Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Мерзляков, Теорема Кларксона–Эрдеша для многих переменных, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 594–598

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:17:36

УДК 517.5

ТЕОРЕМА КЛАРКСОНА–ЭРДЕША ДЛЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. Г. Мерзляков

В данной статье теорема Кларксона–Эрдеша, дополняющая известную теорему Мюнтца, переносится на многие переменные.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В [1] доказан следующий результат

ТЕОРЕМА КЛАРКСОНА–ЭРДЕША. Пусть $\lambda_n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \quad (1)$$

и для чисел $a_{nk} \in \mathbb{C}$, $n = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность

$$\sum_{n=1}^k a_{nk} x^{\lambda_n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Тогда предельная функция голоморфно продолжается в единичный круг с центром в нуле, а указанная последовательность сходится к ней равномерно на компактах этого круга.

В данной статье мы обобщим теорему Кларксона–Эрдеша на многие переменные. При этом нам понадобятся два неравенства для полиномов одной переменной.

ТЕОРЕМА А. Для последовательности чисел $\{\lambda_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ с условием (1) и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $c > 0$ такое, что

$$\max_{|z| \leq 1+\varepsilon} |p(z)| \leq c \max_{1 \leq x \leq 1+2\varepsilon} |p(x)|,$$

где p – произвольная линейная комбинация мономов $\{z^{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Это неравенство очевидным образом следует из одного результата Шварца для квазиполиномов с вещественными показателями (см. [2, с. 64]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00095.

ТЕОРЕМА Б. Для произвольного полинома p степени n имеет место соотношение

$$|p(z)| \leq \max_{-1 \leq t \leq 1} |p(t)| \cdot |z + \sqrt{1 - z^2}|^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это хорошо известное неравенство Бернштейна (см. [3]), из которого следует более грубое неравенство

$$|p(z)| \leq \max_{-1 \leq t \leq 1} |p(t)| (1 + 2|z|)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2. Ряды однородных полиномов. В данном пункте рассматриваются ряды однородных полиномов, сходящиеся на вещественных областях.

ТЕОРЕМА 1. Для области $U \subset \mathbb{R}^q$ найдется полная круговая область $G \subset \mathbb{C}^q$, $U \subset G$, такая, что если члены ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2}$$

равномерно ограничены на компактах области U , где A_n – однородный полином q переменных степени n , то этот ряд будет сходиться равномерно на компактах области G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $x_0 \in U$ существуют числа $r > 1$ и $\delta > 0$ такие, что куб $K = \{x \in \mathbb{R}^q : |x_j - x_j^1| \leq \delta, j = 1, \dots, q\}$ лежит в области U , где $x_1 = rx_0$. По условию найдется число $c > 0$, для которого выполнена оценка

$$|A_n(x)| \leq c, \quad x \in K, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Применяя неравенство Бернштейна, несложно вывести соотношение

$$|A_n(\delta z + x^1)| \leq c(1 + 2|z_1|)^n \dots (1 + 2|z_q|)^n, \quad z \in \mathbb{C}^q. \tag{3}$$

Для фиксированного числа ρ , $1 < \rho < r$, очевидно, найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что из (3) вытекает неравенство

$$|A_n(w + x^1)| \leq c\rho^n, \quad |w^j| \leq \delta_1, \quad j = 1, \dots, q.$$

В таком случае из однородности полиномов A_n следует, что

$$|A_n(r^{-1}w + x^0)| \leq c(r^{-1}\rho)^n, \quad |w^j| \leq \delta_1, \quad j = 1, \dots, q,$$

поэтому ряд (2) сходится равномерно в комплексной окрестности точки x_0 .

Покажем теперь, что этот ряд будет равномерно сходиться и в некоторой комплексной окрестности начала координат.

Из соотношения (3) на множестве $\{w \in \mathbb{C}^q : |w_j| \leq 1, j = 1, \dots, q\}$ получим

$$|A_n(w)| \leq c\rho_1^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где

$$\rho_1 = (1 + 2\delta^{-1}(1 + |x_1^1|)) \dots (1 + 2\delta^{-1}(1 + |x_q^1|)),$$

и в силу однородности полиномов A_n ряд (2) будет сходиться равномерно на компакте $\{w \in \mathbb{C}^q : |w_j| \leq r_1, j = 1, \dots, q\}$ для любого числа $r_1 < \rho_1^{-1}$.

Ясно, что если ряд (2) сходится равномерно в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}^q$, то он будет сходиться равномерно и в окрестности круга $\{\zeta z_0 : \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \leq 1\}$. Тем самым, существование искомой области можно считать установленным.

3. Последовательности полиномов. В данном пункте обобщается результат Кларксона–Эрдеша на многие переменные.

Для этого нам понадобятся следующие определения.

Для областей $U \subset \mathbb{R}^q$, $G \subset \mathbb{C}^q$ через $C(U)$ и $H(G)$ обозначим соответственно пространство непрерывных комплекснозначных функций на области U и пространство голоморфных функций на области G с топологиями равномерной сходимости на компактах. Ясно, что оба пространства являются пространствами Фреше.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P_{nk} – однородный полином q переменных степени λ_n , $k \in \mathbb{N}$, $n = 1, \dots, k$, последовательность чисел $\{\lambda_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию (1) и для некоторой функции $f \in C(U)$ имеет место соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k P_{nk} = f \quad (4)$$

в топологии пространства $C(U)$. Тогда функция f голоморфно продолжается в область G , построенную в теореме 1, и предел (4) достигается в топологии пространства $H(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной точки $x_0 \in U$, очевидно, найдется число $\varepsilon > 0$ и компактная окрестность V этой точки такие, что компакт $K = \{tx : 1 \leq t \leq 1 + 2\varepsilon, x \in V\}$ лежит в области U .

По условию предел (4) достигается равномерно на компакте K . Поэтому для любого числа $\delta > 0$ существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\left| \sum_{n=1}^{k_1} P_{nk_1}(tx) - \sum_{n=1}^{k_2} P_{nk_2}(tx) \right| \leq \delta, \quad t \in [1, 1 + 2\varepsilon], \quad x \in V, \quad k_1, k_2 \geq k_0,$$

или в силу однородности полиномов

$$\left| \sum_{n=1}^{k_1} t^{\lambda_n} P_{nk_1}(x) - \sum_{n=1}^{k_2} t^{\lambda_n} P_{nk_2}(x) \right| \leq \delta, \quad t \in [1, 1 + 2\varepsilon], \quad x \in V, \quad k_1, k_2 \geq k_0.$$

В таком случае по теореме А найдется число $c > 0$, не зависящее от δ , для которого

$$\left| \sum_{n=1}^{k_1} z^{\lambda_n} P_{nk_1}(x) - \sum_{n=1}^{k_2} z^{\lambda_n} P_{nk_2}(x) \right| \leq c\delta, \quad |z| = 1 + \varepsilon, \quad x \in V, \quad k_1, k_2 \geq k_0,$$

и из неравенства Коши получаем

$$|P_{nk_1}(x) - P_{nk_2}(x)| \leq \frac{c\delta}{(1 + \varepsilon)^{\lambda_n}}, \quad x \in V, \quad k_1, k_2 \geq k_0, \quad n \leq \min\{k_1, k_2\}.$$

Последние соотношения показывают, что для любого числа $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{P_{nk}(x) : k \geq n\}$ сходится к некоторому числу $P_n(x)$, $x \in V$, и

$$|P_{nk}(x) - P_n(x)| \leq \frac{c\delta}{(1 + \varepsilon)^{\lambda_n}}, \quad x \in V, \quad k \geq k_0, \quad n \leq k.$$

Как несложно проверить, P_n будет однородным полиномом степени λ_n или тождественным нулем.

Из последних неравенств получаем

$$\left| \sum_{n=1}^k P_{nk}(x) - \sum_{n=1}^k P_n(x) \right| \leq \frac{c\delta}{\varepsilon}, \quad k \geq k_0, \quad x \in V,$$

и в силу произвольности числа $\delta > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = f$$

равномерно на компакте V и, следовательно, на любом компакте области U .

По теореме 1 последний ряд сходится в топологии пространства $H(G)$, так что функция f голоморфно продолжается в область G .

Обозначим теперь через W замыкание линейной оболочки системы полиномов $\mathcal{A} = \{P_{nk} : k \in \mathbb{N}, n = 1, \dots, k\}$ в пространстве $C(U)$.

Так как все функции пространства W однозначно продолжаютсЯ до голоморфных функций в области G , в этом пространстве можно ввести две топологии, индуцированные из пространств $C(U)$ и $H(G)$.

В обеих топологиях, очевидно, пространство W будет пространством Фреше, и вторая топология, ясно, сильнее. В таком случае по теореме Банаха об открытом отображении эти топологии совпадают, поэтому соотношение (4) имеет место равномерно на компактах области G .

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 2 найдется полная круговая область $D \subset \mathbb{C}^a$ такая, что любая функция пространства W , определенная в этой теореме, голоморфно продолжается в область D и существует функция $F \in W$, для которой все точки границы области D особые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как показано выше, пространство W замкнуто в топологии пространства $H(G)$, область G звездна относительно нуля:

$$\{e^t z : z \in G\} \subset G, \quad t \leq 0,$$

а пространство W , очевидно, инвариантно относительно сжатия: если $f(z) \in W$, то $f(e^t z) \in W$, $t \leq 0$.

В таком случае из утверждения 2 статьи [4] вытекает существование звездной относительно нуля области $D \subset \mathbb{C}^a$ такой, что все функции пространства W будут голоморфно продолжаться в эту область, а для некоторой функции $F \in W$ все точки границы области D особые.

Однако, область G и пространство W являются, очевидно, инвариантными относительно вращения. Поэтому, как легко убедиться, область D будет полной круговой, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Clarkson J., Erdős P. Approximation by polynomials // Duke Math. Pures Appl. 1935. V. 14. P. 403–453.
- [2] Schwartz L. Étude des sommes d'exponentielles réelles. Paris: Herman, 1943.
- [3] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства многочленов и наилучшее приближение непрерывных функций одной переменной. Л.–М.: АН СССР, 1937.
- [4] Мерзляков С. Г. Теорема типа Рунге для инвариантных пространств аналитических отображений // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 163–178.

Институт математики УНЦ РАН, г. Уфа
E-mail: mer@imat.rb.ru

Поступило
02.04.97