Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Бородина, Об одном алгоритме многомерных цепных дробей и линейной зависимости чисел, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 26–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:17:22

Об одном алгоритме многомерных цепных дробей и линейной зависимости чисел

Е. Б. Бородина

В статье рассматривается алгоритм Гютинга построения многомерных цепных дробей. Доказано, что в случае размерности два этот алгоритм позволяет находить коэффициенты линейной зависимости чисел; указан критерий, позволяющий проверить, что найденные алгоритмом неполные частные действительно являются элементами цепной дроби для раскладываемых, вообще говоря иррациональных чисел.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10852

Введение. Ниже рассматривается однородный вариант алгоритма Гютинга построения совместных рациональных приближений к действительным векторам размерности $n + 1$, $n \geq 2$. Сам Гютинг описал его для векторов, состоящих из последовательных степеней действительных чисел, см. [1]. Впоследствии алгоритм был изменен и стал применим к произвольным действительным числам; см., например, [2]. После описания алгоритма в произвольной размерности в п. 1 мы рассмотрим $n = 2$ и докажем, что алгоритм Гютинга находит линейную зависимость за конечное число шагов, если таковая имеет место.

При вычислении цепных дробей иррациональных чисел приходится работать с их рациональными приближениями. Вопрос, с какой точностью нужно выбирать приближение, чтобы обеспечить совпадение заданного количества подходящих дробей, нетривиален. Сравните, например, цепные дроби

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots], \quad 3.14159265 = [3; 7, 15, 1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7].$$

У них совпадают только первые четыре неполных частных, хотя приближение выбрано с точностью до 10^{-8} . Впервые с этим вопросом столкнулся, видимо, Лемер. В 1938 г. он опубликовал статью [3], в которой указал критерий совпадения неполных частных двух расположенных достаточно близко действительных чисел. Сосчитав π с точностью 100 знаков, он смог точно вычислить 90 неполных частных этого числа.

Для многомерных обобщений цепных дробей подобный способ проверки совпадения аналогов неполных частных не известен. В случае $n = 2$ нам удалось найти способ проверки совпадения неполных частных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00743).

1. Алгоритм. Дано: вектор-столбец $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$, такой что $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n > 0$. Максимальное количество линейно независимых над $\mathbb{Q}$ среди чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ равно n .

Найти: коэффициенты линейной зависимости.

Шаг 1: положить матрицу D , равной единичной матрице размера $(n+1) \times (n+1)$, и вектор $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T = \vec{\alpha}$.

Шаг 2: определить числа

$$t_1 = \left\lfloor \frac{x_0}{x_1} \right\rfloor, \quad t_i = \left\lfloor \frac{x_0 - t_1 x_1 - \dots - t_{i-1} x_{i-1}}{x_i} \right\rfloor, \quad 2 \leq i \leq n,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа, и построить матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -t_1 & -t_2 & \dots & -t_n \end{pmatrix}.$$

Шаг 3: пересчитать матрицу $D = BD = \|D_{ij}\|$, $i, j = 0, \dots, n$; если $x_0 - t_1 x_1 - \dots - t_n x_n = 0$, то алгоритм останавливается, числа $D_{n,0}, D_{n,1}, \dots, D_{n,n}$ являются коэффициентами линейной зависимости компонент вектора $\vec{\alpha}$.

Шаг 4: положить $\vec{x} = B\vec{x}$ и перейти на шаг 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения матрицы B следует, что $B\vec{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T$, где $x_{n+1} = x_0 - t_1 x_1 - \dots - t_n x_n$. А из определения числа t_n в шаге 2 алгоритма следуют неравенства $t_1 \geq 1$, $t_i \geq 0$, $0 \leq x_{n+1} < x_n$, так что последовательность координат вектора $B\vec{x}$ убывает. Это свойство сохраняется после каждого повторения шагов 2–4 алгоритма.

По существу алгоритм строит строго убывающую последовательность положительных чисел $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$, которая обрывается, как только возникает равенство $x_k = 0$.

Индексами сверху будем обозначать количество повторений полного прохождения алгоритма со второго по четвертый шаг. Тогда векторы $\vec{x}$ и матрицы B, D получают верхние индексы и будут справедливы тождества

$$\vec{x}^{(m+1)} = B^{(m)} \vec{x}^{(m)}, \quad \vec{x}^{(m)} = D^{(m)} \vec{x}^{(0)}, \quad D^{(m+1)} = B^{(m)} D^{(m)}. \quad (1)$$

Кроме того, будем иметь $\vec{x}^{(m)} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})^T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью алгоритма можно также вычислить совместные приближения к вектору $\vec{\alpha}$, т.е. приближения рациональными числами с одинаковыми знаменателями. Для этого достаточно вычислить первый столбец обратной матрицы к матрице D , и в качестве знаменателя приближения взять первую компоненту, остальные компоненты будут числителями. Оценку скорости сходимости построенных таким способом рациональных приближений к числам α_i/α_0 можно найти в [2].

2. Нахождение коэффициентов линейной зависимости. В данном пункте сначала будет доказано, что с ростом номера m координаты вектора $D^{(m)}\vec{\alpha} = (x_m, \dots, x_{m+n})^T$ с экспоненциальной скоростью стремятся к нулю. Каждая из них есть линейная форма от чисел $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ с целыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого натурального числа m справедливо неравенство*

$$0 \leq x_m < \frac{\alpha_0}{2^{\lfloor m/(n+1) \rfloor}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем это утверждение индукцией по m . При любом m из промежутка $0 \leq m \leq n$ неравенство, очевидно, выполняется. Пусть $k \geq 0$ и для всех $m \leq k+n$ неравенство из теоремы 1 справедливо. Тогда

$$x_{k+n+1} = x_k - t_1^{(k)} x_{k+1} - \dots - t_n^{(k)} x_{k+n},$$

причем $t_1^{(k)} \geq 1$ и $t_i^{(k)} \geq 0$ при $2 \leq i \leq n$. Имеем $x_{k+n+1} \leq x_k - x_{k+1}$ и, значит, $x_k \geq x_{k+1} + x_{k+n+1} > 2x_{k+n+1}$. Отсюда следует, что

$$x_{k+n+1} < \frac{1}{2}x_k \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_0}{2^{\lfloor k/(n+1) \rfloor}} = \frac{\alpha_0}{2^{\lfloor (k+n+1)/(n+1) \rfloor}}.$$

Следующая далее теорема будет доказана здесь лишь при $n = 2$.

ТЕОРЕМА 2. *Допустим, что компоненты вектора $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, а x_1, x_2 линейно независимы. Тогда алгоритм из п. 1 завершит свою работу, т.е. он найдет не все равные нулю целые числа a, b, c , такие, что $cx_0 - ax_1 - bx_2 = 0$.*

Прежде чем доказать теорему, введем вспомогательные определения и установим некоторые леммы. Сначала определим последовательность целочисленных векторов $\vec{r}^{(k)}$, $k \geq 0$. Пусть $\vec{r}^{(0)} = (c_0, -a_0, -b_0)$ – вектор с целыми взаимно простыми координатами, удовлетворяющими условиям $-c_0x_0 + a_0x_1 + b_0x_2 = 0$, $c_0 > 0$. Такие числа обязательно найдутся в силу предположения о линейной зависимости компонент вектора $\vec{x}$ и независимости чисел x_1, x_2 . Определим теперь для любого $k \geq 0$ вектор

$$\vec{r}^{(k+1)} = (c_{k+1}, -a_{k+1}, -b_{k+1}) = s_k \vec{r}^{(k)} A^{(k)},$$

где

$$A^{(k)} = (B^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} t_1^{(k)} & t_2^{(k)} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $s_k = 1$, если $c_k \geq 0$; иначе $s_k = -1$. В любом случае $s_k c_k = |c_k|$.

Из равенств

$$\vec{r}^{(k+1)} \vec{x}^{(k+1)} = s_k \vec{r}^{(k)} A^{(k)} B^{(k)} \vec{x}^{(k)} = s_k \vec{r}^{(k)} \vec{x}^{(k)}, \quad k \geq 0,$$

и определения $\vec{r}^{(0)}$ следует, что $\vec{r}^{(k)} \vec{x}^{(k)} = 0$ для любого $k \geq 0$. Заметим также, что при любом k все координаты вектора $\vec{r}^{(k)}$ есть целые числа, взаимно простые в совокупности.

ЛЕММА 1. *Если $x_{m+2} > 0$, то одновременное выполнение равенств $c_m = 0$ и $c_{m+1} = 0$ невозможно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна, и пусть $m \geq 0$ наименьшее число с условиями

$$c_m = c_{m+1} = 0, \quad x_{m+2} > 0.$$

Тогда $c_{m-1} \neq 0$. Из формул (2) получаем

$$\begin{cases} 0 = c_{m+1} = a_m s_m = (|c_{m-1}| t_2^{(m-1)} - b_{m-1} s_{m-1}) s_m, \\ 0 = c_m = a_{m-1} s_{m-1} - t_1^{(m-1)} |c_{m-1}|, \end{cases} \implies \begin{cases} t_2^{(m-1)} = \frac{b_{m-1}}{c_{m-1}}, \\ t_1^{(m-1)} = \frac{a_{m-1}}{c_{m-1}}. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в формулу, определяющую очередные члены последовательности x_k , находим

$$\begin{aligned} x_{m+2} &= x_{m-1} - t_1^{(m-1)} x_m - t_2^{(m-1)} x_{m+1} \\ &= \frac{1}{c_{m-1}} (c_{m-1} x_{m-1} - a_{m-1} x_m - b_{m-1} x_{m+1}) = 0. \end{aligned}$$

Но это равенство противоречит условию леммы.

Сформулируем основную лемму этого пункта.

ЛЕММА 2. Для любого индекса $k \geq 0$ с условием $x_{k+4} > 0$ справедливо неравенство

$$|c_{k+3}| < \max(|c_{k+2}|, |c_{k+1}|, |c_k|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $x_{k+4} > 0$ означает, что алгоритм вычислит все числа $x_0, x_1, \dots, x_{k+5}$. Значит, при всех i , $0 \leq i \leq k+3$ определены векторы $\vec{x}^{(i)}$ и коэффициенты линейной зависимости a_i, b_i, c_i . Согласно лемме 1 можно утверждать, что в каждой паре c_k, c_{k+1} и c_{k+1}, c_{k+2} есть хотя бы одно отличное от нуля число. В частности, это значит, что в случае $c_{k+3} = 0$ утверждение леммы справедливо. Далее будем считать $c_{k+3} \neq 0$.

Перепишем определение $\vec{r}^{(k+1)} = s_k \vec{r}^{(k)} A^{(k)}$ в виде системы равенств:

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_k s_k - t_2^{(k)} |c_k|, \\ b_{k+1} = -|c_k|, \\ c_{k+1} = t_1^{(k)} |c_k| - a_k s_k. \end{cases} \quad (2)$$

Из этих равенств следует

$$a_{k+2} = s_{k+1} b_{k+1} - t_2^{(k+1)} |c_{k+1}| = -s_{k+1} |c_k| - t_2^{(k+1)} |c_{k+1}|$$

и

$$c_{k+3} = t_1^{(k+2)} |c_{k+2}| + s_{k+1} s_{k+2} |c_k| + s_{k+2} t_2^{(k+1)} |c_{k+1}|. \quad (3)$$

Поскольку $\vec{r}^{(k+2)} \vec{x}^{(k+2)} = 0$, находим

$$c_{k+2} x_{k+2} = a_{k+2} x_{k+3} + b_{k+2} x_{k+4} = -s_{k+1} x_{k+3} |c_k| - (t_2^{(k+1)} x_{k+3} + x_{k+4}) |c_{k+1}|. \quad (4)$$

Умножим равенство (3) на x_{k+3} , а равенство (4) на s_{k+2} , и получившиеся выражения сложим. В результате получим

$$x_{k+3} c_{k+3} + x_{k+2} |c_{k+2}| = -s_{k+2} x_{k+4} |c_{k+1}| + t_1^{(k+2)} x_{k+3} |c_{k+2}|$$

и далее

$$c_{k+3} = -s_{k+2} \frac{x_{k+4}}{x_{k+3}} |c_{k+1}| - \left(\frac{x_{k+2}}{x_{k+3}} - t_1^{(k+2)} \right) |c_{k+2}|. \quad (5)$$

В случае $s_{k+2} = -1$ правая часть последнего равенства есть разность двух неотрицательных чисел, причем коэффициенты при $|c_{k+1}|$, $|c_{k+2}|$ меньше единицы. Это следует из определений чисел x_i , $t_1^{(k+2)}$ и равенств $x_{k+2} = x_0^{(k+2)}$ и $x_{k+3} = x_1^{(k+2)}$. Следовательно,

$$|c_{k+3}| \leq \max \left(\frac{x_{k+4}}{x_{k+3}} |c_{k+1}|, \left(\frac{x_{k+2}}{x_{k+3}} - t_1^{(k+2)} \right) |c_{k+2}| \right) < \max(|c_{k+1}|, |c_{k+2}|).$$

В рассматриваемом случае лемма доказана.

Случай $s_{k+2} = 1$, $c_{k+3} > 0$ невозможен. Ведь тогда левая часть равенства (5) положительна, а правая не больше нуля.

Остается рассмотреть случай $s_{k+2} = 1$, $c_{k+3} < 0$. Прежде всего отметим, что можно считать $c_{k+2} \neq 0$. Иначе из (5) следует

$$|c_{k+3}| = \frac{x_{k+4}}{x_{k+3}} |c_{k+1}| < |c_{k+1}|,$$

так что лемма справедлива.

Если же $c_{k+2} \neq 0$, учитывая $t_1^{(k+2)} \geq 1$ и $t_2^{(k+1)} \geq 1$, из (3) находим

$$0 < |c_{k+3}| = -t_1^{(k+2)} |c_{k+2}| - s_{k+1} |c_k| - t_2^{(k+1)} |c_{k+1}| \leq |c_k| - |c_{k+2}| < |c_k|, \quad (6)$$

и это завершает доказательство леммы.

Докажем теперь теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $C = \max(|c_0|, |c_1|, |c_2|)$ и $m = 4C + 3$. Предположим, что все числа $x_0, x_1, \dots, x_{m+1}$ вычислены алгоритмом и $x_{m+1} > 0$. Тогда все числа x_i , $0 \leq i \leq m+1$, положительны и алгоритм вычислит число x_{m+2} , вообще говоря, неотрицательное. При всех i , $0 \leq i \leq m$, будут определены векторы $x^{(i)}$ и коэффициенты линейной зависимости a_i, b_i, c_i . Докажем индукцией, что при всех i , $0 \leq i \leq m$, выполняются неравенства

$$|c_i| < C - \frac{i-3}{4}. \quad (7)$$

При $i = 0, 1, 2$ неравенство, очевидно, выполняется. Предположив, что неравенство справедливо для всех индексов $i < k+3$, $0 \leq k \leq m-3$; с помощью леммы 2 находим

$$|c_{k+3}| \leq \max(|c_{k+2}|, |c_{k+1}|, |c_k|) - 1 < C - \frac{k-3}{4} - 1 < C - \frac{k}{4}.$$

Итак, неравенство (7) доказано. При $i = m$ находим

$$0 \leq |c_m| < C - \frac{m-3}{4}.$$

Отсюда следует, что $m < 4C + 3$, вопреки определению m .

Получившееся противоречие означает, что алгоритм закончит свою работу, сделав не более $4C + 4$ итераций, т.е. с некоторым индексом $\ell \leq 4C + 4$ будет выполнено равенство $x_\ell = 0$. Так как $\vec{x}^{(k)} = D^{(k)} \vec{x}^{(0)}$ при $k = \ell - 2$, то $0 = x_\ell = x_2^{(k)} = \sum_{i=0}^2 D_{2i}^{(k)} x_i$, где $D_{2i}^{(k)}$ элементы матрицы $D^{(k)}$, стоящие в последней строке. Поэтому элементы последней строки матрицы $D^{(k)}$ дают коэффициенты линейной зависимости между компонентами вектора $\vec{x}^{(0)}$.

3. Критерий проверки совпадения неполных частных. Роль неполных частных в алгоритме Гютинга играют пары чисел t_1^m, t_2^m . Докажем некоторые их свойства, нужные в дальнейшем.

ЛЕММА 3. *Не существует вектора $\vec{x}$, для которого на каком-то шаге алгоритма выполняются одновременно неравенства $t_1^{m+1} = t_2^m, t_2^{m+1} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такой вектор $\vec{x}$ существует. Тогда запишем условие, при котором $t_2^{(m+1)} = 0$:

$$x_{m+1} - t_1^{(m+1)} x_{m+2} < x_{m+3}.$$

Перепишем это неравенство, выразив x_{m+3} через x_m, x_{m+1}, x_{m+2}

$$x_{m+1} - t_1^{(m+1)} x_{m+2} < x_m - t_1^{(m)} x_{m+1} - t_2^{(m)} x_{m+2}.$$

Теперь учтем, что $t_1^{m+1} = t_2^m$; тогда, сокращая слагаемые, получаем

$$x_{m+1} < x_m - t_1^{(m)} x_{m+1},$$

что противоречит неравенству, которому удовлетворяет $t_1^{(m)}$, а именно:

$$0 \leq x_m - t_1^{(m)} x_{m+1} < x_{m+1}.$$

ЛЕММА 4. *Для любого вектора $\vec{x}$ верно, что $t_1^{(m+1)} \geq t_2^{(m)}$ на любом шаге алгоритма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$t_2^{(m)} = \left[\frac{x_m - t_1^{(m)} x_{m+1}}{x_{m+2}} \right] = \left[\frac{x_{m+1}}{x_{m+2}} \left(\frac{x_m}{x_{m+1}} - t_1^{(m)} \right) \right] \leq \left[\frac{x_{m+1}}{x_{m+2}} \right] = t_1^{(m+1)}.$$

Введем обозначение:

$$D^{(m)} = \begin{pmatrix} \vec{d}_0^{(m)} \\ \vec{d}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \vec{d}_n^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Матрицы $D^{(m)}$, отвечающие разложению вектора $\vec{x}$, будем в дальнейшем обозначать $D_{\vec{x}}^{(m)}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны два трехмерных упорядоченных вектора $\vec{x}$ и $\vec{\rho}$ с неотрицательными линейно независимыми компонентами из поля действительных чисел $\mathbb{R}$, и пусть справедливы равенства

$$D_{\vec{x}}^{(l)} = D_{\vec{\rho}}^{(l)} \quad \text{при} \quad 1 \leq l \leq m+1, \quad (8)$$

Тогда будут верны следующие неравенства:

- 1) $(\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) > 0$;
- 2) $0 < (\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}) - t_1^{(m)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho})$;
- 3) $0 < (\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}) - t_1^{(m)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) - t_2^{(m)}(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho})$,

где $t_1^{(m)}, t_2^{(m)}$ числа матрицы $B_{\vec{x}}^{(m)}$, а $d_i^{(m)}$ строки матрицы $D_{\vec{x}}^{(m)}$. Верно обратное, из неравенств 1)–3) следуют равенства (8).

ЗАМЕЧАНИЕ. С точки зрения вычислений на компьютере $\vec{\rho}$ будет вектором с точными координатами, а вектор $\vec{x}$ его приближением, с которым работает ЭВМ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены равенства (8); тогда совпадают матрицы $D_{\vec{x}}^{(m+1)}$ и $D_{\vec{\rho}}^{(m+1)}$ и матрицы $D_{\vec{x}}^{(m)}$ и $D_{\vec{\rho}}^{(m)}$. Следовательно, из формул (1) заключаем, что

$$B_{\vec{x}}^{(m)} = D_{\vec{x}}^{(m+1)}(D_{\vec{x}}^{(m)})^{-1} = D_{\vec{\rho}}^{(m+1)}(D_{\vec{\rho}}^{(m)})^{-1} = B_{\vec{\rho}}^{(m)}.$$

Тогда пары чисел $(t_1^{(m)}, t_2^{(m)})$ для векторов $\vec{x}$ и $\vec{\rho}$ совпадают. Далее из формул (1) получаем

$$D_{\vec{\rho}}^{(m)} \vec{\rho} = \begin{pmatrix} (\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}) \\ (\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) \\ (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) \end{pmatrix}.$$

Согласно замечанию 1 координаты вектора $D_{\vec{x}}^{(m)} \vec{\rho} = D_{\vec{\rho}}^{(m)} \vec{\rho} = \vec{\rho}^{(m)}$ убывают, т.е. условие 1) выполнено. Из совпадения матриц $B_{\vec{x}}^{(m)}$ и $B_{\vec{\rho}}^{(m)}$ получаем

$$\left[\frac{x_m}{x_{m+1}} \right] = t_1^{(m)} = \left[\frac{\rho_0^{(m)}}{\rho_1^{(m)}} \right], \quad \left[\frac{x_m - t_1^{(m)} x_{m+1}}{x_{m+2}} \right] = t_2^{(m)} = \left[\frac{\rho_0^{(m)} - t_1^{(m)} \rho_1^{(m)}}{\rho_2^{(m)}} \right].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} 0 &< \rho_0^{(m)} - t_1^{(m)} \rho_1^{(m)} < \rho_1^{(m)}, \\ 0 &< \rho_0^{(m)} - t_1^{(m)} \rho_1^{(m)} - t_2^{(m)} \rho_2^{(m)} < \rho_2^{(m)}, \end{aligned}$$

что совпадает с неравенствами 2)–3).

Докажем в обратную сторону. В дальнейшем вектора $d_i^{(k)}$ и числа $t_i^{(k)}$ вычислены исходя из матриц $D_{\vec{x}}^{(k)}$ и $B_{\vec{x}}^{(k)}$. Пусть выполнены все неравенства 1)–3). Докажем что тогда эти же неравенства выполнены для векторов $d_i^{(m-1)}$ и чисел $t_i^{(m-1)}$.

Так как $(D_{\vec{x}}^{(m-1)}) = (B_{\vec{x}}^{(m-1)})^{-1}(D_{\vec{x}}^{(m)})$, получаем

$$\begin{cases} (\vec{d}_0^{(m-1)}, \vec{\rho}) = t_1^{(m-1)}(\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) + (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}), \\ (\vec{d}_1^{(m-1)}, \vec{\rho}) = (\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}), \\ (\vec{d}_2^{(m-1)}, \vec{\rho}) = (\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}). \end{cases} \quad (9)$$

Поскольку $t_1^{(m-1)} \geq 1$, $t_2^{(m-1)} \geq 0$ и согласно условию $(\vec{d}_i^{(m)}, \vec{\rho}) > 0$ при всех $i = 0, 1, 2$, получаем условие

$$(\vec{d}_0^{(m-1)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_1^{(m-1)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_2^{(m-1)}, \vec{\rho}) > 0. \quad (10)$$

Из формулы (9) следует

$$\begin{cases} (d_2^{(m)}, \rho) = (d_0^{(m-1)}, \rho) - t_1^{(m-1)}(d_1^{(m-1)}, \rho) - t_2^{(m-1)}(d_2^{(m-1)}, \rho), \\ (d_1^{(m)}, \rho) = (d_2^{(m-1)}, \rho), \\ (d_0^{(m)}, \rho) = (d_1^{(m-1)}, \rho). \end{cases} \quad (11)$$

Согласно условию $0 < (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho})$. Поэтому

$$0 < (d_0^{(m-1)}, \rho) - t_1^{(m-1)}(d_1^{(m-1)}, \rho) - t_2^{(m-1)}(d_2^{(m-1)}, \rho) < (\vec{d}_2^{(m-1)}, \vec{\rho}). \quad (12)$$

Из формулы (9) следует

$$(\vec{d}_0^{(m-1)}, \vec{\rho}) - t_1^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m-1)}, \vec{\rho}) = (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}).$$

Докажем промежуточное неравенство:

$$(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) \leq t_1^{(m)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m)}(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) \quad (13)$$

$\Updownarrow$

$$(t_2^{(m-1)} - t_1^{(m)})(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) + (1 - t_2^{(m)})(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) \leq 0. \quad (14)$$

Предположим противное. Тогда

$$t_2^{(m)}(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) + (t_1^{(m)} - t_2^{(m-1)})(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}).$$

Учитывая неотрицательность коэффициентов $t_2^{(m)}$ и $t_1^{(m)} - t_2^{(m-1)}$ (из леммы 4), а также неравенства $(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) > 0$, заключаем

$$t_2^{(m)} + (t_1^{(m)} - t_2^{(m-1)}) < 1,$$

что возможно лишь в случае $t_2^{(m)} = 0$, $t_1^{(m)} - t_2^{(m-1)} = 0$. Но это противоречит лемме 3. Получившееся противоречие доказывает (13).

Из (13) и неравенства 3) в условии теоремы следуют неравенства

$$0 < (\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) \leq t_1^{(m)}(\vec{d}_1^{(m)}, \vec{\rho}) + t_2^{(m)}(\vec{d}_2^{(m)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_0^{(m)}, \vec{\rho}). \quad (15)$$

Подставляя выражения (11) в неравенство (15), находим

$$0 < (\vec{d}_0^{(m-1)}, \vec{\rho}) - t_1^{(m-1)}(\vec{d}_1^{(m-1)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_1^{(m-1)}, \vec{\rho}). \quad (16)$$

Из доказанных неравенств (10), (12) и (16) следует справедливость неравенств 1), 2), 3) для индекса $m - 1$ вместо m . Повторяя эти рассуждения доказываем справедливость для всех индексов k , $0 \leq k \leq m$,

$$1) (\vec{d}_0^{(k)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho}) > (\vec{d}_2^{(k)}, \vec{\rho}) > 0;$$

- 2) $0 < (\vec{d}_0^{(k)}, \vec{\rho}) - t_1^{(k)}(\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho})$;
 3) $0 < (\vec{d}_0^{(k)}, \vec{\rho}) - t_1^{(k)}(\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho}) - t_2^{(k)}(\vec{d}_2^{(k)}, \vec{\rho}) < (\vec{d}_2^{(k)}, \vec{\rho})$.

Следовательно,

$$t_1^{(k)} = \left[\frac{(\vec{d}_0^{(k)}, \vec{\rho})}{(\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho})} \right], \quad t_2^{(k)} = \left[\frac{(\vec{d}_0^{(k)}, \vec{\rho}) - t_1^{(k)}(\vec{d}_1^{(k)}, \vec{\rho})}{(\vec{d}_2^{(k)}, \vec{\rho})} \right]. \quad (17)$$

Теперь докажем по индукции равенства $D_{\vec{x}}^{(k)} = D_{\vec{\rho}}^{(k)}$ для всех $k = 0, 1, \dots, m+1$.
 Имеем $D_{\vec{x}}^{(0)} = E = D_{\vec{\rho}}^{(0)}$. Так как

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} &= t_1^{(0)} = \left[\frac{(\vec{d}_0^{(0)}, \vec{\rho})}{(\vec{d}_1^{(0)}, \vec{\rho})} \right] = \left[\frac{\rho_0^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} \right], \\ \left[\frac{x_0 - t_1^{(0)} x_1}{x_2} \right] &= t_2^{(0)} = \left[\frac{(\vec{d}_0^{(0)}, \vec{\rho}) - t_1^{(0)}(\vec{d}_1^{(0)}, \vec{\rho})}{(\vec{d}_2^{(0)}, \vec{\rho})} \right] = \left[\frac{\rho_0^{(0)} - t_1^{(0)} \rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right] \end{aligned}$$

получаем $B_{\vec{x}}^{(0)} = B_{\vec{\rho}}^{(0)}$ и, следовательно, $D_{\vec{x}}^{(1)} = D_{\vec{\rho}}^{(1)}$. Пусть для всех l таких, что $1 \leq l \leq m$, выполняются равенства $D_{\vec{x}}^{(l)} = D_{\vec{\rho}}^{(l)}$ и $B_{\vec{x}}^{(l-1)} = B_{\vec{\rho}}^{(l-1)}$. Докажем равенства $D_{\vec{x}}^{(l+1)} = D_{\vec{\rho}}^{(l+1)}$ и $B_{\vec{x}}^{(l)} = B_{\vec{\rho}}^{(l)}$. Поскольку $D_{\vec{x}}^{(l)} = D_{\vec{\rho}}^{(l)}$ и

$$D_{\vec{x}}^{(l)} \vec{\rho} = D_{\vec{\rho}}^{(l)} \vec{\rho} = \begin{pmatrix} (\vec{d}_0^{(l)}, \vec{\rho}) \\ (\vec{d}_1^{(l)}, \vec{\rho}) \\ (\vec{d}_2^{(l)}, \vec{\rho}) \end{pmatrix},$$

из формулы (17) получаем $B_{\vec{x}}^{(l)} = B_{\vec{\rho}}^{(l)}$ и далее $D_{\vec{x}}^{(l+1)} = B_{\vec{x}}^{(l)} D_{\vec{x}}^{(l)} = B_{\vec{\rho}}^{(l)} D_{\vec{\rho}}^{(l)} = D_{\vec{\rho}}^{(l+1)}$, что завершает доказательство теоремы.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Ю. В. Нестеренко за помощь при написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Güting, “Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **278/279** (1975), 165–173; “Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. II”, *J. Reine Angew. Math.*, **281** (1976), 184–198; “Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. III”, *J. Reine Angew. Math.*, **283/284** (1976), 384–387.
- [2] F. Schweiger, “Über einen Algorithmus von R. Güting”, *J. Reine Angew. Math.*, **293/294** (1977), 263–270.
- [3] D. H. Lehmer, “Euclid’s algorithm for large numbers”, *Amer. Math. Monthly*, **45**:4 (1938), 227–233.

Е. Б. Бородина

Московский государственный университет
 имени М.В.Ломоносова
 E-mail: eb.borodina@gmail.com

Поступило

05.08.2012

Исправленный вариант

17.06.2015