Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошалка, Семимерное семейство простых гармонических функций, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 803–808

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:57:24

Семимерное семейство простых гармонических функций

В. К. Белошапка

С точки зрения теории аналитической сложности все гармонические функции двух переменных распадаются на три класса: функции сложности нуль, один и два. Сложность нуль имеют лишь линейные функции одного переменного. В заметке дается полное описание простых гармонических функций, т.е. функций аналитической сложности один. Эти функции образуют 7-мерное семейство, представимое интегралами от эллиптических функций. Все прочие гармонические функции имеют сложность два и являются в этом смысле сложными. Также рассмотрены решения волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Хопфа.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10865

Почти в каждой математической дисциплине имеется свой подход к измерению сложности объектов ее изучения. Классическая теория сложности – это теория сложности алгоритмов и ее вариации [1], [2]. Не является исключением и математический анализ [3], [4]. В работе [5] был предложен способ измерения сложности аналитических функций двух переменных, который позже применялся в [6] и [7]. Для любой аналитической функции $z(x, y)$ определена ее аналитическая сложность $N(z)$. Эта величина, может принимать значения $(0, 1, 2, \dots, \infty)$. При этом сложность нуль имеют функции, зависящие лишь от одного переменного – $a(x)$ или $b(y)$. Сложность один имеют функции, зависящие от обоих переменных, если при этом имеется локальное представление вида $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$, где (a, b, c) – аналитические функции одного переменного. Нетрудно проверить, что условие $N(z) = 1$ равносильно тому, что росток, локально представляющий z , удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$\delta_1(z) = z'_x z'_y (z'''_{xxy} z''_y - z'''_{xyy} z'_x) + z''_{xy} ((z'_x)^2 z''_{yy} - (z'_y)^2 z''_{xx}) = 0. \quad (1)$$

Дифференциальный полином $\delta_1(z)$ – это числитель рационально-дифференциального выражения $(\ln(z'_y/z'_x))''_{xy}$. Функции сложности два – это функции, чья сложность не равна нулю или единице и имеющие представление $z(x, y) = C(A_1(x, y) + B_1(x, y))$, где A_1 и B_1 имеют сложность не выше единицы. И так далее. Если же некая функция z не попала ни в один из классов $\text{Cl}_n = \{z : N(z) \leq n\}$, то мы полагаем $N(z) = \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-00709-а, 13-01-12417-офи-м2).

Рассмотрим с этой точки зрения класс вещественнозначных где-либо гармонических, возможно многозначных, функций двух переменных, т.е. локальных решений уравнения Лапласа $\Delta z = z''_{xx} + z''_{yy} = 0$. Гармонические функции сложности нуль – это линейные функции одного переменного, т.е. функции вида $z = kx + b$ или $z = ky + b$. С другой стороны, любая гармоническая функция локально представима в виде $z(x, y) = f(x + iy) + \bar{f}(x - iy)$ (напомним, что при построении классов сложности мы можем использовать комплекснозначные функции). Откуда сразу следует, что их сложность $N(z)$ не превосходит двух. Пользуясь приведенным критерием, можно увидеть, что гармоническая функция общего положения имеет сложность два. Например, сложность два имеют вещественные и мнимые части всех степенных функций $z = (x + iy)^n$ для всех $n \geq 3$. Таким образом, все гармонические функции делятся на *простые*, чья сложность не выше единицы, и *сложные*, чья сложность равна двум. Как известно, линейное пространство функций, гармонических в фиксированном круге, бесконечномерно. В данной заметке будет показано, что семейство простых гармонических функций 7-мерно, т.е. зависит от семи независимых параметров.

Вот шесть простых функций. Это функции, чья сложность равна единице:

$$x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad e^x \cos(y), \quad e^x \sin(y), \quad \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

На основе каждой из этих функций можно построить параметрическое семейство. Например, вот два 4-параметрических решения:

$$z = c_1((x + c_2)^2 - (y + c_3)^2) + c_4, \quad z = c_1 e^{c_2 x} \cos(c_2 y + c_3) + c_4. \quad (3)$$

Итак, пусть $z(x, y) = c(a(x) + b(y))$ – простая гармоническая функция. Для производных функций a, b, c будем использовать упрощенные обозначения:

$$a'(x) = a_1, \quad a''(x) = a_2, \quad \dots, \quad b'(y) = b_1, \quad b''(y) = b_2, \quad \dots, \\ c'(a(x) + b(y)) = c_1, \quad c''(a(x) + b(y)) = c_2, \quad \dots$$

Записывая условие гармоничности z , получаем

$$c_2 a_1^2 + c_1 a_2 + c_2 b_1^2 + c_1 b_2 = 0. \quad (4)$$

Дифференцируя это соотношение по x и по y , получаем

$$c_3 a_1^3 + 3c_2 a_1 a_2 + c_1 a_3 + c_3 a_1 b_1^2 + c_2 a_1 b_2 = 0, \\ c_3 b_1 a_1^2 + c_2 b_1 a_2 + c_3 b_1^3 + 3c_2 b_1 b_2 + c_1 b_3 = 0.$$

Три полученных соотношения линейны относительно производных (c_1, c_2, c_3) . Если имеется решение, с непостоянной функцией $c(t)$, то определитель этой однородной системы должен быть равным нулю, откуда получаем

$$(a_1^2 + b_1^2)(b_3 a_1^3 - a_3 b_1 a_1^2 + 2a_1 a_2^2 b_1 + a_1 b_3 b_1^2 - 2a_1 b_2^2 b_1 - a_3 b_1^3) = 0.$$

Если a и b – не являются постоянными, то $(a_1^2 + b_1^2)$ – ненулевой множитель и мы получаем соотношение, связывающее функции a и b :

$$b_3 a_1^3 - a_3 b_1 a_1^2 + 2a_1 a_2^2 b_1 + a_1 b_3 b_1^2 - 2a_1 b_2^2 b_1 - a_3 b_1^3 = 0. \quad (5)$$

Это же соотношение можно получить иначе. Если b не постоянная, то локально можно от переменных (x, y) перейти к переменным $(x, t = a(x) + b(y))$. Переменная y при этом становится функцией $y = y(x, t)$, причем

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x, t) = -\frac{da(x)/dx}{db(y)/dy}.$$

В этих переменных соотношение (4) позволяет выразить $(\ln(c'(t)))' = c''(t)/c'(t)$ через a и b . И тогда условие (5), полученное нами выше, — это условие независимости правой части выражения для логарифмической производной от x . Поэтому справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. (1) *Непостоянные функции a и b удовлетворяют соотношению (5) тогда и только тогда, когда найдется непостоянная функция $c(t)$ такая, что $z = c(a(x) + b(y))$ — гармонична, т.е. z — простая гармоническая функция.*

(2) *Если фиксировано решение (5), то функция $c(t)$ определена однозначно с точностью до вещественной линейной замены $c(t) \rightarrow k_1(c(t) - k_2)$.*

Выражая из (5) b_3 , получаем

$$b_3 = \frac{b_1(2a_1b_2^2 + a_3a_1^2 - 2a_1a_2^2 + a_3b_1^2)}{a_1(a_1^2 + b_1^2)}.$$

Дифференцируя полученное соотношение по x , получаем

$$\begin{aligned} & -4a_2b_2^2a_1^3 + a_4a_1^5 + 2a_4a_1^3b_1^2 - 5a_3a_1^4a_2 \\ & - 6a_3a_1^2a_2b_1^2 + 4a_2^3a_1^3 + a_1a_4b_1^4 - a_2a_3b_1^4 = 0. \end{aligned}$$

Выражая отсюда b_2 , получаем

$$b_2 = \frac{\sqrt{a_1a_2(-6a_3a_1^2a_2b_1^2 + a_4a_1^5 + 2a_4a_1^3b_1^2 - 5a_3a_1^4a_2 + 4a_2^3a_1^3 + a_1a_4b_1^4 - a_2a_3b_1^4)}}{2a_1^2a_2}. \quad (6)$$

Дифференцируя это соотношение по x , получаем

$$a_1^2a_2a_5 - a_1^2a_3a_4 - 3a_2^2a_4a_1 + 3a_2^3a_3 = 0. \quad (7)$$

Можно убедиться, что при выполнении (7) и (6) условие согласования выражений для b_2 и b_3 , а именно то, что производная b_2 равна b_3 , выполнено автоматически.

Итак, мы получили следующий алгоритм построения простых гармонических функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Любая простая гармоническая функция $z = c(a(x) + b(y))$ строится так:*

- функция $a(x)$ — это произвольное решение уравнения 5-го порядка (7);
- функция $b(y)$ — это произвольное решение уравнения 2-го порядка (6) с полученным ранее $a(x)$;
- функция $c(t)$ — это произвольное решение уравнения 2-го порядка (4), которое строится по уже полученным a и b .

Ясно, что в утверждении 2 можно поменять местами a и b , т.е. b удовлетворяет тому же самому уравнению (7), а функция a может быть получена по фиксированному решению b .

Оценим число параметров, от которых зависит семейство простых гармонических функций. Выбор $a(x)$ зависит от 5-ти параметров, причем один из них входит аддитивно. Выбор $b(y)$ зависит от 2-х параметров, причем один из них входит аддитивно. Эти два аддитивных параметра складываются с произвольным значением параметра k_2 из утверждения 1. Итого

$$(5 - 1) + (2 - 1) + 2 = 7.$$

Уравнение (5) дважды допускает понижение порядка. Первое – при переходе к $A(x) = a'(x)$, $B(y) = b'(y)$, и второе – при введении в качестве неизвестных функций

$$P(A) = A'(x) = a''(x), \quad Q(B) = B'(y) = b''(y).$$

При этом

$$A''(x) = P'(A)P(A), \quad B''(y) = Q'(B)Q(B)$$

и мы получаем

$$P'(A)P(A)(A^2B + B^3) - Q'(B)Q(B)(B^2A + A^3) + 2AB((Q(B))^2 - (P(A))^2) = 0. \quad (8)$$

Если перейти к $p(A) = (P(A))^2$, $q(B) = (Q(B))^2$, то уравнение становится линейным:

$$(p'(A)B - q'(B)A)(A^2 + B^2) + 4AB(q(B) - p(A)) = 0. \quad (9)$$

Выразим отсюда $q'(B)$ и продифференцируем ответ по A ; получим

$$p''(A)A^5 + 2p''(A)A^3B^2 - 5p'(A)A^4 - 6p'(A)A^2B^2 + Ap''(A)B^4 - 8q(B)A^3 + 8p(A)A^3 - p(A)B^4 = 0.$$

Выразим отсюда $q(B)$:

$$q(B) = \frac{1}{8}A^2p''(A) + \frac{1}{4}p''(A)B^2 - \frac{5}{8}Ap'(A) - \frac{3}{4}p'(A)B^2A + \frac{1}{8}p''(A)B^4A^2 + p(A) - \frac{1}{8}p'(A)B^4A^3. \quad (10)$$

Дифференцируя по A , получаем

$$p'''(A)A^3 - 3p''(A)A^2 + 3p'(A)A = 0. \quad (11)$$

Ищем решения вида $p = A^m$; получаем уравнение

$$m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) + 3m = 0$$

Решения – это $m = 0, 2, 4$, поэтому общее решение уравнения (11) имеет вид

$$p(A) = C_1 + C_2A^2 + C_3A^4 \quad (12)$$

Из (10) тогда получаем

$$q(B) = C_1 - C_2B^2 + C_3B^4. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (9), видим, что полученные $(p(A), q(B))$ – это общее решение (9)). Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$a''(x) = P(A) = \sqrt{C_1 + C_2(a'(x))^2 + C_3(a'(x))^4}.$$

Обозначим

$$\phi(A) = \int \frac{dA}{\sqrt{C_1 + C_2 A^2 + C_3 A^4}}.$$

Эта функция выражается через эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{d\zeta}{\sqrt{C_1 + C_2 \zeta^2 + C_3 \zeta^4}},$$

а именно, если

$$C_1 + C_2 A^2 + C_3 A^4 = \frac{-1}{\lambda^2} (A^2 + \mu^2)(A^2 + \nu^2),$$

то

$$\phi(A) = \frac{1}{\nu} F\left(\frac{iA}{\nu}, \frac{\nu}{\mu}\right).$$

Таким образом, при условии $\mu^2 \neq \nu^2$ производная $a'(x)$ – это эллиптическая функция, $a'(x) = \phi^{-1}(x + C_4)$, а сама функция

$$a(x) = \int \phi^{-1}(x + C_4) dx + \tilde{C}_1$$

– это ее первообразная. Если же $\mu^2 = \nu^2$, то $\phi(A)$ – элементарная функция и выражается через логарифм. Далее, если

$$\psi(B) = \int \frac{dB}{\sqrt{C_1 - C_2 B^2 + C_3 B^4}} = \frac{1}{i\nu} F\left(\frac{B}{\nu}, \frac{\nu}{\mu}\right),$$

то

$$b'(y) = \psi^{-1}(y + C_5), \quad b(y) = \int \psi^{-1}(y + C_5) dy + \tilde{C}_2$$

где b' эллиптика при условии $\mu^2 \neq \nu^2$. Далее, как это описано выше (см. утверждение 1), восстанавливаем внешнюю функцию $c(t)$ однозначно с точностью до выбора (k_1, k_2) . При этом сумма $\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ поглощается константой k_2 .

Напомним, что мы говорим, что функция *представима в квадратурах*, если она есть композиция элементарных функций, их первообразных и обратных к ним. Выше нами было доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. (а) *Функции $(a(x), b(y), c(t))$, входящие в представление простых гармонических функций представимы в квадратурах.*

(б) *Функции $a'(x), b'(y)$ элементарны или эллиптичны.*

(с) *Общее решение зависит от набора семи постоянных $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, k_1, k_2)$.*

В заключение отметим, что приведенное построение нетрудно адаптировать к анализу сложности аналитических решений других уравнений, например, волнового $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Общее решение имеет вид

$$z = f(x + y) + g(x - y) \quad (\text{формула д'Аламбера}),$$

поэтому сложность его аналитических решений также не превосходит двух и встает задача описания простых решений, т.е. решений сложности один, к которой можно применить наш подход. Ответ аналогичен. Простые функции – это семимерное семейство, представимое интегралами эллиптических и элементарных функций.

Если же обратиться к решениям уравнения *теплопроводности* $z'_y = z''_{xx}$, то ситуация меняется. У нас нет верхней оценки сложности его аналитических решений. Но задать вопрос об описании простых решений, т.е. сложности не выше единицы $z = c(a(x) + b(y))$ можно. Применяя описанную процедуру и исключая функции $c(t)$ и $b(y)$, мы получаем следующее уравнение на $a(x)$:

$$2a_2^2 a_3^2 a_1 - 2a_2^4 a_3 - 5a_1^2 a_3^3 + 5a_1^2 a_2 a_4 a_3 + 2a_1 a_2^3 a_4 + a_1^3 a_5 a_3 - 2a_1^2 a_5 a_2^2 - a_1^3 a_4^2 = 0, \quad (14)$$

которое после двойного понижения порядка ($a'(x) = A$, $a''(x) = P(A)$) принимает вид

$$\begin{aligned} &4P(A)P'(A)^2 A - 2P(A)^2 P'(A) - 2A^2 P'(A)^3 - 3P(A)A^2 P'(A)P''(A) \\ &+ 2P(A)^2 A P''(A) + P(A)A^3 P'(A)P'''(A) + 2A^3 P'(A)^2 P''(A) \\ &- 2P(A)^2 A^2 P'''(A) - P(A)A^3 P''(A)^2 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет решение в квадратурах, как и уравнения для b и c . В итоге также получаем 7-мерное семейство простых решений уравнения теплопроводности.

Оценка сложности аналитических решений уравнения Хопфа $z'_y = zz'_x$ нам не известна. Однако простые решения $z = c(a(x) + b(y))$ имеют вид

$$z = \frac{\alpha - mx}{\beta + my}.$$

При этом a и b выражаются через логарифм, а c – через экспоненту.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Blum, M. Shub, S. Smale, “On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP - completeness, recursive functions and universal machines”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **21**:1 (1989), 1–46.
- [2] D. Yu. Grigor'ev, “Additive complexity in directed computations”, *Theoret. Comput. Sci.*, **19**:1 (1982), 39–67.
- [3] A. Ostrowski, “Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **8**:3 (1920), 241–298.
- [4] А. Г. Витушкин, “13-я проблема Гильберта и смежные вопросы”, *УМН*, **59**:1(355) (2004), 11–24.
- [5] V. K. Beloshapka, “Analytic complexity of functions of two variables”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 243–249.
- [6] V. K. Beloshapka, “Analytical complexity: development of the topic”, *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:4 (2012), 428–439.
- [7] В. А. Красиков, Т. М. Садыков, “Об аналитической сложности дискриминантов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 86–101.

В. К. Белошапка

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило

25.06.2015