Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Агеев, О функции кратности спектра динамических систем, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 619–622

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:09:35

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ФУНКЦИИ КРАТНОСТИ СПЕКТРА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. Н. Агеев

В статье рассматриваются сохраняющие непрерывную меру μ преобразования T пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$, называемые *динамическими системами*. Будем обозначать индуцированные ими унитарные операторы в $L_2(\mu)$, $Tf(x) = f(Tx)$, теми же символами, группу всех преобразований через $\text{Aut}(\mu)$, множество существенных значений функции кратности спектра унитарного оператора U через $M(U)$.

В литературе [1], [2] не раз отмечалась сложность одной из классических нерешенных проблем спектральной теории преобразований с инвариантной мерой: указать точные условия на спектр унитарного оператора такие, что он мог быть реализован эргодической динамической системой. Не решены даже частные случаи этой задачи: существование преобразования с простым лебеговским спектром (проблема Банаха) и с конечнократным абсолютно непрерывным спектром в ортогональном дополнении к пространству констант $\{f : f \equiv c\}^\perp$ (см. [2]).

Очевидно, $M(U) \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Отметим, что $M(T)$ может быть любым подмножеством из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, если не требовать эргодичности преобразования T . Для эргодических преобразований T имеем $1 \in M(T)$, где 1 отвечает циклическому подпространству $\{f \in L_2(\mu) : Tf = f\}$. По реализации подмножеств из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ в виде $M(T)$ для эргодических преобразований T (отличных от $\{1\}$ и $\{1, \infty\}$) отметим работы [3]–[6]. В [3] построены первые примеры эргодических преобразований с $M(T) = \{1, 2\}$. В [4] для любого натурального n построены преобразования T с $M(T) = \{1, n\}$. В [5], [6] последовательно расширялся класс подмножеств из $\mathbb{N}$, реализуемых как $M(T)$. Заметим, что эти конструкции существенно использовали наличие в централизаторе преобразования T косо го произведения с групповым автоморфизмом, дающее следующее ограничение на $M(T)$: $m_1, m_2 \in M(T) \Rightarrow \text{НОК}(m_1, m_2) \in M(T)$. Предложенная ниже конструкция динамических систем, в частности, позволяет снять это ограничение и показывает, что типичное преобразование T из $\text{Aut}(\mu)$ для любого $M \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $1 \in M$, допускает эргодические групповые расширения $\tilde{T}$ с $M(\tilde{T}) = M$. Методика доказательства не использует групповые автоморфизмы и по духу близка методу геометрических моделей, примененных к изучению спектральных свойств классических преобразований фон Неймана (см. [7], [8]).

Заметим, что принято рассматривать спектр преобразований в $\{f : f \equiv c\}^\perp$. В значительной мере интерес здесь обусловлен нерешенной задачей Рохлина о существовании эргодического преобразования с $M(T) = \{n\}$, где $n \notin \{1, \infty\}$ (см. [4], [9]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96135, и совместного проекта Российского фонда фундаментальных исследований и фонда INTAS, грант № 00-418196.

1. Определение класса A . Рассмотрим кусочно-линейные, сохраняющие ориентацию преобразования на $[0, 1]$ с мерой Лебега μ . Преобразование T из класса A удобно определить, достраивая рекуррентно: на k -м шаге имеем представление $[0, 1]$ в виде дизъюнктного объединения полуинтервалов $I_1, I_2, \dots, I_{q_k}, I'_k$, где I'_k крайний справа, полуинтервалы I_i ($1 \leq i \leq q_k$) имеют одну длину и T отображает линейно I_i на I_{i+1} ($1 \leq i < q_k$). Преобразование T отображает $I_{q_k} \cup I'_k$ на $I'_k \cup I_1$, но неопределено на этом шаге. Опишем переход от k к $k+1$. Фиксируем натуральное число p_k и последовательность неотрицательных целых чисел $\{a(k, p) : 1 \leq p \leq p_k\}$. Разобьем каждый I_i на p_k полуинтервалов $I_{i,p}$ ($1 \leq p \leq p_k$) равной длины, занумерованных слева направо. Ясно, что T отображает линейно $I_{i,p}$ на $I_{i,p+1}$ ($1 \leq i < q_k$). Разобьем I'_k на полуинтервалы $I'_{k,p,a}$ ($p \in \{p : a(k, p) > 0\}$, $1 \leq a \leq a(k, p)$) одной длины, совпадающей с длиной $I_{i,p}$, и крайний справа полуинтервал I'_{k+1} . На $(k+1)$ -м шаге имеем представление $[0, 1]$ в виде дизъюнктного объединения полуинтервалов

$$\{I'_{k+1}\} \cup \{I_{i,p} : 1 \leq i \leq q_k, 1 \leq p \leq p_k\} \cup \{I'_{k,p,a} : p \in \{p : a(k, p) > 0\}, 1 \leq a \leq a(k, p)\}$$

и

$$q_{k+1} = q_k p_k + \sum_p a(k, p).$$

Доопределим преобразование T (с сохранением ориентации), переставляя полуинтервалы по следующей схеме:

$$\begin{aligned} I_{q_k,p} &\rightarrow I_{1,p+1} \quad \text{при } p < p_k \text{ и } a(k, p) = 0, \\ I_{q_k,p} &\rightarrow I'_{k,p,1} \rightarrow I'_{k,p,2} \rightarrow \dots \rightarrow I'_{k,p,a(k,p)} \rightarrow I_{1,p+1} \quad \text{при } p < p_k \text{ и } a(k, p) > 0, \\ I_{q_k,p_k} &\rightarrow I'_{k,p_k,1} \rightarrow \dots \rightarrow I'_{k,p_k,a(k,p_k)} \quad \text{при } a(k, p_k) > 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $I_{q_{k+1}}$ есть $I'_{k,p_k,a(k,p_k)}$ при $a(k, p_k) > 0$ и I_{q_k,p_k} в противном случае. Преобразование T отображает $I'_{k+1} \cup I_{q_{k+1}}$ на $I_1 \cup I'_{k+1}$, но неопределено на $(k+1)$ -м шаге.

Рассмотренная выше конструкция есть требуемая модификация представления любого преобразования, имеющего ранг 1. Потребуем дополнительно, чтобы для некоторой последовательности номеров $k_n \rightarrow \infty$ выполнялось:

$$\begin{aligned} p_{k_n} &\rightarrow \infty, \quad a(k_n, p) = 0, \quad 1 \leq p \leq p_{k_n}, \\ \frac{\mu(TI_{q_{k_n},p_{k_n}} \cap I_{1,1})}{\mu(I_{1,1})} &\rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отметим, что построенный класс A является подмножеством жестких (т.е. $T \xrightarrow{r_n} E$ при $r_n \rightarrow \infty$, где E – тождественный оператор) преобразований ранга 1.

2. Конструкция косых произведений. Фиксируем $M = \{1, n_1, n_2, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ и преобразование T из класса A . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \sum_j n_j, \quad \tilde{N} \leq \infty, \quad l = \#\{n_1, n_2, \dots\}, \quad l \leq \infty, \\ \tilde{N} - l &= \sum_j (n_j - 1), \quad \Omega = T^l \times C(T)^{\tilde{N}-l}, \end{aligned}$$

где T – окружность, естественным образом отождествленная с $[0, 1]$, $C(T) = \{S \in \text{Aut}(\mu) : TS = ST\}$.

Положим

$$\omega_\gamma(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < \gamma, \\ 1, & \gamma \leq x < 1, \end{cases} \quad \gamma, x \in \mathbb{T} \equiv [0, 1).$$

Далее, для удобства, будем использовать нумерацию координат в Ω , учитывающую структуру множества M . Сопоставим каждому $\tilde{\beta} \in \Omega$, где $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{1,n_1-1}, S_{2,1}, S_{2,2}, \dots, S_{2,n_2-1}, \dots)$ ($S_{i,j} \in C(T)$, $\beta_i \in \mathbb{T}$) вектор-функцию $\omega_{\tilde{\beta}}(x) = (\omega_{\beta_1}(x), \omega_{\beta_1}(S_{1,1}x), \dots, \omega_{\beta_1}(S_{1,n_1-1}x), \omega_{\beta_2}(x), \omega_{\beta_2}(S_{2,1}x), \dots)$ и преобразование $T_{\omega_{\tilde{\beta}}}$, действующее в пространстве $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2^{\tilde{N}} \equiv [0, 1) \times \{-1, 1\}^N$ с мерой Хаара $m = \mu \times l \times l \times \dots$ ($l\{i\} = 0.5$, $i \in \{-1, 1\}$) по формуле $T_{\omega_{\tilde{\beta}}}(x, y) = (Tx, \omega_{\tilde{\beta}}(x) * y)$, где $*$ – покоординатное умножение.

Заметим, что $C(T)$, как замкнутое подмножество в $\text{Aut}(\mu)$ относительно слабой топологии, есть польское (полное метризуемое сепарабельное) пространство. Поэтому Ω есть польское пространство относительно топологии декартова произведения.

Говорим, что для типичного элемента из A имеет место некоторое свойство, если множество элементов из A , удовлетворяющих этому свойству, содержит плотное подмножество типа G_δ в A (а следовательно, второй категории для рассматриваемых в статье пространств).

ТЕОРЕМА 1. Для любого элемента T из класса A для типичного $\tilde{\beta} \in \Omega$ преобразования $T_{\omega_{\tilde{\beta}}}$ эргодичны, $M(T_{\omega_{\tilde{\beta}}}) = M$ и множества собственных функций преобразований T и $T_{\omega_{\tilde{\beta}}}$ совпадают.

3. Модельные реализации. Рассматриваемый ниже вариант аппроксимаций преобразований пространства Лебега (X, μ) периодическими преобразованиями (см. [9]) естественно диктуется задачей, хотя, формально, ранее в литературе не встречался.

Говорим, что преобразование T допускает попарную аппроксимацию плоскими башнями, если существует последовательность $\{\xi_k\}$ разбиений X такая, что

$$\begin{aligned} \xi_k &= \{B^l(k), B_0(k), TB_0(k), \dots, T^{q_k-1}B_0(k)\}, \quad \xi_k \rightarrow \varepsilon, \\ \xi_{2k} &\leq \xi_{2k+1}, \quad k \geq 0, \quad \frac{q_{2k+1}}{q_{2k}} = p_k \in \mathbb{N}, \\ \mu(B_0(2k) \mid T^{nq_{2k}}B_0(2k+1)) &= 1, \quad 0 \leq n < p_k, \\ \mu(B_0(2k) \mid T^{p_k q_{2k}}B_0(2k+1)) &\rightarrow 1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \\ p_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad \mu(B_0(2k)) &= p_k \mu(B_0(2k+1)). \end{aligned}$$

Заметим, откуда следует, что $\mu(B_0(2k+1) \mid T^{p_k q_{2k}}B_0(2k+1)) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 1. Типичный элемент из $\text{Aut}(\mu)$ относительно слабой топологии допускает попарную аппроксимацию плоскими башнями.

ЛЕММА 2. Преобразование, допускающее попарную аппроксимацию плоскими башнями, метрически изоморфно преобразованию из класса A .

Ясно, что из лемм 1 и 2 с учетом теоремы 1 следует основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Для типичного элемента T из $\text{Aut}(\mu)$ относительно слабой топологии и типичного $\tilde{\beta} \in \Omega = \mathbb{T}^l \times C(\varphi_T T \varphi_T^{-1})^{\tilde{N}-l}$ множества собственных функций преобразований T и $\tilde{T}$ совпадают и $M(\tilde{T}) = M$, где $\tilde{T}(x, y) = (Tx, \omega_{\tilde{\beta}}(\varphi_T(x)) * y)$ действует в $X \times \mathbb{Z}_2^{\tilde{N}}$, $\varphi_T(x): X \rightarrow \mathbb{T}$ – изоморфизм такой, что $\varphi_T T \varphi_T^{-1} \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно достроить любое преобразование $\tilde{T}$, используя стандартную процедуру декартова произведения, до преобразования $\tilde{\tilde{T}}$, имеющего тот же набор собственных функций, что и $\tilde{T}$, так что $M(\tilde{\tilde{T}}) = M(\tilde{T}) \cup \{\infty\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для типичных вектор-функций $\omega(x)$ относительно слабой топологии и типичного преобразования T имеем $M(\tilde{T}) = \{1\}$ (а значит, $\tilde{T}$ эргодично), где $\tilde{T}(x, y) = (Tx, \omega(x) * y)$.

Преобразование, допускающее попарную аппроксимацию плоскими башнями, вообще говоря, не обязано иметь непрерывный спектр. Однако, преобразования с непрерывным спектром типичны в $\text{Aut}(\mu)$. В итоге имеем

СЛЕДСТВИЕ. *Типичный элемент T в группе $\text{Aut}(\mu)$ для любого множества $M \subseteq \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ($1 \in M$) имеет групповое расширение $\tilde{T}$ с непрерывным спектром в пространстве $\{f: f \equiv c\}^\perp$ такое, что $M(\tilde{T}) = M$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рохлин В. А. // УМН. 1967. Т. 22. № 5. С. 3–56.
2. Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г. // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–111.
3. Оселедец В. И. // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 5. С. 1009–1011.
4. Robinson E. A. // Invent. Math. 1983. V. 72. P. 299–314.
5. Robinson E. A. // Israel J. Math. 1986. V. 56. № 1. P. 75–88.
6. Goodson G. R., Kwiatkowski I., Lemanczyk M., Liardet P. // Studia Math. 1992. V. 102. № 2. P. 157–174.
7. Агеев О. Н. // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 143–144.
8. Агеев О. Н. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 8. С. 13–44.
9. Каток А. Б., Синай Я. Г., Стёпин А. М. // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1975. С. 129–262.