Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Шухов, О зависимости показателя роста от длины определяющего соотношения, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 612–618

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:05:00

УДК 512

О ЗАВИСИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ РОСТА ОТ ДЛИНЫ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ

А. Г. Шухов

Пусть $G_k = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1^{(k)} = \dots = r_{j_k}^{(k)} = 1 \rangle = \langle A \mid R_k \rangle$ – последовательность конечно определенных групп с порождающим множеством $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, R_k – симметризованное множество слов над алфавитом $A \cup A^{-1}$, полученное из определяющих слов и их обратных всеми циклическими сдвигами. Будем предполагать, что слова из R_k являются циклически неприводимыми, а их длина стремится к ∞ с ростом k . В работе доказано, что если R_k удовлетворяют условию малого сокращения $C'(1/6)$ и число соотношений не очень быстро растет с ростом k , то показатель роста $\lambda(G_k) \rightarrow 2m - 1$ при $k \rightarrow \infty$.

Библиография: 5 названий.

1. Формулировка результата. Пусть G – группа с конечным множеством $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ее порождающих. Для элемента $g \in G$ *длиной* $|g|$ будем называть минимальное число элементов из $A \cup A^{-1}$, необходимых для записи g . Обозначим через $\lambda = \lambda(G)$ показатель роста:

$$\lambda(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma(n)},$$

где $\gamma(n) = \#\{g \in G : |g| \leq n\}$ – число элементов длины, не превосходящей n . Функция $\gamma(n)$ называется *функцией роста группы* G .

В работе [1] поставлена следующая задача: при каких условиях

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(G_k) = 2m - 1, \quad (1)$$

где $G_k = \langle a_1, \dots, a_m \mid r^{(k)} = 1 \rangle$ – последовательность групп с m образующими и одним определяющим соотношением, длина которого с ростом k стремится к ∞ . Напомним, что $2m - 1$ – показатель роста свободной группы с m образующими. В [1] отмечено, что в общем случае равенство (1) не имеет места (см. пример ниже).

Цель настоящей заметки – сформулировать некоторые достаточные условия, при которых равенство (1) справедливо.

Пусть $G = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1 = \dots = r_j = 1 \rangle = \langle A \mid R \rangle$ – конечно определенная группа, R – симметризованное множество слов над алфавитом $A \cup A^{-1}$, полученное из определяющих слов r_i и их обратных r_i^{-1} всеми циклическими сдвигами. Будем предполагать, что слова $r \in R$ являются циклически неприводимыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00974, и фонда INTAS, грант № 94-320.

Слово w называется *куском относительно R* , если существуют два различных элемента из R вида wv и wv' , т.е. кусок – это слово, которое сокращается в произведении двух различных элементов из R .

Пусть $\lambda > 0$. Множество R удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, если $|w| < \lambda|r|$ для любого $r \in R$ и каждого его подслова w , которое является куском относительно R (см. [2], [3]).

Пусть $G_k = \langle a_1, \dots, a_m \mid r_1^{(k)} = \dots = r_{j_k}^{(k)} = 1 \rangle = \langle A \mid R_k \rangle$ – последовательность m -порожденных групп с циклически неприводимыми определяющими соотношениями $r_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, j_k$. Обозначим через l_k и L_k длины самого короткого и самого длинного слова в R_k , и пусть $t_k = [l_k/6]$.

ТЕОРЕМА. Пусть $G_k = \langle A \mid R_k \rangle$ и симметризованные множества R_k удовлетворяют условию $C'(1/6)$. Предположим, что с ростом k длина самого короткого определяющего соотношения l_k стремится к ∞ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} j_k L_k \left(\frac{2}{2m-1} \right)^{t(k)} = 0. \quad (2)$$

Тогда имеет место равенство (1).

СЛЕДСТВИЕ. Если G_k – последовательность m -порожденных групп с одним определяющим соотношением, удовлетворяющих условию $C'(1/6)$, то справедливо равенство (1).

Доказательство теоремы разбивается на два этапа: первый связан с использованием леммы Гриндлингера для $C'(1/6)$ -групп [3], второй основан на технике работы [4].

Нам потребуются два определения. Пусть $G = \langle A \mid R \rangle$. Слово X (над алфавитом $A \cup A^{-1}$) называется α -приведенным относительно R , $\alpha \in (0, 1)$, если X свободно несократимо и не содержит α -части определяющего слова, т.е. X нельзя представить в виде $u_1 w u_2$, где w – подслово некоторого $r \in R$, $|w| \geq [\alpha|r|]$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\alpha|r| \geq 2$ для любого $r \in R$. Множество α -приведенных слов будем обозначать через $\mathcal{N}(\alpha)$.

Слово Y называется *геодезическим*, если соответствующий этому слову путь (с началом в единичном элементе) в графе Кэли группы G (см., например, [2]) является геодезическим.

2. Доказательство теоремы.

ЛЕММА 1. Пусть $G = \langle A \mid R \rangle$ и R удовлетворяет условию $C'(1/6)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}(1/6)$ есть множество $1/6$ -приведенных слов относительно R . Тогда

- 1) различные слова из $\mathcal{N}$ представляют различные элементы из G , т.е. если X, Y – разные слова в $\mathcal{N}$, то $X \neq Y$ в группе G ;
- 2) слова из $\mathcal{N}$ являются геодезическими; более того, если $X \in \mathcal{N}$, а Y – геодезическое слово (Y , вообще говоря, не принадлежит $\mathcal{N}$), то из равенства $X = Y$ в G вытекает из графическое равенство.

Доказательство леммы 1 основано на применении следующего утверждения. Для $q > 0$ и слова s над алфавитом $A \cup A^{-1}$ будем писать $s > qR$, если существует $r \in R$, приведенная форма которого имеет вид $r = st$ и $|s| > q|r|$.

ЛЕММА ГРИНДЛИНГЕРА ДЛЯ $1/6$ -ГРУПП [3]. Пусть R удовлетворяет условию $C'(1/6)$. Предположим, что w – нетривиальное циклически приведенное слово такое, что $w \in N(R)$, где $N(R)$ – нормальное замыкание R в свободной группе F_m с образующими из A . Тогда либо

1) $w \in R$,

либо некоторая циклически приведенная перестановка элемента w содержит одно из следующих:

- 2) два непересекающихся подслова, каждое из которых $> (5/6)R$;
- 3) три непересекающихся подслова, каждое из которых $> (4/6)R$;
- 4) четыре непересекающихся подслова, два из которых $> (4/6)R$ и два $> (3/6)R$;
- 5) пять непересекающихся подслов, четыре из которых $> (3/6)R$ и одно $> (4/6)R$;
- 6) шесть непересекающихся подслов, каждое из которых $> (3/6)R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть X, Y – разные слова в $\mathcal{N}$, но $X = Y$ в G . Начала и окончания слов X и Y могут совпадать, т.е. $X = X_0 X_1 X_2$, $Y = X_0 Y_1 X_2$, при этом $X_1 = Y_1$ в G , $X_1, Y_1 \in \mathcal{N}$, и слово $w = X_1 Y_1^{-1}$ циклически приведено. Поскольку X_1 и Y_1 принадлежат $\mathcal{N}$, слово $w = X_1 Y_1^{-1}$ (либо некоторая циклическая перестановка w^* слова w) может содержать максимум либо два подслова, каждое из которых принадлежит $\mathcal{N}(2/6)$, либо одно подслово из $\mathcal{N}(3/6)$, что противоречит лемме Гриндлингера. Утверждение 1) леммы 1 доказано.

Пусть теперь $X \in \mathcal{N}$, Y – геодезическое слово и $X = Y$ в G . Как и выше, запишем $X = X_0 X_1 X_2$, $Y = X_0 Y_1 X_2$, где $X_1 \in \mathcal{N}$, Y_1 – геодезическое слово, $w = X_1 Y_1^{-1}$ циклически приведено.

1) Пусть $w \in R$. Поскольку $X_1 \in \mathcal{N}(1/6)$, то $|X_1| < (1/6)|w|$ и, следовательно, $|Y_1| \geq (5/6)|w|$, что противоречит геодезичности Y_1 .

2) Пусть w (либо некоторая циклическая перестановка w^* слова w) содержит два непересекающихся подслова, каждое из которых $> (5/6)R$. Тогда Y_1 либо включает два подслова, каждое из которых $> (4/6)R$, либо одно подслово $> (5/6)R$. И в том, и в другом случае получаем противоречие с геодезичностью Y_1 .

Случаи 3)–6) леммы Гриндлингера рассматриваются аналогично, и лемма 1 доказана.

Лемма 1 позволяет не различать слова из $\mathcal{N}$ над алфавитом $A \cup A^{-1}$ и соответствующие элементы группы G , чем мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Перейдем ко второму этапу доказательства теоремы. Пусть $\delta(n) = \#\{g \in G : |g| = n\}$ – число элементов группы G длины n . В частности, для свободной группы F_m с m образующими $\delta(n) = 2m(2m-1)^{n-1}$ ($\delta(n)$ называется *сферической функцией роста*). Соответствующая *производящая функция роста*

$$H^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^n = 1 + 2mz \sum_{n=1}^{\infty} (2m-1)^{n-1} z^{n-1} = 1 + \frac{2mz}{1 - (2m-1)z}.$$

Нам потребуется неравенство, аналогичное неравенству Голода–Шафаревича [4].

Пусть U – некоторое непустое множество свободно несократимых слов над алфавитом $A \cup A^{-1}$, элементы которого будем называть *запрещенными словами*. Слово называется *допустимым*, если оно не содержит вхождений запрещенных слов. Как и в [4], будем считать, что U не содержит слов длины 1 и никакое слово из U не является подсловом другого слова из U .

Обозначим через $h(n)$ число допустимых несократимых слов длины n , а через

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n$$

соответствующую производящую функцию. Будем говорить, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{если } a_n \geq b_n, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

С учетом этого соглашения имеет место следующее утверждение (ср. с [4, неравенство (11)]).

ЛЕММА 2. Пусть U – множество запрещенных слов над алфавитом $A \cup A^{-1}$, $|A| = m$, и $H(z)$ – производящая функция числа допустимых слов. Тогда

а) выполнено

$$H(z) \left(1 - (2m-1)z + \sum_{u \in U} z^{|u|} \right) \geq 1;$$

б) если ряд

$$\left(1 - (2m-1)z + \sum_{u \in U} z^{|u|} \right)^{-1}$$

имеет неотрицательные коэффициенты, то

$$H(z) \geq \left(1 - (2m-1)z + \sum_{u \in U} z^{|u|} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимое слово длины $n+1$ получается из допустимого слова длины n умножением на букву из $A \cup A^{-1}$, не совпадающую с обратным элементом к последней букве данного слова. Число построенных таким способом слов равно $h(n) \times (2m-1)$. Некоторые из этих слов в конце могут содержать запрещенное слово $u \in U$. Следовательно,

$$h(n+1) \geq h(n) \cdot (2m-1) - \sum_{u \in U} h(n+1-|u|).$$

Умножим это неравенство на z^{n+1} и просуммируем по n :

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} h(n+1)z^{n+1} \\ &\geq 1 + (2m-1)z \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^n - \sum_{u \in U} \sum_{n=0}^{\infty} z^{|u|} h(n+1-|u|)z^{n+1-|u|}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H(z) \geq 1 + (2m - 1)zH(z) - H(z) \sum_{u \in U} z^{|u|}.$$

Отсюда имеем

$$H(z) \left(1 - (2m - 1)z + \sum_{u \in U} z^{|u|} \right) \geq 1,$$

и лемма 2 доказана.

Применим лемму 2 в специальном случае. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $G = \langle A \mid R \rangle = \langle A \mid r_1 = \dots = r_j = 1 \rangle$. Симметризованное множество R , состоящее из слов, являющихся циклическими сдвигами r_i и r_i^{-1} , $i = 1, \dots, j$, содержит не более $2(|r_1| + \dots + |r_j|)$ элементов. В словах r_i и r_i^{-1} , $i = 1, \dots, j$, существует $\leq 2|r_i|$ подслов длины $[\alpha|r_i|]$; обозначим их $u_1^i, \dots, u_{m_i}^i$, где $m_i \leq 2|r_i|$. Назовем $U = \{u_1^1, \dots, u_{m_1}^1, \dots, u_1^j, \dots, u_{m_j}^j\}$ *множеством запрещенных слов*.

Множество допустимых слов в этом случае совпадает с множеством $\mathcal{N}(\alpha)$ α -приведенных слов. Обозначим через $h_\alpha(n)$ число несократимых слов из $\mathcal{N}(\alpha)$ длины n . Пусть

$$H_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_\alpha(n) z^n$$

– соответствующая производящая функция.

ЛЕММА 3. Пусть $G = \langle A \mid r_1 = \dots = r_j = 1 \rangle$. Тогда

а) *выполнено*

$$H_\alpha(z) \left(1 - (2m - 1)z + \sum_{i=1}^j |r_i| z^{[\alpha|r_i|]} \right) \geq 1; \quad (4)$$

б) *при $\alpha = 1/6$ для показателя роста $\lambda(G)$ группы G , удовлетворяющей условию $C'(1/6)$, имеет место оценка снизу*

$$\lambda(G) \geq \xi^{-1}, \quad (5)$$

где ξ – минимальный положительный корень многочлена

$$\varphi(z) = 1 - (2m - 1)z + 2 \sum_{i=1}^j |r_i| z^{[|r_i|/6]}.$$

(Напомним, что неравенство (4) необходимо понимать в смысле (3).)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (4) непосредственно вытекает из леммы 2. Обозначим через β радиус сходимости ряда Маклорена функции $H_{1/6}(z)$. Заметим, что $\beta \leq \xi$; в противном случае неравенство (4) не выполняется в некотором интервале $(\xi, \xi + \delta)$, где $\delta > 0$. Для любого натурального n в силу леммы 1 имеем неравенство $\delta(n) \geq h_{1/6}(n)$, где $\delta(n)$ – число элементов группы G длины n . Отсюда для показателя роста $\lambda(G)$ группы G вытекает оценка

$$\lambda(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\delta(n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{h_{1/6}(n)} = \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\xi},$$

и лемма 3 доказана.

Применим лемму 3 к последовательности $G_k = \langle A \mid r_1^{(k)} = \dots = r_{j_k}^{(k)} = 1 \rangle$. Пусть ξ_k – минимальный положительный корень многочлена

$$\varphi_k(z) = 1 - (2m - 1)z + 2 \sum_{i=1}^{j_k} |r_i^{(k)}| z^{\lfloor |r_i^{(k)}|/6 \rfloor}.$$

В силу леммы 3 $\lambda(G_k) \geq \xi_k^{-1}$. Покажем, что $\xi_k \rightarrow (2m - 1)^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$. В самом деле, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\varphi_k\left(\frac{1 + \varepsilon}{2m - 1}\right) = -\varepsilon + 2 \sum_{i=1}^{j_k} |r_i^{(k)}| \left(\frac{1 + \varepsilon}{2m - 1}\right)^{\lfloor |r_i^{(k)}|/6 \rfloor}.$$

Из условия (2) следует, что

$$\varphi_k\left(\frac{1 + \varepsilon}{2m - 1}\right) < 0$$

для достаточно большого k . Поскольку $\varphi_k(z) > 0$ при $0 \leq z \leq (2m - 1)^{-1}$, минимальный положительный корень ξ_k многочлена $\varphi_k(z)$ (для достаточно большого k) принадлежит интервалу

$$\left(\frac{1}{2m - 1}, \frac{1 + \varepsilon}{2m - 1}\right).$$

Поскольку $\lambda(G_k)$ не превосходит показателя свободной группы, т.е. $\lambda(G_k) \leq 2m - 1$, то из (5) вытекает, что $\lambda(G_k) \rightarrow 2m - 1$ при $k \rightarrow \infty$, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение теоремы остается справедливым, если условие $C'(1/6)$ заменить на условие $C'(1/4)$ и $T(4)$, а константу $\alpha = 1/6$ заменить на $\alpha = 1/4$.

В этом случае вместо леммы Гриндлингера используется

ТЕОРЕМА [3, теорема 4.6]. Если R удовлетворяет условию $C'(1/4)$ и $T(4)$, w – нетривиальное циклически приведенное слово из $N(R)$, то либо $w \in R$, либо циклическая перестановка w^* слова w содержит два непересекающихся подслова, каждое из которых $> (3/4)R$, или четыре непересекающихся подслова, каждое из которых $> (1/2)R$.

Напомним, что R удовлетворяет условию $T(q)$ (см. [3]) для натурального q , если для любого h , $3 \leq h \leq q$, и элементов $r_1, \dots, r_h$ из R таких, что последовательные элементы r_i, r_{i+1} не являются взаимно обратными, по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ приведено.

В заключение приведем пример, показывающий, что в общем случае равенство (1) не имеет места.

Пусть $G_k = \langle x, y \mid x^{-1}yx = y^{2k} \rangle$. Производящие функции роста этих групп вычислены в [5] и при $k \geq 2$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 H_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^n = (1+z)(1-z)^3 & \left(1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + z^4 + 2z^{k+1} - 2z^{k+2} \right. \\
 & + 2z^{k+3} + 2z^{k+4} + 4z^{k+5} - 6z^{2k+2} - 12z^{2k+5} + 2z^{2k+8} - 8z^{3k+4} \\
 & - 4z^{3k+6} - 4z^{3k+8} + 8z^{4k+5} + 4z^{4k+6} - 8z^{4k+7} \\
 & \left. + 4z^{4k+8} + 8z^{5k+7} \right) / \left((1-z-z^2-z^3+2z^{k+2}-2z^{k+4} \right. \\
 & \left. + 2z^{2k+4})^2 (1-2z-z^2+2z^{k+1}-2z^{k+2}+2z^{2k+2}) \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Показатель роста $\lambda(G_k)$ группы G_k

$$\lambda(G_k) = \frac{1}{\beta_k} = \frac{1}{\zeta_k}.$$

Здесь β_k – радиус сходимости ряда Маклорена функции (6), а ζ_k – минимальный положительный корень знаменателя (6). При $k \rightarrow \infty$ $\zeta_k \rightarrow \zeta$, где ζ – минимальный положительный корень функции $\psi(z) = (1-z-z^2-z^3)(1-2z-z^2)$.

Нетрудно проверить, что $\zeta = -1 + \sqrt{2}$ и, следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(G_k) = \sqrt{2} + 1 < 3.$$

Автор искренне благодарен Р.И. Григорчуку за постановку задачи, большую поддержку и помощь, а также И.Г. Лысенку за полезные советы и обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Grigorchuk R.I., de la Harpe P. On problems related to growth, entropy and spectrum in group theory // J. Dynam. Control Systems. 1997. V. 3. № 1. P. 51–89.
- [2] Гис Э., де ля Арп П. Гиперболические группы по Михаилу Громову. М.: Мир, 1992.
- [3] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
- [4] Григорчук Р. И. Функции роста, переписывающие системы и эйлерова характеристика // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 653–668.
- [5] Collins D. J., Edjvet M., Gill C. P. Growth series for the group $\langle x, y \mid x^{-1}yx = y^l \rangle$ // Arch. Math. (Basel). 1997. V. 62. P. 1–11.