Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Скляренко, Об одном свойстве SCP-интеграла Беркилля, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 599–606

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:46:08

УДК 517.3

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ SCP -ИНТЕГРАЛА БЕРКИЛЛЯ

В. А. Скляренко

Устанавливается необходимое условие SCP -интегрируемости функции, которое используется при построении примера функции, обладающей непрерывными на отрезке SCP -мажорантой и SCP -минорантой, но неинтегрируемой по этому отрезку в смысле SCP -интеграла.

Библиография: 7 названий.

Известно следующее свойство интеграла Перрона: измеримая функция f , имеющая на отрезке $[a, b]$ хотя бы одну непрерывную P -миноранту и хотя бы одну непрерывную P -мажоранту, необходимо P -интегрируема на $[a, b]$ (см. [1, с. 365], а также [2]). Этот результат был позднее перенесен на некоторые другие обобщенные интегралы перроновского типа (см., например, [3]). С другой стороны, для двоичного интеграла Перрона существование непрерывных мажоранты и миноранты функции не гарантирует ее интегрируемости (см. [4]). Здесь мы покажем, что для SCP -интеграла Беркилля (см. [5]), позволяющего рассматривать всякий всюду сходящийся к конечной сумме тригонометрический ряд как ряд Фурье своей суммы, также можно построить аналогичный пример.

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $B \subset [a, b]$, $|B| = b - a$, $a, b \in B$. P -интегрируемая функция M называется SCP -мажорантой с базисом B для f на $[a, b]$, если

- 1) $M(a) = 0$;
- 2) M SC -непрерывна для всех $x \in (a, b)$, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left((P) \int_x^{x+h} M dt - (P) \int_{x-h}^x M dt \right) = 0, \quad x \in (a, b);$$

- 3) M C -непрерывна для всех $x \in B$, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (P) \int_x^{x+h} M dt = M(x), \quad x \in B;$$

- 4) $\underline{SCD} M(x) \geq f(x)$ почти всюду на (a, b) , где

$$\underline{SCD} M(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left((P) \int_x^{x+h} M dt - (P) \int_{x-h}^x M dt \right);$$

- 5) $\underline{SCD} M(x) > -\infty$ всюду на (a, b) кроме, быть может, счетного множества E .

Аналогично определяется *SCP-миноранта* с базисом B .

Функция f называется *SCP-интегрируемой* на $[a, b]$ с базисом B , если для ее *SCP-мажорант* M и *SCP-минорант* m с базисом B выполняется равенство

$$\sup m(b) = \inf M(b) = \Phi(b).$$

При этом полагаем

$$(SCP) \int_a^b f dx = \Phi(b).$$

Функция f , *SCP-интегрируемая* с базисом B на $[a, b]$, *SCP-интегрируема* с базисом $B \cap [a, x]$ на $[a, x]$ при $x \in B$. Функцию $\Phi(x)$, $x \in B$, естественно назвать *SCP-примитивной* для f на $[a, b]$.

Поскольку *SCP-интегрируемая* функция почти всюду конечна на $[a, b]$ и изменение этой функции на множестве меры нуль не влияет ни на ее *SCP-интегрируемость*, ни на ее *SCP-примитивную* функцию, то далее будем считать, что $f(x)$ всюду конечно.

Повторяя для *SCP-интеграла* доказательство леммы 2 из [6], получим, что, не ограничивая общности, можно считать условия 4) и 5) определения мажоранты и миноранты выполненными всюду.

ЛЕММА. Пусть Φ есть *SCP-примитивная* функция для f на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ интервал (a, b) можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых на (a, b) множеств Q_k , имеющих при различных k не более двух общих точек, таких, что при $x \in Q_k$, $x \pm h \in [a, b]$

$$\left| (P) \int_0^h (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| \leq \int_0^h (\sigma_k(x+t) - \sigma_k(x-t)) dt, \quad (1)$$

где σ_k – неубывающие непрерывные на $[a, b]$ функции, причем если s_k – сингулярная часть σ_k , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_k(b) - s_k(a)) < \varepsilon. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя доказательство леммы 2 из [7] в случае *SCP-интеграла*, получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ интервал (a, b) можно представить в виде объединения замкнутых на (a, b) множеств P_k , $k = 1, 2, \dots, P_{k+1} \supset P_k$, так что при $x \in P_k$ выполнено (1) с $\widehat{\sigma}_k(x) = kx + \sigma(x)$, где σ – неубывающая непрерывная на $[a, b]$ функция, для которой $0 \leq \sigma(b) - \sigma(a) < \varepsilon$. Разность множеств $P_{k+1} \setminus P_k$ представима в виде объединения не более чем счетного числа множеств $Q_{kn} = u_n \cap (P_{k+1} \setminus P_k)$, где $\{u_n\}$ – интервалы, составляющие множество $(a, b) \setminus P_k$, причем Q_{kn} отличается от $\overline{Q}_{kn}$ не более чем на две точки. При различных k и n множества Q_{kn} ($Q_{11} = P_1$), очевидно, не пересекаются. Введем в множестве $\{Q_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty}$ единую нумерацию: $\{Q_{kn}\}_{k,n=1}^{\infty} = \{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для $x \in Q_k$ выполнено (1) с неубывающей непрерывной функцией $\overline{\sigma}_k(x) = c(k)x + \sigma(x)$.

Пусть $\{(\alpha_j, \beta_j)\}_{j=1}^{\infty}$ – совокупность интервалов множества $(a, b) \setminus Q_k$,

$$\omega_j(\delta) = \sup\{|\overline{\sigma}_k(x) - \overline{\sigma}_k(y)| : x, y \in (\alpha_j, \beta_j), |x - y| < \delta\}$$

– модуль непрерывности функции $\bar{\sigma}_k$ на (α_j, β_j) , $\bar{\omega}_j(\delta)$ – выпуклая вверх функция, удовлетворяющая неравенству $0 \leq \omega_j(\delta) \leq \bar{\omega}_j(\delta) \leq 2\omega_j(\delta)$ при $0 \leq \delta \leq \beta_j - \alpha_j$ (см. [7, лемма Стечкина]). Функция

$$\tilde{\omega}_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq x < \alpha_j, \\ \bar{\omega}_j(x - \alpha_j) + \bar{\omega}_j(\beta_j - \alpha_j) - \bar{\omega}_j(\beta_j - x) & \text{при } \alpha_j \leq x < \beta_j, \\ 2\bar{\omega}_j(\beta_j - \alpha_j) & \text{при } \beta_j \leq x \leq b, \end{cases}$$

не убывает, абсолютно непрерывна, $\tilde{\omega}_j(a) = 0$, $\tilde{\omega}_j(b) \leq 4(\bar{\sigma}_k(\beta_j) - \bar{\sigma}_k(\alpha_j))$.

Определим возрастающую непрерывную функцию

$$\sigma_k(x) = V\sigma([a, x] \cap Q_k) + c(k)|[a, x] \cap Q_k| + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\omega}_j(x),$$

где $V\Psi(E)$ – функция множества $E \subset [a, b]$ с производящей функцией $V_a^x(\Psi)$ (Ψ – непрерывная функция с конечным изменением).

Проверим теперь, что последовательность множеств $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ и монотонных функций $\{\sigma_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы.

Множества Q_k по построению замкнуты на (a, b) , пересекаются не более чем по двум точкам и в объединении дают (a, b) ;

$$x \in Q_k, \quad x \pm h \in [a, b] \implies |\bar{\sigma}_k(x \pm h) - \bar{\sigma}_k(x)| \leq |\sigma_k(x \pm h) - \sigma_k(x)|,$$

откуда

$$\begin{aligned} \left| (P) \int_0^h (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| &\leq \int_0^h (\bar{\sigma}_k(x+t) - \bar{\sigma}_k(x-t)) dt \\ &\leq \int_0^h (\sigma_k(x+t) - \sigma_k(x-t)) dt \end{aligned}$$

при $x \in Q_k$, $x \pm h \in [a, b]$. Далее, так как функция $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\omega}_j(x)$ абсолютно непрерывна, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_k(b) - s_k(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} V s([a, b] \cap Q_k) = s(b) - s(a) \leq \sigma(b) - \sigma(a) < \varepsilon,$$

где s – сингулярная компонента монотонной функции σ , т.е. (2) также выполняется. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Существует измеримая функция f , обладающая на отрезке $[0, 1]$ непрерывными SCP-мажорантой M и SCP-минорантой m , неинтегрируемая в смысле SCP-интеграла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим совершенное множество P канторовского типа с постоянным отношением разбиения. Положим $r_0^1 = [0, 1]$. Пусть $r_n^m = [\alpha_n^m, \beta_n^m]$ — m -й отрезок n -го ранга, $m = 1, 2, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Будем называть интервал

$$u_{n+1}^m = \left(\frac{9\alpha_n^m + \beta_n^m}{10}, \frac{\alpha_n^m + 9\beta_n^m}{10} \right) = (\beta_{n+1}^{2m-1}, \alpha_{n+1}^{2m})$$

m -м интервалом $(n+1)$ -го ранга, а отрезки

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{2m-1} &= \left[\alpha_n^m, \frac{9\alpha_n^m + \beta_n^m}{10} \right] = [\alpha_{n+1}^{2m-1}, \beta_{n+1}^{2m-1}], \\ r_{n+1}^{2m} &= \left[\frac{\alpha_n^m + 9\beta_n^m}{10}, \beta_n^m \right] = [\alpha_{n+1}^{2m}, \beta_{n+1}^{2m}] \end{aligned}$$

соответственно $(2m-1)$ -м и $(2m)$ -м отрезками ранга $n+1$. Очевидно, $r_n = |r_n^m| = 10^{-n}$, $u_{n+1} = |u_{n+1}^m| = 8 \cdot 10^{-n-1}$, $n = 0, 1, \dots$. Положим

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{2^n} r_n^m, \quad |P| = 0.$$

На $u_{n+1}^m = (\beta_{n+1}^{2m-1}, \alpha_{n+1}^{2m})$ отложим концентрический интервал

$$v_{n+1}^m = \left(\frac{5\beta_{n+1}^{2m-1} + 3\alpha_{n+1}^{2m}}{8}, \frac{3\beta_{n+1}^{2m-1} + 5\alpha_{n+1}^{2m}}{8} \right).$$

Определим на $[0, 1]$ функцию

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in P, \\ 0 & \text{при } x \in u_{n+1}^m \setminus v_{n+1}^m, \\ -2^{-n-1} \sin \frac{8\pi}{u_{n+1}} \left(x - \frac{\beta_{n+1}^{2m-1} + \alpha_{n+1}^{2m}}{2} \right) & \text{при } x \in v_{n+1}^m. \end{cases}$$

Введем функцию Кантора G для замкнутого множества P , положив при $x \in u_{n+1}^m$ $G(x) = (2m-1)/2^{n+1}$ и продолжив ее на P по непрерывности.

Покажем, что функция f , равная $SCD F(x)$ при $x \in u_{n+1}^m$ и 0 при $x \in P$, удовлетворяет условию теоремы.

Проверим, что функция f обладает на $[0, 1]$ непрерывными SCP -мажорантой и SCP -минорантой. В качестве SCP -мажоранты можно взять функцию F . Действительно, $F(0) = 0$ и F непрерывна на $[0, 1]$. При $x \in P$

$$\int_x^{x+h} F dt - \int_{x-h}^x F dt \geq 0,$$

откуда $SCD F(x) \geq 0 = f(x) > -\infty$. При $x \in u_{n+1}^m$ имеем $SCD F(x) = f(x) \neq -\infty$. Следовательно, условия определения мажоранты для $M = F$ выполнены.

Покажем, что при $x \in P$, $h > 0$ выполняется неравенство

$$\int_x^{x+h} F dt - \int_{x-h}^x F dt \leq 2 \left(\int_x^{x+h} G dt - \int_{x-h}^x G dt \right). \quad (3)$$

Левая часть (3) отлична от 0 лишь в том случае, когда хотя бы одна из точек $x \pm h$ принадлежит какому-либо центральному интервалу v . Пусть, например, $x-h \in v_{n+1}^m = (a, b)$. Тогда

$$-\int_{x-h}^x F dt \leq -\int_{(a+b)/2}^b F dt = \int_0^{u_{n+1}/8} 2^{-n-1} \sin \frac{8\pi x}{u_{n+1}} dx = \frac{2}{\pi} 20^{-n-1}.$$

Пусть r_{n+1}^k – сегмент ранга $n+1$, содержащий x . Из $x-h \in v_{n+1}^m$, $x \in P$ следует, что $h \geq 3r_{n+1}$; следовательно, $(x-h, x+h) \supset r_{n+1}^k$. Отсюда, учитывая, что приращение G на r_{n+1}^k равно 2^{-n-1} , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h (G(x+t) - G(x-t)) dt &\geq \int_{r_{n+1}}^h (G(x+r_{n+1}) - G(x-r_{n+1})) dt \\ &\geq 2 \cdot r_{n+1} \cdot 2^{-n-1} = 2 \cdot 20^{-n-1} \geq -\int_{x-h}^x F dt. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_x^{x+h} F dt \leq \int_0^h (G(x+t) - G(x-t)) dt.$$

Суммируя, получим неравенство (3).

Покажем, что в качестве SCP -миноранты для f на $[0, 1]$ можно взять функцию $m(x) = F(x) - 2G(x)$.

Действительно, $m(0) = 0$, функция m непрерывна на $[0, 1]$. При $x \in u_{n+1}^m$ $SCD m(x) = SCD F(x) = f(x)$. Из (3) следует, что при $x \in P$

$$\overline{SCD} m(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(\int_x^{x+h} m dt - \int_{x-h}^x m dt \right) \leq 0 = f(x) < \infty.$$

Итак, m является SCP -минорантой для f на $[0, 1]$.

Покажем, что функция f неинтегрируема в смысле SCP -интеграла на $[0, 1]$.

Пусть Φ является SCP -примитивной для f на $[0, 1]$. Так как на каждом интервале u_{n+1}^m f суммируема с неопределенным интегралом F , то $\Phi = F + H$, где H постоянна на смежных к P интервалах.

Для произвольного замкнутого на $(0, 1)$ множества $E \subset P$ (следовательно, $|E| = 0$) положим

$$A(\Phi, E) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup \left\{ \sum_i \frac{1}{h_i} \left| (P) \int_0^{h_i} (\Phi(x_i+t) - \Phi(x_i-t)) dt \right| \right\},$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным наборам неперекрывающихся интервалов

$$\left\{ (x_i + h_i, x_i - h_i) : \sum_i h_i < \delta, x_i \in E \right\}.$$

Проверим, что

$$A(\Phi, E) \geq \frac{1}{36} V G(E). \quad (4)$$

Пусть $n_0 > 0$ и набор отрезков $\{r_{n_0+1}^{m_i}\}_{i=1}^N$ таков, что $r_{n_0+1}^{m_i} \cap E \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^N r_{n_0+1}^{m_i} \supset E$. Отрезок $r_{n_0+1}^{2m}$ лежит между $u_{n_0+1}^m$ (обозначим через $\gamma = (\beta_{n_0+1}^{2m-1} + \alpha_{n_0+1}^{2m})/2$ его центр) и интервалом меньшего ранга. Заметим, что из $x - h \in u_{n_0+1}^m$, $h > r_{n_0+1}$ вытекает $F(x + h) = 0$ и что при $2r_{n_0+1} \geq h \geq r_{n_0+1}$ выполняется равенство

$$\int_0^h (F(x+t) - F(x-t)) dt = 0.$$

Покажем, что найдется h такое, что $r_{n_0+1} \leq h \leq x - \gamma$ и

$$\frac{1}{h} \left| (P) \int_0^h (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| \geq \frac{1}{36} 2^{-n_0-1}. \quad (5)$$

Если

$$\frac{1}{r_{n_0+1}} \left| (P) \int_0^{r_{n_0+1}} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| \geq \frac{1}{36} 2^{-n_0-1},$$

то в (5) можно взять $h = r_{n_0+1}$:

$$\left| \int_0^{r_{n_0+1}} (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| = \left| \int_0^{r_{n_0+1}} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| \geq \frac{1}{36} r_{n_0+1} 2^{-n_0-1},$$

поэтому будем считать, что выполняется противоположное неравенство.

I. Пусть при $x - h \in u_{n_0+1}^m$, $h \geq r_{n_0+1}$ выполняется неравенство $|H(x+h) - H(x-h)| \geq 2^{-n_0-1}/12$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2r_{n_0+1}} (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| &= \left| \int_0^{2r_{n_0+1}} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| \\ &\geq \int_{r_{n_0+1}}^{2r_{n_0+1}} |H(x+t) - H(x-t)| dt - \left| \int_0^{r_{n_0+1}} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| \\ &\geq \left(\frac{1}{12} 2^{-n_0-1} - \frac{1}{36} 2^{-n_0-1} \right) r_{n_0+1} = \frac{1}{18} 2^{-n_0-1} r_{n_0+1}, \end{aligned}$$

и в (5) можно взять $h = 2r_{n_0+1}$.

II. Если при $x - h \in u_{n_0+1}^m$, $h \geq r_{n_0+1}$ справедливо неравенство $|H(x+h) - H(x-h)| < 2^{-n_0-1}/12$, то

$$\int_x^{2x-\gamma} \Phi dt - \int_\gamma^x \Phi dt = - \int_\gamma^x F dt + \int_0^{x-\gamma} (H(x+t) - H(x-t)) dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{x-\gamma} (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| \\ & \geq \frac{2}{\pi} 20^{-n_0-1} - \left| \int_{r_{n_0+1}}^{x-\gamma} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| - \left| \int_0^{r_{n_0+1}} (H(x+t) - H(x-t)) dt \right| \\ & \geq \frac{2}{\pi} 20^{-n_0-1} - 4r_{n_0+1} \frac{1}{12} 2^{-n_0-1} - r_{n_0+1} \frac{1}{36} 2^{-n_0-1} \geq \frac{5}{36} r_{n_0+1} 2^{-n_0-1}, \end{aligned}$$

и так как $x - \gamma < 5r_{n_0+1}$, то, полагая $h = x - \gamma$, получим

$$\frac{1}{h} \left| \int_0^h (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| \geq \frac{1}{36} 2^{-n_0-1}.$$

Таким образом, (5) доказано.

Сладывая неравенства (5) для всех $r_{n_0+1}^{m_i}$ (кроме, быть может, $m_i = 1$ и 2^{n_0+1}), получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i} \left| \int_0^{h_i} (\Phi(x+t) - \Phi(x-t)) dt \right| \geq \frac{1}{36} VG \left(\bigcup_{i=1}^N r_{n_0+1}^{m_i} \right) - 2 \cdot 2^{-n_0} \geq \frac{1}{36} VG(E) - 2^{-n_0}.$$

Отсюда, поскольку интервалы $(x_i - h_i, x_i + h_i)$ при различных i не пересекаются, а n_0 произвольно велико, следует (4).

Из (4) вытекает, что если $P \cap (0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$, где множества P_k замкнуты на $(0, 1)$ и попарно не пересекаются, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} A(\Phi, P_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{36} VG(P_k \cap (0, 1)) = \frac{1}{36} VG(P) = \frac{1}{36}.$$

С другой стороны, так как Φ по предположению *SCP*-примитивная, в силу леммы для любого $\varepsilon > 0$ можно взять последовательность множеств Q_k , $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = (0, 1)$, и монотонных функций σ_k таких, что выполнено (1) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_k(1) - s_k(0)) < \varepsilon,$$

где s_k — сингулярная часть σ_k . Положим $P_k = P \cap Q_k$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P \cap (0, 1)$. Для любых $x_i \in P_k$, $h_i > 0$ таких, что интервалы $(x_i - h_i, x_i + h_i)$ при различных i не пересекаются, из (1) получим

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{h_i} \left| \int_0^{h_i} (\Phi(x_i+t) - \Phi(x_i-t)) dt \right| & \leq \sum_i \frac{1}{h_i} \int_0^{h_i} (\sigma_k(x_i+t) - \sigma_k(x_i-t)) dt \\ & \leq \sum_i (\sigma_k(x_i+h_i) - \sigma_k(x_i-h_i)). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $|P| = 0$, получим $A(\Phi, P_k) \leq s_k(1) - s_k(0)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A(\Phi, P_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (s_k(1) - s_k(0)) \leq \varepsilon,$$

что противоречит (4). Противоречие показывает, что функция f неинтегрируема на $[0, 1]$ в смысле SCP -интеграла. Теорема доказана.

Заметим, что функция F , построенная в теореме, очевидно является ACG -функцией (см. [1]) и почти всюду на $[0, 1]$ $F'(x) = f(x)$. Следовательно, F является неопределенным интегралом Данжуа–Хинчина для f на $[0, 1]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [2] Толстов Г. П. Об интеграле Пеппона // Матем. сб. 1939. Т. 5(47). № 3. С. 659–660.
- [3] Скворцов В. А. Некоторые свойства CP -интеграла // Матем. сб. 1963. Т. 60(102). № 3. С. 304–324.
- [4] Скворцов В. А. О теореме Мардинкевича для двоичного интеграла Перрона // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 2. С. 267–277.
- [5] Burkill J. G. Integral and trigonometrical series // Proc. London Math. Soc. 1951. V. 1. № 1. P. 46–51.
- [6] Скляренко В. А. Об интегрировании по частям в SCP -интеграле Беркилля // Матем. сб. 1980. Т. 112(154). № 4(8). С. 630–646.
- [7] Скляренко В. А. Некоторые свойства P^2 -примитивной // Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 6. С. 693–700.

Владимирский государственный университет

Поступило
15.05.97