из оценки норм одномерных ядер Дирихле имеем

$$\|g_{1,k}\|_p \leq C_{7,p} 2^{-k} k^{-3} 4^{3(1-1/p)k} \leq C_{7,p} k^{-3} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и, аналогично,

$$\|g_{2,k}\|_p \leq C_{8,p} k^{-3} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В то же время по лемме 5

$$\|g_{3,k}\|_p \geq 2^{-k} k^{-3} C_p 4^{k(1/2+1-1/p)} = C_p 2^{k(2-2/p)} k^{-3} \rightarrow \infty$$

при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, кубические частичные суммы ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ расходятся в метрике L_p . По теореме Рисса это означает, что $f(x_1, x_2, x_3) \notin L_p(T^3)$. Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] F. Móricz, “On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1990), 417–425.
- [3] М. И. Дьяченко, “О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **129**:1 (1986), 55–72.
- [4] M. I. D’jachenko, “Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients”, *Anal. Math.*, **16**:3 (1990), 173–190.
- [5] М. И. Дьяченко, “Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p ”, *Матем. сб.*, **184**:3 (1993), 3–20.
- [6] Е. Д. Нурсултанов, “Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литлвуда”, *Матем. сб.*, **189**:3 (1998), 83–102.
- [7] E. D. Nursultanov, “Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlewood type inequalities”, *East J. Approx.*, **4**:2 (1998), 243–275.
- [8] M. Dyachenko, S. Tikhonov, “Convergence of trigonometric series with general monotone coefficients”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **345**:3 (2007), 123–126.
- [9] M. Dyachenko, S. Tikhonov, “A Hardy–Littlewood theorem for multiple series”, *J. Math. Anal. Appl.*, **339**:1 (2008), 503–510.
- [10] M. Dyachenko, S. Tikhonov, “Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria”, *Studia Math.*, **193**:3 (2009), 285–306.
- [11] В. А. Юдин, “Поведение констант Лебега”, *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 401–405.
- [12] L. Colzani, P. M. Soardi, “ L^p -norms of certain kernels of the N -dimensional torus”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **266**:2 (1981), 617–627.

М. И. Дьяченко

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

E-mail: dyach@mail.ru

Поступило

16.04.2015

Исправленный вариант

23.10.2015

Е. Д. Нурсултанов

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан

E-mail: er-nurs@yandex.ru

М. Е. Нурсултанов

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан

E-mail: mereygm@gmail.com