Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 2, 262–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:45:57

Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Пусть $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, и пусть матрицы-функции P , Q и R порядка n , $n \in \mathbb{N}$, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$, такие, что $P(x)$ – невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы при $x \in \mathbb{R}_+$, а элементы матриц-функций P^{-1} , Q и R измеримы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале. В настоящей работе изучаются операторы, порожденные в пространстве $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$ формальными выражениями вида

$$l[f] = -(P(f' - Rf))' - R^*P(f' - Rf) + Qf,$$

и, как частный случай, операторы, порожденные выражениями вида

$$l[f] = -(P_0 f')' + i((Q_0 f)' + Q_0 f') + P_1 f,$$

где всюду производные понимаются в смысле теории распределений, а P_0 , Q_0 и P_1 – эрмитовы матрицы-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами такие, что P_0^{-1} существует и $\|P_0\|, \|P_0^{-1}\|, \|P_0^{-1}\| \|P_1\|^2, \|P_0^{-1}\| \|Q_0\|^2 \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$.

Основная цель работы – это изучение вопроса об индексе дефекта минимального оператора L_0 , порожденного выражением $l[f]$ в $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, в терминах матриц-функций P , Q и R (P_0 , Q_0 и P_1). Полученные результаты применяются к дифференциальным операторам, порожденным выражениями вида

$$l[f] = -f'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}_k \delta(x - x_k) f,$$

где x_k , $k = 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность положительных чисел и $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$, $\mathcal{H}_k$ – числовая эрмитова матрица порядка n , а $\delta(x)$ – δ -функция Дирака.

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10854

1. Введение. Предварительные сведения.

1.1. Пусть $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, и пусть матрицы-функции P , Q и R порядка n , $n \in \mathbb{N}$, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$, таковы, что $P(x)$ – невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы при $x \in \mathbb{R}_+$, а элементы матриц-функций P^{-1} , Q и R измери-

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00754). Работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (грант № МК-3941.2015.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-31136-мол а, 14-01-00349, 15-31-50259) и Фонда содействия отечественной науке.

мы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале. Определим первую квазипроизводную заданной локально абсолютно непрерывной вектор-функции $f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t$ (здесь и далее t – символ транспонирования), полагая $f^{[1]} := P(f' - Rf)$. Предположим, что функция $f^{[1]}$ также локально абсолютно непрерывна, и определим вторую квазипроизводную $f^{[2]}$, полагая $f^{[2]} := (f^{[1]})' + R^* f^{[1]} - Qf$, где $*$ – символ сопряжения, и квазидифференциальное выражение, полагая $l[f](x) := -f^{[2]}(x)$. Таким образом,

$$l[f] = -(P(f' - Rf))' - R^* P(f' - Rf) + Qf, \quad (1.1)$$

а область определения Δ выражения $l[f]$ – это множество всех комплекснозначных вектор-функций f таких, что f и $f^{[1]}$ локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и при $f \in \Delta$ выражение $l[f] \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ определяется п.в. по формуле (1.1). Кроме того, для любых двух вектор-функций $f, g \in \Delta$ справедлива следующая лемма – векторный аналог тождества Грина.

ЛЕММА 1. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – матрицы-функции порядка n , удовлетворяющие перечисленным выше условиям. Тогда для любых двух вектор-функций $u, v \in \Delta$ и для любых двух чисел α и β таких, что $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, справедлива формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{ (l[u](x), v(x)) - (u(x), l[v](x)) \} dx = [u(x), v(x)](\beta) - [u(x), v(x)](\alpha), \quad (1.2)$$

где $(g, h) = \sum_{s=1}^n g_s \overline{h_s}$ – скалярное произведение векторов g и h , а форма $[u, v]$ определяется равенством

$$[u, v](x) := (u^{[1]}(x), v(x)) - (u(x), v^{[1]}(x)).$$

Пусть далее $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$ – пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых вектор-функций f , у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+$. В литературе, посвященной спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, хорошо известна процедура, с помощью которой определяются минимальный и максимальный операторы L_0 и L_1 соответственно, порожденные выражением $l[f]$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$. Операторы L_0 , L_1 и операторы, связанные с ними, называются *векторными операторами Штурма–Лиувилля*. Используя формулу (1.2), можно доказать, что оператор L_0 является замкнутым симметрическим оператором. Кроме того, область определения оператора L_0 всюду плотна в $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$. Пусть пара (d_+, d_-) – индекс дефекта оператора L_0 . Согласно [1], [2] дефектные числа d_+ и d_- оператора L_0 совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения

$$l[f] = \lambda f, \quad (1.3)$$

принадлежащих $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, когда параметр λ берется из верхней ($\text{Im } \lambda > 0$) или нижней ($\text{Im } \lambda < 0$) полуплоскости соответственно, удовлетворяют неравенствам $n \leq d_+, d_- \leq 2n$ и, кроме того, $d_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $d_- = 2n$. Случай $d_+ = d_- = 2n$ реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (1.3) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$. Используя аналогию со спектральной теорией скалярных операторов Штурма–Лиувилля на полуоси, иногда говорят,

что для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки, если $d_+ = d_- = n$, если же $d_+ = d_- = 2n$, то говорят, что для выражения $l[f]$ имеет место случай предельного круга (см., например, [2]).

Уравнение (1.3) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = (F - \Lambda)Y, \quad (1.4)$$

где $Y = (f, f^{[1]})^t$, матрицы F и Λ порядка $2n$ имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -R^* \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I & O \end{pmatrix},$$

а O и I – как обычно, нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно. Равносильность этих уравнений понимается в том смысле, что если n -компонентная вектор-функция f является решением (1.3), то $2n$ -компонентная вектор-функция $Y = (f, f^{[1]})^t$ является решением системы (1.4); и наоборот, если Y – решение этой системы, то вектор-функция f , составленная из его первых n -компонент, – решение системы уравнений (1.3).

Заметим, что условия на элементы матриц P , Q и R , перечисленные выше, обеспечивают для системы (1.4) справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши, поставленной в произвольной точке $\mathbb{R}_+$.

Используя терминологию из теории линейных квазидифференциальных уравнений, говорят, что квазипроизводные $f^{[0]}(:= f)$, $f^{[1]}$ и $f^{[2]}$ порождены матрицей F .

Важным в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля является вопрос об определении дефектных чисел оператора L_0 при данных матрицах-функциях P , Q и R ; в частности, перечисление условий на эти матрицы-функции, которые обеспечивают реализацию заданной пары (d_+, d_-) . Начиная с работы Лидского [3] этот вопрос для операторов, порожденных выражением вида

$$-(Pf')' + Qf,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы порядка n такие, что элементы матриц $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$, находится в центре внимания многих математиков (см. работы [2]–[7] и списки цитированной в них литературы).

С другой стороны, класс операторов, порожденных выражением (1.1), намного шире и, в частности, охватывает часто встречающиеся в математической физике операторы, порожденные некоторыми дифференциальными выражениями с коэффициентами-распределениями (см. ниже, п. 1.2). Основная цель настоящей работы – изучение вопроса об индексе дефекта оператора L_0 , порожденного выражением $l[f]$, в терминах матриц-функций P , Q и R . Различные аспекты этого вопроса обсуждались также в работах [8]–[10].

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы дефектные числа оператора L_0 были не максимальны, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \infty, \quad (1.5)$$

где $K(x, t)$ – функция Коши уравнения $l[f] = 0$, т.е. решение этого уравнения по переменной x , удовлетворяющее начальным условиям

$$K(x, t)|_{x=t} = O, \quad K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I,$$

а символ $\|\cdot\|$ означает самосопряженную матричную норму.

Справедливость теоремы, аналогичной теореме 1, для случая скалярных дифференциальных операторов любого порядка и весовых пространств $\mathcal{L}_w^p$, $1 \leq p < +\infty$, установлена в [11]. Позже подробное доказательство этой теоремы для случая скалярных дифференциальных операторов второго порядка и пространств $\mathcal{L}_w^2$ было приведено в [12]. Там же и в [13] для случая $n = 1$ приведены некоторые следствия теоремы 1. Кроме того, достаточность условия (1.5) для немаксимальности дефектных чисел оператора L_0 , порожденного выражением вида

$$-(Pf')' + Qf$$

(см. выше), используется в работе [6]. Однако полное доказательство теоремы 1 нигде не опубликовано. Мы в данной работе устраняем этот пробел и приводим его в начале раздела 2.

1.2. Пусть P_0 , Q_0 и P_1 – эрмитовы матрицы-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами такие, что P_0^{-1} существует и $\|P_0^{-1}\|$, $\|P_0^{-1}\|\|P_1\|^2$, $\|P_0^{-1}\|\|Q_0\|^2$ локально интегрируемы по Лебегу. Пусть $\varphi := P_1 + iQ_0$ и $\varphi^* := P_1 - iQ_0$. Рассмотрим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} P_0^{-1}\varphi & P_0^{-1} \\ -\varphi^*P_0^{-1}\varphi & -\varphi^*P_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя свойства матричных норм, эрмитовость матриц-функций P_0 , Q_0 и P_1 и неравенство Коши–Буняковского, легко заключить, что для любого $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi^*P_0^{-1}\| &= \int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\varphi\| \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \cdot \sqrt{\|P_0^{-1}\|} \|\varphi\| \\ &\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \cdot \|\varphi\|^2 \right)^{1/2} < +\infty, \\ \int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi^*P_0^{-1}\varphi\| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \|P_0^{-1}\| \cdot \|\varphi\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, элементы всех блоков матрицы F принадлежат пространству $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$.

Посредством матрицы F определим квазипроизводные $f^{[0]}$, $f^{[1]}$, $f^{[2]}$, полагая, как и ранее,

$$f^{[0]} = f, \quad f^{[1]} = P_0 f' - \varphi f, \quad f^{[2]} = (f^{[1]})' + \varphi^* P_0^{-1} f^{[1]} + \varphi^* P_0^{-1} \varphi f.$$

Далее, применяя рассуждения п. 1.1, заключаем, что для уравнения

$$-f^{[2]} = \lambda f$$

справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши, поставленная в произвольной точке $\mathbb{R}_+$. Кроме того, можно показать, что перечисленные выше условия на функции $\|P_0^{-1}\|$, $\|Q_0\|$ и $\|P_1\|$ являются самыми общими условиями, обеспечивающими это (см. [14; глава 1, теорема 1.2.3]).

Если предположить, что элементы матрицы P_0 также принадлежат $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, то легко заметить, что и элементы матрицы φ будут локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$. Из этих предположений можно заключить, что если $'$ трактовать как операцию взятия производной в смысле теории распределений, то в выражении $f^{[2]}$ можно раскрыть все скобки и для него получим формулу

$$f^{[2]} = (P_0 f')' - i((Q_0 f)' + Q_0 f') - P_1' f.$$

Особо отметим, что в этом равенстве координаты вектор-функций $(P_0 f')'$, $(Q_0 f)'$ и $P_1' f$ являются сингулярными обобщенными функциями, причем координаты первых двух из них – производные в смысле теории распределений регулярных обобщенных функций, а координаты вектор-функций $Q_0 f'$ и $f^{[2]}$ – регулярные обобщенные функции. Таким образом, выражение $l[f]$ (см. (1.1)) в терминах обобщенных функций формально записывается в виде

$$l[f] = -(P_0 f')' + i((Q_0 f)' + Q_0 f') + P_1' f. \quad (1.6)$$

В частности, если $P(x) = I$, $R(x) = \sigma(x)$ и $Q(x) = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)$ – вещественнозначная, симметрическая матрица-функция порядка n такая, что элементы матрицы $\sigma^2(x)$ локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$, то векторное квазидифференциальное выражение (1.6) примет вид

$$l[f] = -f'' + \sigma' f. \quad (1.7)$$

Подробный анализ билинейной формы из формулы (1.2) позволяет установить справедливость следующей теоремы (см., например, [8] и [9]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что элементы матрицы σ абсолютно непрерывны на $[a_k, b_k]$ и $\sigma'(x) \geq 0$ п.в. при $x \in [a_k, b_k]$, и пусть выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k)^2 = +\infty.$$

Тогда для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки.

Истоки этой теоремы восходят к Ф. Хартману, Р. С. Исмагилову, Ф. Аткинсону и М. С. П. Истхему. В векторном случае при условии, что элементы матрицы $\sigma'(x)$ принадлежат $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, аналогичная теорема была доказана Серебряковым (см., например, [5]).

Пусть теперь x_k , $k = 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность положительных чисел, $x_0 = 0$ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$. Если при этом в выражении (1.7) положить $\sigma(x) = C_k$ при $x \in [x_{k-1}, x_k]$, где C_k – вещественная симметрическая числовая матрица, то это выражение принимает вид

$$l[f] = -f'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{H}_k \delta(x - x_k) f, \quad (1.8)$$

где $\mathcal{H}_k = C_{k+1} - C_k$, а $\delta(x)$ – δ -функция Дирака. Таким образом, теория операторов, порожденных выражениями вида (1.8), включается в теорию операторов, порожденных векторными квазидифференциальными выражениями второго порядка.

Пусть ℓ_n^2 – гильбертово пространство бесконечных последовательностей n -компонентных вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для выражения $l[f]$ (см. (1.8)) имеет место случай предельного круга в том и только том случае, когда все решения разностного векторного уравнения*

$$-\frac{Z_{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}^2} \left[\mathcal{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) I \right] Z_k - \frac{Z_{k-1}}{r_k r_{k+1} d_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

принадлежат пространству ℓ_n^2 , где $d_k = x_k - x_{k-1}$, $r_{k+1} = \sqrt{d_k + d_{k+1}}$.

Эта теорема принадлежит авторам (см., например, [8] и [9]) и является обобщением одной теоремы, полученной Маламудом и Костенко для случая $n = 1$ (см. [15] и [16]).

1.3. В связи с теоремой 3 нам понадобятся следующие сведения из теории операторов, порожденных разностными выражениями второго порядка в гильбертовом пространстве ℓ_n^2 , приведенные, например, в [17].

Пусть $A_j, B_j, j = 0, 1, \dots$, – квадратные матрицы порядка n , причем B_j^{-1} существуют, а A_j – самосопряжены. Рассмотрим векторное разностное выражение второго порядка

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

где $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^n$, и обобщенную якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Выражение (1.9) и граничные условия $A_0 u_0 + B_0 u_1 = 0$ определяют в пространстве ℓ_n^2 минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 с всюду плотной областью определения и индексом дефекта (d_+, d_-) ($0 \leq d_+, d_- \leq n$, и если одно из них равно n , то и другое такое же). Согласно терминологии, принятой в матричной проблеме моментов, говорят, что оператор L_0 порожден матрицей J . Кроме того, если $d_+ = d_- = 0$, то говорят, что для оператора L_0 имеет место определенный, а если $d_+ = d_- = n$, то вполне неопределенный случаи (при $n = 1$ слово “вполне” опускают). Определенный случай соответствует случаю предельной точки, а вполне неопределенный – случаю предельного круга для оператора Штурма–Лиувилля.

Теорема 3 утверждает, что дефектное число оператора $\mathcal{L}_0$, порожденного выражением (1.8) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, равно $2n$ в том и только том случае, когда для матрицы J имеет место вполне неопределенный случай, где элементы этой матрицы определяются формулами

$$A_k = \frac{1}{r_{k+1}^2} \left[\mathcal{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) I \right], \quad B_k = -\frac{1}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}} I, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

а A_0, B_0 – произвольные вещественные симметрические матрицы порядка n такие, что B_0^{-1} существует.

Имеет место следующая теорема – аналог теоремы 1 для операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы для оператора L_0 имел место вполне неопределенный случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ таких, что $m_k \leq n_{k+1} \leq m_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

где K_{ij} – решение разностного уравнения $(lu)_j = 0$ с начальными условиями $K_{jj} = O$ и $K_{j+1,j} = B_j^{-1}$, $i, j = 1, 2, \dots$.

В работах [18]–[20] обсуждаются вопросы, связанные с индексами дефекта операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами; в частности, в [18] установлена справедливость теоремы 4.

2. Теоремы о немаксимальности и минимальности дефектных чисел.

2.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть квадратные матрицы-функции Φ и Ψ порядка n являются матричными решениями уравнения $l[f] = 0$, удовлетворяющими начальным условиям $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$. Сначала покажем, что матрицы-функции $K(x, t)$, $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ связаны соотношением

$$K(x, t) = \Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t). \quad (2.1)$$

Действительно, из определения матриц-функций Φ и Ψ легко получить, что вектор-столбцы матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi^{[1]} & \Psi^{[1]} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (1.4) при $\lambda = 0$. Кроме того, легко установить, что

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{*[1]} & -\Psi^* \\ -\Phi^{*[1]} & \Phi^* \end{pmatrix}$$

(см. замечание 1 из [9]).

Пусть матрица-функция F определена в формуле (1.4) и вектор-функция $H := (0, h)^t$, где h – n -компонентный вектор-столбец с локально интегрируемыми координатами. Применяя метод вариации постоянных к неоднородной системе дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = FY + H$, получим, что общее решение этой системы имеет вид

$$Y = T(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x T(x)T^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} dt,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные n -компонентные вектор-столбцы, т.е. функция Коши этой системы равна $T(x) \cdot T^{-1}(t)$. Из последнего равенства заключаем, что для общего решения уравнения $l[f] = h$ справедливо равенство

$$f = \Phi C_1 + \Psi C_2 + \int_{x_0}^x \{\Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t)\}h(t) dt,$$

т.е. для $K(x, t)$ справедливо равенство (2.1). При этом справедливость соотношений $K(x, t)|_{x=t} = O$ и $K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I$ немедленно следует из представления матрицы-функции T и равенства $T(x)T^{-1}(x) = I$ (здесь I – единичная матрица порядка $2n$).

Достаточность. Из формулы (2.1) и из самосопряженности матричной нормы следует, что

$$\|K(x, t)\| \leq \|\Psi(x)\| \|\Phi(t)\| + \|\Phi(x)\| \|\Psi(t)\|.$$

Записав правую часть этого неравенства в виде скалярного произведения двумерных векторов $(\|\Psi(x)\|, \|\Phi(x)\|)$ и $(\|\Phi(t)\|, \|\Psi(t)\|)$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, находим, что

$$\|K(x, t)\|^2 \leq (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2)(\|\Phi(t)\|^2 + \|\Psi(t)\|^2).$$

Интегрируя последнее неравенство по t в пределах от a до x , а затем по x в пределах от a до b , где $0 \leq a \leq b < +\infty$, после элементарных вычислений находим, что

$$\int_a^b (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2) dx \geq \sqrt{2} \left\{ \int_a^b dx \int_a^x \|K(x, t)\|^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (2.2)$$

Пусть теперь $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$ – последовательность непересекающихся интервалов, удовлетворяющая условию (1.5). Применяя неравенство

$$\int_0^{+\infty} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2),$$

а затем неравенство (2.2) к каждому слагаемому из суммы, стоящей в правой части, и равенство (1.5), находим, что

$$\int_0^{+\infty} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) = +\infty. \quad (2.3)$$

Таким образом, либо матрица-функция Φ , либо Ψ содержит вектор-столбец, не принадлежащий пространству $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, т.е. при некотором λ (а именно, при $\lambda = 0$) не все решения уравнения (1.3) принадлежат этому пространству. Следовательно, дефектные числа оператора L_0 не максимальны (см. п. 1.1). Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга, т.е. выполняется равенство (2.3). Покажем, что тогда для любого $a \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\int_a^{+\infty} dx \int_a^x \|K(x, t)\|^2 dt = +\infty. \quad (2.4)$$

Допустим, что это не так, т.е. для некоторого $a_0 \in \mathbb{R}_+$

$$J := \int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^x \|K(x, t)\|^2 dt < +\infty.$$

Применяя равенство (2.1), заметим, что тогда

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^{+\infty} \|K(x, t)\|^2 dt = 2J < +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме Фубини каждый столбец матрицы-функции $K(\cdot, t)$ для п.в. $t \geq a_0$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$. Теперь заметим, что, во-первых, существуют числа t_1^0 и t_2^0 ($> a_0$) такие, что

$$\det \begin{pmatrix} \Phi(t_1) & \Psi(t_1) \\ \Phi(t_2) & \Psi(t_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

при $t_1 = t_1^0$ и $t_2 = t_2^0$, поскольку противоположное допущение приводит к противоречивому равенству $\det T(t_1^0) = 0$ при некотором $t_1^0 > a_0$, а, во-вторых, в силу непрерывности матриц-функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ при некотором $\delta > 0$ это неравенство справедливо при всех $t_1 \in (t_1^0 - \delta, t_1^0 + \delta)$ и $t_2 \in (t_2^0 - \delta, t_2^0 + \delta)$. Таким образом, существуют числа t_1^1 и t_2^1 из соответствующих интервалов такие, что каждый столбец матрицы-функции $K(\cdot, t_i^1)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$ при $i = 1, 2$. Кроме того, вектор-столбцы матрицы-функции $K(\cdot, t_1^1)$ и $K(\cdot, t_2^1)$ линейно независимы. Действительно, из равенства

$$K(x, t_1^1)\alpha + K(x, t_2^1)\beta = 0,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$, формулы (2.1) и начальных условий $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$ следует, что векторы α и β удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \Phi^*(t_1^1)\alpha + \Phi^*(t_2^1)\beta = 0, \\ \Psi^*(t_1^1)\alpha + \Psi^*(t_2^1)\beta = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от 0. Следовательно,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0.$$

Таким образом, все решения уравнения (1.3) при $\lambda = 0$ принадлежат пространству $\mathcal{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, а это противоречит условию (2.3). Равенство (2.4) доказано. Остается заметить, что если выполняется это равенство, то можно найти последовательность непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, например, таких, что

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \geq 1,$$

а для этой последовательности интервалов равенство (1.5), очевидно, выполняется. Теорема 1 доказана.

Пусть $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность непересекающихся интервалов. Заметим, что, как известно, при фиксированном k в треугольнике

$$\{(x, t) \mid a_k < t \leq x < b_k\}$$

функция $K(x, t)$ однозначно определяется значениями коэффициентов выражения l . Таким образом, если выполняется условие (1.5), то независимо от значений этих функций вне множества $U_{k=1}^{+\infty}[a_k, b_k]$ для выражения l не реализуется случай предельного круга, требуется лишь, чтобы матрицы-функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяли условиям, перечисленным в п. 1.1. В дальнейшем мы воспользуемся этим замечанием.

2.2. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть a, b и c – положительные числа такие, что $a < c < b$, H – произвольная вещественная симметрическая матрица порядка n , и пусть $K(x, t) = (k_{ij}(x, t))_{i,j=1}^n$ – функция Коши векторного квазидифференциального уравнения

$$-y'' + H\delta(x - c)y = 0. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_a^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt &\geq \frac{1}{3\sqrt{3}}(\rho s)^2(\rho + s) \left| h_{ii} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right|, \\ \int_a^b dx \int_a^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt &= \frac{|h_{ij}|^2}{9}(\rho s)^3, \quad \text{если } i \neq j, \end{aligned}$$

где $\rho = c - a$ и $s = b - c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В определении квазидифференциального выражения $l[f]$ по формуле (1.7) положим

$$\sigma(x) = \begin{cases} O, & \text{если } a \leq x < c, \\ H, & \text{если } c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Тогда уравнение $l[f] = 0$ примет вид (2.5). Пусть значение $t \in [a, b]$ фиксировано. Функция $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.5) при $x > t$ и начальным условиям $K(x, t)|_{x=t} = O$ и $K^{[1]}(x, t)|_{x=t} = I$. Из этого легко вывести, что

$$K(x, t) = (x - t)I$$

при $t \in [a, c]$, $x \in [t, c]$ или при $t \in [c, b]$, $x \in [t, b]$.

Пусть теперь $t \in (a, c)$ и $x \in (c, b)$. Тогда $K(x, t) = C_1(t) + xC_2(t)$ при $x \in (c, b]$, где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ – матрицы-функции порядка n , и, следовательно,

$$K(c + 0, t) = C_1(t) + cC_2(t) \quad \text{и} \quad K^{[1]}(c + 0, t) = C_2(t) - H(C_1(t) + cC_2(t)).$$

С другой стороны,

$$K(c - 0, t) = (c - t)I \quad \text{и} \quad K^{[1]}(c - 0, t) = I.$$

Используя, далее, условия непрерывности функций $K(x, t)$ и $K^{[1]}(x, t)$ в точке $x = c$, получаем, что $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1(t) + cC_2(t) = (c - t)I, \\ C_2(t) - H(C_1(t) + cC_2(t)) = I. \end{cases}$$

Таким образом, $C_1(t) = -tI - (c - t)cH$ и $C_2(t) = I + (c - t)H$ и, следовательно,

$$K(x, t) = (x - t)I + (c - t)(x - c)H$$

при $t \in [a, c]$, $x \in [c, b]$.

Из полученных формул для $K(x, t)$ следует, что при $1 \leq i \leq n$

$$J_{ii} := \int_a^b dx \int_a^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt =: J_1 + 2h_{ii}J_2 + h_{ii}^2J_3,$$

где вычисления показывают, что

$$J_1 = \frac{1}{12}(b-a)^4, \quad J_2 = \frac{1}{6}(b-c)^2(c-a)^2(b-a), \quad J_3 = \frac{1}{9}(b-c)^3(c-a)^3.$$

Таким образом,

$$J_{ii} = \frac{h_{ii}^2}{9}(\rho s)^3 + \frac{h_{ii}}{3}(\rho s)^2(\rho + s) + \frac{1}{12}(\rho + s)^4.$$

Записав интеграл J_{ii} в виде

$$J_{ii} = (\rho s)^3 \left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right]^2 + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 \left[\frac{1}{12} \rho s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \right],$$

заметим, что

$$\frac{1}{12} \rho s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{12}.$$

Поэтому

$$J_{ii} \geq (\rho s)^3 \left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right) \right]^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{s} \right)^2 \right].$$

Применив еще раз неравенство между арифметическим и геометрическим средними, окончательно находим, что справедливо первое утверждение леммы 2.

Кроме того, как мы уже показали выше, элемент $k_{ij}(x, t)$ матрицы-функции $K(x, t)$ при $1 \leq i \neq j \leq n$ определяется равенством $k_{ij}(x, t) = (c-t)(x-c)h_{ij}$. Поэтому

$$\int_a^b dx \int_a^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt = \frac{|h_{ij}|^2}{9}(\rho s)^3.$$

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, докажем справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, – последовательность попарно непересекающихся интервалов и c_k – последовательность положительных чисел такая, что $a_k < c_k < b_k$, и на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ выполнены равенства

$$P(x) = I, \quad R(x) = \sigma(x), \quad Q(x) = -\sigma^2(x),$$

где $\sigma(x)$ – кусочно-постоянная матрица-функция порядка n с матрицей скачков $\mathcal{H}_k = (h_{ij}^k)_{i,j=1}^n$ в точке c_k . Пусть далее, числа $\rho_k = c_k - a_k$, $s_k = b_k - c_k$ и матрица $\mathcal{H}_k$ таковы, что выполняется одно из следующих условий:

- выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k s_k \sqrt{\rho_k + s_k} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|} = +\infty \quad (2.6)$$

хотя бы для одного i такого, что $1 \leq i \leq n$; или

- выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\rho_k s_k)^{3/2} |h_{ij}^k| = +\infty \quad (2.7)$$

хотя бы для одной пары (i, j) такой, что $1 \leq i \neq j \leq n$.

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 2, положив $a = a_k$, $c = c_k$, $b = b_k$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x |k_{ii}(x, t)|^2 dt &\geq \frac{1}{3\sqrt{3}} (\rho_k s_k)^2 (\rho_k + s_k) \left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|, \\ \int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x |k_{ij}(x, t)|^2 dt &= \frac{|h_{ij}^k|^2}{9} (\rho_k s_k)^3, \quad \text{если } i \neq j, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Полагая $\|K(x, t)\|^2 = \sum_{i,j=1}^n |k_{ij}(x, t)|^2$ и при фиксированном $1 \leq i \leq n$ используя неравенство $\|K(x, t)\| \geq |k_{ii}(x, t)|$, получим

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \geq 3^{-3/2} (\rho_k s_k)^2 (\rho_k + s_k) \left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, а затем суммируя по k , находим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} \geq 3^{-3/4} \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k s_k \sqrt{(\rho_k + s_k)} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k} \right) \right|}.$$

Рассуждая аналогично с учетом второго утверждения леммы 2, для $1 \leq i \neq j \leq n$ находим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^x \|K(x, t)\|^2 dt \right)^{1/2} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} (\rho_k s_k)^{3/2} |h_{ij}^k|.$$

Остается применить теорему 1 с учетом условий (2.6) и (2.7). Теорема 5 доказана.

2.3. Приведем некоторые следствия из теоремы 5.

Формулировка теоремы 5, очевидно, упрощается, если предположить, что точки c_k являются серединами отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$. В этой ситуации справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 5, $c_k = (a_k + b_k)/2$ и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^{5/2} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{6}{\rho_k} \right|} = +\infty$$

хотя бы для одного i такого, что $1 \leq i \leq n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k^3 |h_{ij}^k| = +\infty$$

хотя бы для одной пары (i, j) такой, что $1 \leq i \neq j \leq n$, где $\rho_k = b_k - a_k$. Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Применим теорему 5 в ситуации, когда дифференциальное выражение l имеет вид (1.8). В этом случае в качестве точек c_k , $k = 1, 2, \dots$, выберем точки x_k , а в качестве отрезков $[a_k, b_k]$ – отрезки $[x_k - d_k/2, x_k + d_{k+1}/2]$, где, напомним, что $d_k = x_k - x_{k-1}$ (см. формулировку теоремы 3). Справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть дифференциальное выражение $l[f]$ имеет вид (1.8) и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k d_{k+1} r_{k+1} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) \right|} = +\infty$$

хотя бы для одного i такого, что $1 \leq i \leq n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (d_k d_{k+1})^{3/2} |h_{ij}^k| = +\infty$$

хотя бы для одной пары (i, j) такой, что $1 \leq i \neq j \leq n$. Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

2.4. В пп. 2.2, 2.3 настоящего раздела было продемонстрировано, как из теоремы 1 можно получить признаки немаксимальности дефектных чисел для векторных операторов Штурма–Лиувилля, порожденных выражениями вида (1.1), (1.7) или (1.8). Применяя теорему 3, получаем, что из справедливости следствия 2 теоремы 5 следует, что для обобщенной якобиевой матрицы J с элементами вида (1.10) не реализуется вполне неопределенный случай.

В этом пункте мы получим признак реализации определенного случая для якобиевых матриц J с элементами вида (1.10). Здесь же отметим, что согласно теореме 2 он будет одновременно и признаком реализации случая предельной точки для векторного оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением вида (1.8).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность d_k такова, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 = +\infty. \quad (2.8)$$

Тогда для якобиевой матрицы J с элементами, определяемыми равенствами (1.10), имеет место определенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (1.10) следует, что $\|B_k\|^{-1} = r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1} / \sqrt{n}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} d_{k+1}^2 &\leq \sqrt{d_k + d_{k+1}} \sqrt{d_{k+1} + d_{k+2}} d_{k+1} = r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1} \leq \frac{1}{2} (r_{k+1}^2 + r_{k+2}^2) d_{k+1} \\ &= \frac{1}{2} (d_k d_{k+1} + 2d_{k+1}^2 + d_{k+1} d_{k+2}) \leq \frac{1}{4} (d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} d_{k+1}^2 \leq \|B_k\|^{-1} \leq \frac{1}{4\sqrt{n}} (d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2).$$

Из этого неравенства и условия (2.8) теоремы 6 следует, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|B_k\|^{-1} = +\infty.$$

Последнее соотношение является условием Карлемана, обеспечивающим реализацию определенного случая для матрицы J (см., например, [17; гл. VII, § 2, п. 11, теорема 2.9]). Теорема 6 доказана.

Отметим, что, рассуждая так же, как в [18], из теоремы 4 можно получить достаточные условия реализации вполне неопределенного и не вполне неопределенного случаев для матрицы J . При $n = 1$ эти признаки будут близки к некоторым результатам работ [15] и [16]. Однако мы здесь этого делать не будем.

3. Заключительные замечания. Примеры. В теоремах 2 и 5 данной работы предполагается, что квазидифференциальное выражение l имеет вид (1.7) на последовательности непересекающихся интервалов (a_k, b_k) , $k = 1, 2, \dots$, где функция $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ в случае теоремы 2, и является ступенчатой функцией с одним скачком в случае теоремы 5, и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям при $x \in [a_k, b_k]$, обеспечивающим реализацию случая предельной точки для выражений вида (1.1) в случае теоремы 2 и немаксимальность дефектных чисел – в случае теоремы 5. Таким образом, в этих теоремах допускается, что коэффициенты выражения l могут быть произвольными матрицами-функциями вне отрезков $[a_k, b_k]$; требуется лишь выполнение условий, перечисленных в начале п. 1.1, т.е. элементы этих матриц-функций должны быть измеримы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном интервале. В частности, выражение l может иметь вид (1.6) при соответствующих ограничениях на коэффициенты P_0 , Q_0 и P_1 .

В работе [21] Крист и Штольц показали, что если $d_j = 1/j$ и $\mathcal{H}_j = (-2j - 1)I$, $j = 1, 2, \dots$, то для выражения l вида (1.8) при $n = 1$ реализуется случай предельного круга и, по-видимому, впервые обнаружили, что для этого выражения такое возможно. Позже в работах [15], [16] Костенко и Маламуда и в работе [22] Конечной были построены многочисленные примеры случаев реализации предельной точки или предельного круга для выражений вида (1.8) при $n = 1$.

Обобщенные якобиевы матрицы вида J возникают в связи с матричной степенной проблемой моментов (см., например, [23]) и хорошо изучены. В частности, в работах [18]–[20] установлены критерии максимальности дефектных чисел и различные признаки реализации случаев максимальности и немаксимальности дефектных чисел в терминах элементов матрицы J . Применяя эти признаки и теорему 3, можно получить условия максимальности и немаксимальности дефектных чисел оператора L_0 , порожденного выражением (1.8), в терминах $\mathcal{H}_k$ и d_k . В частности, используя теорему 1 из [20] и теорему 3 данной работы, можно показать, что справедливы следующая теорема и следствие из нее.

ТЕОРЕМА 7. Пусть элементы матрицы J таковы, что

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \left(r_{2j+s} \frac{d_{1+s} d_{3+s} \cdots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s} \cdots d_{2j-2+s}} \right)^2 < +\infty, \quad s = 1, 2,$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{d_{1+s} d_{3+s} \cdots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s} \cdots d_{2j-2+s}} \right)^2 \left\| \mathcal{H}_{2j+s-1} + \left(\frac{1}{d_{2j+s-1}} + \frac{1}{d_{2j+s}} \right) I \right\| < +\infty, \quad s = 1, 2.$$

Тогда для оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть элементы матрицы J таковы, что

1) $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \geq r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ или $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \leq r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ для всех $k = 1, 2, \dots$;

2) выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 < +\infty;$$

3) выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_{k+1} \left\| \mathcal{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}} \right) I \right\| < +\infty.$$

Тогда для выражения оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Теорема 7 и следствие 3 являются обобщениями некоторых результатов из работ [8] и [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [2] R. L. Anderson, "Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators", *Canad. J. Math.*, **28**:5 (1976), 905–914.
- [3] В. Б. Лидский, "О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y'' + P(t)y = \lambda y$ ", *Докл. АН СССР*, **95**:2 (1954), 217–220.
- [4] Г. А. Калябин, "О числе решений из $L_2(0, \infty)$ самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка", *Функц. анализ и его прил.*, **6**:3 (1972), 74–76.
- [5] В. П. Серебряков, "О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений типа Штурма–Лиувилля", *Дифференциальные уравнения*, **24**:10 (1988), 1732–1738.
- [6] В. П. Серебряков, " L^p -свойства решений систем квазидифференциальных уравнений второго порядка и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры", *Дифференциальные уравнения*, **35**:7 (1999), 909–917.
- [7] В. П. Серебряков, "Об индексе дефекта матричных дифференциальных операторов второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами", *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 48–53.
- [8] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, "Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением в пространстве вектор-функций", *Докл. РАН*, **441**:2 (2011), 165–168.
- [9] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, "Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций", *Уфимск. матем. журн.*, **3**:3 (2011), 105–119.
- [10] И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, "Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка", *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 314–317.

- [11] К. А. Мирзоев, “Функция Коши и $\mathcal{L}_w^p$ -свойства решений квазидифференциальных уравнений”, *УМН*, **46**:4 (1991), 161–162.
- [12] К. А. Мирзоев, “Операторы Штурма–Лиувилля”, *Тр. ММО*, **75**, № 2, МЦНМО, М., 2014, 335–359.
- [13] K. A. Mirzoev, “New existence criteria for limit points of Sturm–Liouville operator”, *Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb.*, **40**, Special Issue (2014), 290–299.
- [14] A. Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, Math. Surveys Monogr., **121**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [15] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, “Об одномерном операторе Шрёдингера с δ -взаимодействиями”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 87–91.
- [16] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set”, *J. Differential Equations*, **249**:2 (2010), 253–304.
- [17] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [18] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай”, *Матем. заметки*, **63**:5 (1998), 709–716.
- [19] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами”, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:1 (1999), 30–45.
- [20] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), 32–37.
- [21] C. S. Christ, G. Stolz, “Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:3 (1994), 491–516.
- [22] Н. Н. Конечная, “Об асимптотическом интегрировании симметрических квазидифференциальных уравнений второго порядка”, *Матем. заметки*, **90**:6 (2011), 875–884.
- [23] М. Г. Крейн, “Бесконечные J -матрицы и матричная проблема моментов”, *Докл. АН СССР*, **69**:2 (1949), 125–128.

К. А. Мирзоев

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило

26.07.2015

Т. А. Сафонова

Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск

E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru