Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 684–694

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:21:43

О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом

В. И. Иванов

В пространстве L_p , $1 \leq p < 2$, на полупрямой со степенным весом известно неравенство Джексона между величиной наилучшего приближения функции четными целыми функциями экспоненциального типа и ее модулем непрерывности, определяемым с помощью оператора обобщенного сдвига. Вопрос о точности неравенства оставался открытым. Для константы в неравенстве Джексона получена оценка снизу, доказывающая его точность.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10894

1. Введение. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < 2$, на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, известно точное неравенство Джексона

$$E_{2R}(f)_p \leq 2^{1/p-1} \omega\left(\frac{2t_{d/2-1}}{R}, f\right)_p, \quad (1.1)$$

где $E_R(f)_p$ – величина наилучшего приближения функции f целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше R , $\omega(\delta, f)_p$ – ее модуль непрерывности в $L_p(\mathbb{R}^d)$, t_λ – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_\lambda(x)$ порядка $\lambda \geq -1/2$.

При $d = 1$ неравенство (1.1) доказано в [1], при $d > 1$ – в [2]. В [2] доказана и точность неравенства (1.1).

На радиальных функциях при $\lambda = d/2 - 1$ (1.1) превращается в неравенство Джексона в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$ со степенным весом $x^{2\lambda+1}$:

$$E_{2R}(f)_{p,\lambda} \leq 2^{1/p-1} \omega\left(\frac{2t_\lambda}{R}, f\right)_{p,\lambda}. \quad (1.2)$$

Для всех $\lambda > -1/2$ неравенство (1.1) доказано в [2]. Однако вопрос о его точности для всех значений параметров оставался открытым. Его точность при условиях $\lambda > 0$, $(2\lambda + 2)/(2\lambda + 1) < p < 2$ установлена в [3]. Наша цель – снять эти ограничения.

Точную константу в неравенстве Джексона называют *константой Джексона*. Правильная оценка константы Джексона в пространствах L_p снизу впервые была

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00045) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1333.2014К).

получена для одномерного тора $\mathbb{T}$ в [4], для произвольной компактной абелевой группы – в [5]. Нижняя оценка константы Джексона совпала с геометрической константой Юнга пространства L_p (см. [6]–[8]). Для тора $\mathbb{T}$ с весом $|\sin x|^{2\alpha+1}$, $\alpha \geq -1/2$, нижняя оценка константы Джексона, совпадающая с константой Юнга, была получена в [9]. Доказательство в [4] основано на специальном разбиении тора, в [5] используются вероятностные соображения и структурное строение компактных абелевых групп, в [9] дополнительно применяются свойства дважды стохастических матриц. В случае неравенства (1.2) появляются новые трудности, связанные с некомпактностью полупрямой и сложностью приближающего аппарата. Для их преодоления используются свойства дважды субстохастических матриц и оценка мощности ε -сети некоторого компактного класса целых функций экспоненциального типа.

Пусть $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\lambda \geq -1/2$, $\nu_\lambda(x) = x^{2\lambda+1}/2^\lambda \Gamma(\lambda+1)$ – степенной вес на полупрямой $\mathbb{R}_+$, $d\mu_\lambda(x) = \nu_\lambda(x)dx$, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, – пространство действительных измеримых по Лебегу функций f на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\lambda} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p d\mu_\lambda(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,\lambda} = \|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{\mathbb{R}_+} |f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пространство $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ – гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x) \overline{g(x)} d\mu_\lambda(x).$$

Через $E_{p,\lambda}^\sigma$, $\sigma > 0$, обозначим множество функций $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$, являющихся сужениями на $\mathbb{R}_+$ четных целых в $\mathbb{C}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \leq c_f e^{\sigma|z|}, \quad c_f > 0.$$

Таким образом, $E_{p,\lambda}^\sigma$ – класс четных целых функций экспоненциального типа не выше σ из $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$.

Величину наилучшего приближения функции $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ четными целыми функциями экспоненциального типа не выше R , $R > 0$, определим равенством

$$E_R(f)_{p,\lambda} = \inf \{ \|f - g\|_{p,\lambda} : g \in E_{p,\lambda}^R \}.$$

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ действует ограниченный линейный положительный оператор обобщенного сдвига [10]

$$T^t f(x) = c_\lambda \int_0^\pi f(A) \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.3)$$

где

$$c_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1/2)}, \quad A = \sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \varphi},$$

позволяющий определить модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f)_{p,\lambda} = \sup \{ \Omega(t, f)_{p,\lambda} : 0 \leq t \leq \delta \}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\begin{aligned}\Omega^p(t, f)_{p, \lambda} &= \int_0^\pi (T^t |f(y) - f(x)|^p)|_{y=x} d\mu_\lambda(x) \\ &= c_\lambda \int_0^\infty \int_0^\pi |f(A) - f(x)|^p \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x).\end{aligned}$$

Константу Джексона определим равенством

$$\mathcal{D}(R, \delta)_{p, \lambda} = \sup_{f \in L_{p, \lambda}(\mathbb{R}_+)} \frac{E_R(f)_{p, \lambda}}{\omega(\delta, f)_{p, \lambda}}.$$

Мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если $\lambda > -1/2$, $1 \leq p < 2$, $R > 0$, $\delta > 0$, то

$$\mathcal{D}(R, \delta)_{p, \lambda} \geq 2^{1/p-1}. \quad (1.4)$$

Оценка (1.4) не только доказывает точность неравенства (1.2), но она позволяет на радиальных функциях получать нижнюю оценку константы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < 2$, с весом Данкля.

В дальнейшем будем писать $A \ll B$, если $A \leq cB$ и постоянная $c > 0$ зависит от несущественных параметров.

2. Вспомогательные результаты. Пусть

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}, \quad j_\lambda(0) = 1$$

– нормированная функция Бесселя.

Для функции $f \in L_{2, \lambda}(\mathbb{R})$ справедливо разложение в интеграл Фурье–Ганкеля

$$f(x) = \int_0^\infty \widehat{f}(y) j_\lambda(xy) d\mu_\lambda(y), \quad \widehat{f}(y) = \int_0^\infty f(x) j_\lambda(xy) d\mu_\lambda(x). \quad (2.1)$$

Для функций $f, g \in L_{2, \lambda}(\mathbb{R}_+)$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}). \quad (2.2)$$

Приведем некоторые свойства функции $j_\lambda(x)$, $x, y \geq 0$:

$$|j_\lambda(x)| \leq 1, \quad |j'_\lambda(x)| \leq 1, \quad (2.3)$$

$$j'_\lambda(x) = -\frac{x}{2(\lambda+1)} j_{\lambda+1}(x), \quad (2.4)$$

$$x^{2\lambda+1} (j_\lambda(yx))' + y^2 x^{2\lambda+1} j_\lambda(yx) = 0, \quad (2.5)$$

$$|j_\lambda(x)| \ll \frac{1}{(x+1)^{\lambda+1/2}}, \quad (2.6)$$

$$\int_0^t j_\lambda(yx) d\mu_\lambda(x) = \frac{t^{2\lambda+2}}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda+2)} j_{\lambda+1}(yt), \quad (2.7)$$

$$\left| \int_0^t j_\lambda(yx) d\mu_\lambda(x) \right| \ll \frac{t^{2\lambda+2}}{(yt+1)^{\lambda+3/2}}. \quad (2.8)$$

Свойства (2.2) – (2.6) можно найти в [11], [12]. Равенство (2.7) вытекает из (2.4), (2.5). Неравенство (2.8) вытекает из (2.6), (2.7).

Отметим некоторые свойства оператора обобщенного сдвига (1.4) (см. [10]):

$$T^0 f(x) = f(x), \quad T^t 1 = 1, \quad (2.9)$$

$$\text{если } f(x) \geq 0, \quad \text{то } T^t f(x) \geq 0, \quad (2.10)$$

$$(T^t f, g) = (f, T^t g), \quad (2.11)$$

$$T^t j_\lambda(yx) = j_\lambda(yt)j_\lambda(yx). \quad (2.12)$$

Пусть отрезки $\Delta_1, \Delta_2 \subset [0, b]$, $b > 1$, χ_{Δ_1} , χ_{Δ_2} – их характеристические функции,

$$g_{\Delta_1, \Delta_2}(t) = \int_0^\infty \chi_{\Delta_1}(x) T^t \chi_{\Delta_2}(x) d\mu_\lambda(x), \quad (2.13)$$

и

$$\omega(\delta, f) = \sup\{|f(t_1) - f(t_2)| : |t_1 - t_2| \leq \delta \leq 1\}$$

– модуль непрерывности функции $f \in C(\mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 1. Для модуля непрерывности функции (2.13) справедлива оценка

$$\omega(\delta, g_{\Delta_1, \Delta_2}) \ll b^{2\lambda+1} \delta \ln \frac{1}{\delta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.2), (2.12), (2.13)

$$g_{\Delta_1, \Delta_2}(t) = \int_0^\infty \widehat{\chi}_{\Delta_1}(y) \cdot \widehat{\chi}_{\Delta_2}(y) j_\lambda(ty) d\mu_\lambda(y).$$

Так как для любого $y \geq 0$ функция $x^{2\lambda+2}(yx+1)^{-\lambda-3/2}$ возрастает, в силу (2.8) для $i = 1, 2$

$$|\widehat{\chi}_{\Delta_i}(y)| \ll \frac{b^{2\lambda+2}}{(by+1)^{\lambda+3/2}}, \quad (2.14)$$

поэтому

$$|g_{\Delta_1, \Delta_2}(t)| \ll \int_0^\infty \frac{b^{4\lambda+4} y^{2\lambda+1}}{(by+1)^{2\lambda+3}} dy.$$

Последний интеграл сходится, значит, $g_{\Delta_1, \Delta_2} \in C(\mathbb{R}_+)$.

Для $t_1, t_2 \geq 0$, $|t_1 - t_2| \leq \delta$, $\delta \leq 1$, в силу (2.3) $|j_\lambda(t_1 y) - j_\lambda(t_2 y)| \leq y\delta$, поэтому согласно (2.3), (2.14)

$$\begin{aligned} & |g_{\Delta_1, \Delta_2}(t_1) - g_{\Delta_1, \Delta_2}(t_2)| \\ & \leq \delta \int_0^{\delta^{-1}} y |\widehat{\chi}_{\Delta_1}(y)| |\widehat{\chi}_{\Delta_2}(y)| d\mu_\lambda(y) + 2 \int_{\delta^{-1}}^\infty |\widehat{\chi}_{\Delta_1}(y)| |\widehat{\chi}_{\Delta_2}(y)| d\mu_\lambda(y) \\ & \ll b^{4\lambda+4} \left\{ \delta \int_0^{\delta^{-1}} \frac{y^{2\lambda+2}}{(by+1)^{2\lambda+3}} dy + \int_{\delta^{-1}}^\infty \frac{y^{2\lambda+1}}{(by+1)^{2\lambda+3}} dy \right\} \\ & \ll b^{4\lambda+4} \left\{ \delta \int_0^{\delta^{-1}} y^{2\lambda+2} dy + \frac{\delta}{b^{2\lambda+3}} \int_{b^{-1}}^{\delta^{-1}} \frac{1}{y} dy + \frac{1}{b^{2\lambda+3}} \int_{\delta^{-1}}^\infty \frac{dy}{y^2} \right\} \ll b^{2\lambda+1} \delta \ln \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим следующий класс четных целых функций экспоненциального типа не выше R :

$$W_{R,M} = \{f(z) : |f(z)| \leq M e^{R|\operatorname{Im} z|}, z \in \mathbb{C}\}.$$

Он является компактным в пространстве $C[0, b]$, $b > 1$ (см. [13]). Обозначим через $n_\varepsilon = n_\varepsilon(W_{R,M}, C[0, b])$ количество элементов в наименьшей ε -сети для $W_{R,M}$ в $C[0, b]$. Правильный порядок $\log_2 n_\varepsilon$ по ε можно найти в [14]. Однако он был получен при фиксированных R, b, M . Нам будет важна зависимость n_ε от параметров b и M . Будем следовать рассуждениям из [14].

Функция $f \in W_{R,M}$ раскладывается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k},$$

который сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{C}$. По формуле Коши

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_k} \frac{f(z)}{z^{2k+1}} dz.$$

Выбирая r_0 как угодно маленьким, а $r_k = 2k/R$ при $k = 1, 2, \dots$, получим оценки

$$|a_0| \leq M, \quad |a_k| \leq M \left(\frac{Re}{2k} \right)^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее $(Re/2k)^{2k}$ при $k = 0$ считаем равным 1. При построении ε -сети будем использовать частичные суммы ряда Тейлора порядка $2s - 2$, $s = [Reb] + 1 \geq 7$. Для $x \in [0, b]$ справедлива оценка

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k x^{2k}| \leq \sum_{k=s}^{\infty} |a_k| b^{2k} \leq M \sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{Reb}{2k} \right)^{2k} \leq M \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \leq \frac{M}{2^{2s-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

если $2^{-2Reb} \leq \varepsilon/2M$. Пусть

$$l_k = \left\lceil \frac{8M}{\varepsilon} \left(\frac{Reb}{k} \right)^{2k} \right\rceil + 1, \quad x_{k,i} = -M \left(\frac{Re}{2k} \right)^{2k} + \frac{2M}{l_k} \left(\frac{Re}{2k} \right)^{2k} i, \quad i = 0, \dots, l_k.$$

Если

$$a_k \in \left[-M \left(\frac{Re}{2k} \right)^{2k}, M \left(\frac{Re}{2k} \right)^{2k} \right], \quad k = 0, 1, \dots, s-1,$$

то для некоторых x_{k,i_k} , $i_k \in \{1, \dots, l_k - 1\}$ будет

$$\left| \sum_{k=0}^{s-1} a_k x^{2k} - \sum_{k=0}^{s-1} x_{k,i_k} x^{2k} \right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} |a_k - x_{k,i_k}| b^{2k} \leq \sum_{k=0}^{s-1} \frac{2M}{l_k} \left(\frac{Reb}{2k} \right)^{2k} \leq \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, многочлены

$$p(x) = \sum_{k=0}^{s-1} x_{k,i_k} x^{2k}, \quad i_k \in \{1, \dots, l_k - 1\}$$

образуют ε -сеть. Их количество равно $\prod_{k=0}^{s-1} (l_k - 1)$, поэтому

$$n_\varepsilon \leq \prod_{k=0}^{s-1} \frac{8M}{\varepsilon} \left(\frac{Reb}{k} \right)^{2k} = \left(\frac{8M}{\varepsilon} \right)^s \frac{(Reb)^{s(s-1)}}{\left(\prod_{k=2}^{s-1} k^k \right)^2}.$$

Так как $Reb \leq s$,

$$\sum_{k=2}^{s-1} k \ln k \geq \int_1^{s-1} x \ln x \, dx = \frac{(s-1)^2}{2} \ln(s-1) - \frac{(s-1)^2}{4},$$

то

$$n_\varepsilon \leq \left(\frac{8M}{\varepsilon} \right)^s \frac{s^{s(s-1)}}{e^{(s-1)^2 \ln(s-1) - (s-1)^2/2}} \leq \left(\frac{8M}{\varepsilon} \right)^s e^{(s-1)[s \ln s - (s-1) \ln(s-1)] + (s-1)^2/2}.$$

Учитывая, что при $s \geq 7$

$$s \ln s - (s-1) \ln(s-1) = (s-1) \ln \left(1 + \frac{1}{s-1} \right) + \ln s \leq 1 + \ln s \leq \frac{s-1}{2},$$

получим

$$n_\varepsilon \leq \left(\frac{8M}{\varepsilon} \right)^s e^{(s-1)^2}.$$

Итак, нами доказано утверждение.

ЛЕММА 2. Если $0 < \varepsilon < 1$, $b > 1$, $R > 0$, $M > 0$, $2^{-2Reb} \leq \varepsilon/2M$, $s = [Reb] + 1 \geq 7$, то

$$n_\varepsilon(W_{R,M}, C[0, b]) \leq \left(\frac{8M}{\varepsilon} \right)^s e^{(s-1)^2}.$$

Пусть $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, S_n – множество всех перестановок $\mathbb{Z}_n$, Π_n – подмножество перестановок $\pi \in S_n$, для которых для всех $i \in \mathbb{Z}_n$, $\pi(i) \neq i$.

В [15] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Для любой перестановки $\pi \in \Pi_n$ пары $(i, \pi(i))_{i=1}^n$ можно разбить на три набора так, что в каждом наборе все элементы пар будут различными.

Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ называется дважды субстохастической, если для всех $i, j = 1, \dots, n$, $a_{ij} \geq 0$ и

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1.$$

Дважды субстохастическую матрицу назовем *крайней*, если у нее в каждой строке и каждом столбце не более одной единицы, а остальные элементы нули. В [16] имеется следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Для любой дважды субстохастической матрицы A порядка n существует набор неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2+1}$, $\sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s = 1$, и набор крайних дважды субстохастических матриц $A_1, \dots, A_{n^2+1}$, для которых

$$A = \sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s A_s.$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Нам понадобятся оценки сумм независимых случайных величин. Оценки Хефдинга [17] запишем в подходящих формах:

$$P(X_1 + \dots + X_N \leq -x) \leq \exp\left(-\frac{2x^2}{NB^2}\right), \quad (2.15)$$

$$P(|X_1 + \dots + X_N| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{2x^2}{NB^2}\right), \quad (2.16)$$

$x > 0$, X_i – независимые случайные величины, для которых $a_i \leq X_i \leq b_i$, $b_i - a_i \leq B$ и математические ожидания $E(X_i) = 0$, $i = 1, \dots, N$.

3. Доказательство теоремы. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $m = [N^{1/4}]$, $n = Nm$, a_N выбрано так, что

$$\mu_\lambda([0, a_N]) = \int_0^{a_N} d\mu_\lambda(x) = m,$$

отрезки $\Delta_1, \dots, \Delta_n \subset [0, a_N]$, $\mu_\lambda(\Delta_i) = 1/N$, $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i = [0, a_N]$, $c(i) \in \{-1, 1\}$,

$$f_N(x) = \begin{cases} c(i), & x \in \Delta_i, i = 1, \dots, n, \\ 0, & x \in (a_N, \infty). \end{cases} \quad (3.1)$$

Константы $c(i)$ будем считать независимыми случайными величинами, принимающими значения ± 1 с одинаковыми вероятностями $P(c(i) = 1) = P(c(i) = -1) = 1/2$, так что математическое ожидание $E(c(i)) = 0$.

Отметим, что

$$m = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)} \int_0^{a_N} x^{2\lambda+1} dx = \frac{a_N^{2\lambda+2}}{2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda + 2)},$$

и

$$a_N = (2^{\lambda+1} \Gamma(\lambda + 2) m)^{1/(2\lambda+2)} \asymp N^{1/(8\lambda+8)}. \quad (3.2)$$

Если $0 \leq t \leq \delta$, $A = \sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \varphi}$, то при $0 \leq x \leq a_N - \delta$ имеем $A \leq x + t \leq a_N$, а при $x \geq a_N + \delta - A \geq x - t \geq a_N$, поэтому согласно (1.3), (2.9)

$$\begin{aligned} \Omega^p(t, f)_{p,\lambda} &= c_\lambda \int_0^{a_N - \delta} \int_0^\pi |f(A) - f(x)|^p \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x) \\ &\quad + c_\lambda \int_{a_N - \delta}^{a_N + \delta} \int_0^\pi |f(A) - f(x)|^p \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x) \\ &\quad + c_\lambda \int_{a_N + \delta}^\infty \int_0^\pi |f(A) - f(x)|^p \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x) \\ &\leq 2^{p-2} c_\lambda \int_0^\infty \int_0^\pi |f_N(A) - f_N(x)|^2 \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x) \\ &\quad + c_\lambda \int_{a_N - \delta}^{a_N + \delta} \int_0^\pi |f_N(A) - f_N(x)|^p \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi d\mu_\lambda(x) \\ &\leq 2^{p-1} \left\{ m + 2\mu([a_N - \delta, a_N + \delta]) - \int_0^\infty f_N(x) T^t f_N(x) d\mu_\lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отметим, что

$$\mu([a_N - \delta, a_N + \delta]) = \frac{1}{2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+2)} \{(a_N + \delta)^{2\lambda+2} - (a_N - \delta)^{2\lambda+2}\} \ll N^{(2\lambda+1)/(8\lambda+8)}. \quad (3.4)$$

Если

$$G_N(t) = \int_0^\infty f_N(x) T^t f_N(x) d\mu_\lambda(x),$$

то, используя обозначение

$$g_{\Delta_i, \Delta_j}(t) = \int_0^\infty \chi_{\Delta_i}(x) T^t \chi_{\Delta_j}(x) d\mu_\lambda(x),$$

получим

$$G_N(t) = \sum_{i,j=1}^n c(i)c(j)g_{\Delta_i, \Delta_j}(t).$$

Если вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$ и матрица порядка n $A(t) = (g_{\Delta_i, \Delta_j}(t))$, то $G_N(t) = cA(t)c^T$. Согласно (2.9) – (2.11) матрица $NA(t)$ – симметричная и дважды субстохастическая:

$$\begin{aligned} g_{\Delta_i, \Delta_j}(t) &= \int_0^\infty \chi_{\Delta_i}(x) T^t \chi_{\Delta_j}(x) d\mu_\lambda(x) \\ &= \int_0^\infty \chi_{\Delta_j}(x) T^t \chi_{\Delta_i}(x) d\mu_\lambda(x) = g_{\Delta_j, \Delta_i}(t) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n N g_{\Delta_i, \Delta_j}(t) &= N \int_0^\infty \chi_{\Delta_i}(x) T^t \sum_{j=1}^n \chi_{\Delta_j}(x) d\mu_\lambda(x) \\ &\leq N \int_0^\infty \chi_{\Delta_i}(x) T^t 1 d\mu_\lambda(x) = N \int_0^\infty \chi_{\Delta_i}(x) d\mu_\lambda(x) = 1. \end{aligned}$$

По лемме 4

$$A(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s(t) A_s(t),$$

где $\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n^2+1}(t) \geq 0$, $\sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s(t) = 1$, $A_1(t), \dots, A_{n^2+1}(t)$ – крайние дважды субстохастические матрицы. Отсюда

$$G_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s(t) c A_s(t) c^T = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s(t) \sum_{i=1}^n \varepsilon_{s,t}(i) c(i) c(\pi_{s,t}(i)), \quad (3.5)$$

где $\varepsilon_{s,t}(i) \in \{0, 1\}$, перестановки $\pi_{s,t} \in S_n$. Значение $\varepsilon_{s,t}(i) = 0$, если в i -й строке у матрицы $A_s(t)$ все элементы равны нулю и $\varepsilon_{s,t}(i) = 1$, если в i -й строке у матрицы $A_s(t)$ есть единица.

Пусть $\delta > 0$, $t_k = \delta k/n^3$, $k = 1, \dots, n^3$. Рассмотрим события

$$B_{sk} = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{s,t_k}(i) c(i) c(\pi_{s,t_k}(i)) > -\frac{3n}{\ln n} \right), \quad s = 1, \dots, n^2 + 1, \quad k = 1, \dots, n^3. \quad (3.6)$$

По лемме 3 слагаемые в последней сумме, для которых $\pi_{s,t_k}(i) \neq i$, могут быть разбиты на три суммы Y_l , $l = 1, 2, 3$, в каждой из которых элементы пар $(i, \pi_{s,t_k}(i))$ будут различными. Произведения $c(i)c(\pi_{s,t_k}(i))$ [15] в каждой такой сумме будут независимыми случайными величинами, принимающими значения ± 1 с вероятностями $1/2$, поэтому согласно оценке (2.15)

$$\begin{aligned} P(\overline{B}_{s,k}) &\leq P\left(\sum_{\pi_{s,t_k}(i) \neq i} \varepsilon_{s,t_k}(i)c(i)c(\pi_{s,t_k}(i)) \leq -\frac{3n}{\ln n}\right) \\ &\leq \sum_{l=1}^3 P\left(Y_l \leq -\frac{n}{\ln n}\right) \leq 3 \exp\left(-\frac{n}{2 \ln^2 n}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Мы учли, что число слагаемых в каждой сумме Y_l не превосходит n .

Пусть для четной целой функции $F_{R,N}$ экспоненциального типа не выше R выполнены неравенства

$$E_R(f_N)_{p,\lambda} \leq \|f_N - F_{R,N}\|_{p,\lambda} \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right) E_R(f_N)_{p,\lambda} \leq 2\|f_N\|_{p,\lambda}. \quad (3.8)$$

Тогда для нее

$$\|F_{R,N}\|_{p,\lambda} \leq 3\|f_N\|_{p,\lambda},$$

иначе

$$\|f_N - F_{R,N}\|_{p,\lambda} \geq \|F_{R,N}\|_{p,\lambda} - \|f_N\|_{p,\lambda} > 2\|f_N\|_{p,\lambda}.$$

Применяя неравенство разных метрик [10], получим

$$\|F_{R,N}\|_{\infty} \ll R^{(2\lambda+2)/p} \|F_{R,N}\|_{p,\lambda} \ll R^{(2\lambda+2)/p} \|f_N\|_{p,\lambda} \ll m^{1/p}. \quad (3.9)$$

Так как [13]

$$|F_{R,N}(x + iy)| \leq \|F_{R,N}\|_{\infty} e^{R|y|},$$

то $F_{R,N} \in W_{R,M}$, $M = \|F_{R,N}\|_{\infty}$. Пусть $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^K$ — минимальная $1/m$ -сеть для $W_{R,M}$ в пространстве $C[0, a_N]$. Тогда по лемме 2 при $b = a_N$ согласно (3.2)

$$K \leq e^{\gamma_{\lambda,R} N^{1/(4\lambda+4)}}, \quad \gamma_{\lambda,R} > 0, \quad (3.10)$$

а в силу (3.9)

$$\|\psi_j\|_{C[0,a_N]} \leq \frac{1}{m} + M \ll N^{1/4p}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим события

$$D_j \left(|(f_N, \psi_j)| < \frac{m}{\ln m} \right), \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.12)$$

Так как согласно (3.9), (3.2)

$$\left| \int_{\Delta_i} \psi_j(x) d\mu_{\lambda}(x) \right| \ll N^{1/4p-1},$$

применяя оценку (2.16) к

$$|(f_N, \psi_j)| = \left| \sum_{i=1}^n c(i) \int_{\Delta_i} \psi_j(x) d\mu_\lambda(x) \right|,$$

получим

$$\begin{aligned} P(\overline{D}_j) &= P\left(\left| \sum_{i=1}^n c(i) \int_{\Delta_i} \psi_j(x) d\mu_\lambda(x) \right| \geq \frac{m}{\ln m}\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-c_{\lambda,R} \frac{N^{\frac{5}{4}-\frac{1}{2p}}}{\ln^2 N}\right), \quad c_{\lambda,R} > 0, \quad j = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.7), (3.10)

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{s=1}^{n^2+1} \sum_{k=1}^{n^3} \overline{B}_{sk} + \sum_{j=1}^K \overline{D}_j\right) &\leq 3(n^2+1)n^3 \exp\left(-\frac{n}{2 \ln^2 n}\right) + 2K \exp\left(-c_{\lambda,R} \frac{N^{5/4-1/2p}}{\ln^2 N}\right) \\ &\leq \exp\left(-\eta_{\lambda,R} \frac{N^{\frac{5}{4}-\frac{1}{2p}}}{\ln^2 N}\right), \quad \eta_{\lambda,R} > 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$P\left(\left(\prod_{s=1}^{n^2+1} \sum_{k=1}^{n^3} B_{sk}\right) \left(\prod_{j=1}^K D_j\right)\right) \geq 1 - \exp\left(-\eta_{\lambda,R} \frac{N^{5/4-1/2p}}{\ln^2 N}\right) > 0. \quad (3.13)$$

Таким образом, для каждого достаточно большого N существует функция f_N (3.1), для которой согласно (3.5), (3.6), (3.12), (3.13) выполнены свойства

$$G_N(t_k) > \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{n^2+1} \lambda_s(t_k) \left(-\frac{3n}{\ln n}\right) = -\frac{3m}{\ln n}, \quad k = 1, \dots, n^3, \quad (3.14)$$

$$|(f_N, \psi_j)| < \frac{m}{\ln m}, \quad j = 1, \dots, K. \quad (3.15)$$

Закончим доказательство теоремы. Согласно лемме 1 для любого $t \in [0, \delta]$ и некоторого t_k , для которого $|t - t_k| \leq \delta/n^3$, будет

$$|g_{\Delta_i, \Delta_j}(t) - g_{\Delta_i, \Delta_j}(t_k)| \ll \frac{\ln n}{n^3}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$|G_N(t) - G_N(t_k)| \leq \sum_{i,j=1}^n |g_{\Delta_i, \Delta_j}(t) - g_{\Delta_i, \Delta_j}(t_k)| \ll \frac{\ln n}{n}.$$

Отсюда и из (3.14) для всех $t \in [0, \delta]$ $G_N(t) \gg -m/\ln n$, поэтому согласно (3.3), (3.4)

$$\omega^p(\delta, f_N)_{p,\lambda} \leq 2^{p-1} m \left(1 + \frac{c(\lambda)}{\ln n}\right), \quad c(\lambda) > 0. \quad (3.16)$$

Применяя неравенство Гёльдера, (3.8), (3.15), для некоторого $j \in \{1, \dots, K\}$ получим

$$m = \|f_N\|_p^p = \int_0^\infty f_N(f_N - F_{R,N}) d\mu_\lambda + \int_0^\infty f_N(F_{R,N} - \psi_j) d\mu_\lambda + \int_0^\infty f_N \psi_j d\mu_\lambda$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f_N\|_{p'} \|f_N - F_{R,N}\|_p + m \|F_{R,N} - \psi_j\|_{C[0,a_N]} + \frac{m}{\ln m} \\ &\leq m^{1/p'} \left(1 + \frac{1}{m}\right) E_R(f_N)_{p,\lambda} + 1 + \frac{m}{\ln m}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.16)

$$\frac{E_R(f_N)_{p,\lambda}}{\omega(\delta, f_N)_{p,\lambda}} \geq \frac{\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{\ln m}\right) \frac{m}{m+1}}{2^{1-1/p} \left(1 + \frac{c(\lambda)}{\ln n}\right)^{1/p}} \rightarrow 2^{1/p-1}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Л. Виноградов, “О константе в неравенстве Джексона для пространств $L^p(-\infty, +\infty)$ ”, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1*, 1994, № 3, 15–22.
- [2] А. В. Московский, “Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ ”, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем. Мех. Информ.*, **3:1** (1997), 44–70.
- [3] В. И. Иванов, Д. В. Чертова, “Об оценке снизу констант Джексона в пространствах L_p , $1 \leq p < 2$, на прямой со степенным весом”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 81–93.
- [4] В. И. Бердышев, “О теореме Джексона в L_p ”, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 3–16.
- [5] В. И. Иванов, “Об оценке снизу константы в неравенстве Джексона в разных L_p -нормах”, *Матем. заметки*, **52:3** (1992), 48–62.
- [6] С. А. Пичугов, “Константа Юнга пространства L_p ”, *Матем. заметки*, **43:5** (1988), 604–614.
- [7] В. И. Иванов, С. А. Пичугов, “Константы Юнга l_p^n -пространств”, *Матем. заметки*, **48:4** (1990), 37–47.
- [8] В. И. Иванов, “О связи констант Джексона и констант Юнга пространств L_p ”, *Матем. заметки*, **58:6** (1995), 828–836.
- [9] В. И. Иванов, Юнпин Лю, “Оценка снизу констант Джексона в пространствах L_p , $1 \leq p < 2$, с периодическим весом Якоби”, *Изв. ТулГУ. Естественные науки*, 2011, № 2, 59–70.
- [10] С. С. Платонов, “Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полу-прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71:5** (2007), 149–196.
- [11] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.
- [12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1974.
- [13] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [14] А. Г. Витушкин, *Оценка сложности задачи табулирования*, Физматгиз, М., 1959.
- [15] В. И. Иванов, “Приближение в L_p кусочно-постоянными функциями”, *Матем. заметки*, **44:1** (1988), 64–79.
- [16] А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*, Мир, М., 1983.
- [17] В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987.

В. И. Иванов

Тулльский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступило

08.05.2015