Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сяоянь Чжоу, Тао Ян, Спектральная последовательность и конечно представимая размерность слабых расширений Хопфа–Галуа, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 756–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:03:47

Спектральная последовательность и конечно представимая размерность слабых расширений Хопфа–Галуа

Сяоянь Чжоу, Тао Ян

Пусть H – слабая алгебра Хопфа, A – слабая правая H -комодульная алгебра, B – подалгебра алгебры A , состоящая из H -ковариантных элементов и A/B – слабое правое H -расширение Галуа. В статье строится спектральная последовательность для функтора Ext , которая дает оценку глобальной размерности A через размерности H и B . Кроме того, получено соотношение между конечно представимыми размерностями алгебры A и ее подалгебры B . Наконец, изучен вопрос, когда A является n -алгеброй Горенштейна.

Библиография: 24 названия.

DOI: 10.4213/mzm10895

1. Введение

Слабые биалгебры и слабые алгебры Хопфа являются обобщениями обычных биалгебр и алгебр Хопфа – определяющие аксиомы остаются теми же, а мультипликативность единицы, комутативность единицы и условия на антипод заменяются более слабыми аксиомами. Вероятно, простейший пример слабой алгебры Хопфа – группоидная алгебра; другие примеры – коленточные алгебры Хопфа [1], квантовые группоиды [2] и обобщенные алгебры Каца [3]. Главная мотивация изучения слабых алгебр Хопфа проистекает из квантовой теории поля, теории операторных алгебр и теории представлений. Чисто алгебраический подход излагается в [4] и [5].

Теория Галуа для слабых алгебр Хопфа была построена в [6] на языке коколец, введенном Свидлером в [7]. Слабые расширения Хопфа–Галуа изучались также в [8] и [9] в терминах алгеброидов Хопфа.

Цель этой статьи состоит в изучении гомологических свойств слабых расширений Хопфа–Галуа.

Статья организована следующим образом.

Во втором разделе мы напоминаем некоторые определения и факты, связанные со слабыми алгебрами Хопфа и слабыми расширениями Хопфа–Галуа.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований центральных университетов (KYZ201322).

В третьем разделе мы рассматриваем конечномерную слабую алгебру Хопфа H и слабое правое H -расширение Галуа A/B и строим спектральную последовательность для функтора Ext , из которой получается оценка глобальной размерности A в терминах размерностей H и B , которая обобщает основной результат статьи [10]. В качестве приложения мы получаем теоремы типа теоремы Машке для слабых расширений Хопфа–Галуа.

В четвертом разделе мы доказываем, что конечно представимая размерность алгебры A не превосходит конечно представимой размерности подалгебры B , если A/B – слабое правое H -расширение Галуа и H полупроста.

В пятом разделе мы доказываем, что если A/B – слабое правое H -расширение Галуа, размерность H конечна и B является n -алгеброй Горенштейна, то A тоже является n -алгеброй Горенштейна.

2. Предварительные сведения

Всюду ниже k обозначает фиксированное поле и все объекты рассматриваются над k . Тензорное произведение $\otimes = \bigotimes_k$ и модуль Hom тоже рассматриваются над k . Пусть A – алгебра. Мы используем обозначения $A\text{-Mod}$ и $\text{Mod-}A$ для категорий левых и правых A -модулей соответственно; через $\text{lgl.dim } A$ и $\text{rgl.dim } A$ мы обозначаем левую и правую глобальные размерности алгебры A соответственно. Для A -модуля M через $\text{proj.dim } M$ и $\text{inj.dim } M$ мы обозначаем проективную и инъективную размерности M . Если даны алгебра A и коалгебра C , то определена алгебра с конволюцией $\text{Conv}(C, A)$; как пространство она совпадает с $\text{Hom}(C, A)$, а умножение в ней задается правилом

$$(f * g)(c) = m_A(f \otimes g)\Delta_C(c) = f(c_1)g(c_2)$$

для всех $f, g \in \text{Hom}(C, A)$ и $c \in C$. Здесь мы используем нотацию Свидлера (см. [11] и [12]) для коумножения, а именно, $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, где опущен знак суммирования.

2.1. Слабые алгебры Хопфа. Напомним [5], что слабая биагебра H является k -алгеброй с умножением m и единицей μ и k -коалгеброй с коумножением Δ и коединицей ε , причем $\Delta(hg) = \Delta(h)\Delta(g)$ и

$$\begin{aligned}\Delta^2(1) &= 1_1 \otimes 1_2 1'_1 \otimes 1'_2 = 1_1 \otimes 1'_1 1_2 \otimes 1'_2 \triangleq 1_1 \otimes 1_2 \otimes 1_3, \\ \varepsilon(hgl) &= \varepsilon(hg_1)\varepsilon(g_2l) = \varepsilon(hg_2)\varepsilon(g_1l)\end{aligned}$$

для всех $h, g, l \in H$, где $1'$ обозначает копию 1.

Для любой слабой биагебры H определены отображение цели ε_t и отображение источника ε_s формулами

$$\varepsilon_t(h) = \varepsilon(1_1 h)1_2, \quad \varepsilon_s(h) = 1_1 \varepsilon(h1_2);$$

их образы H_t и H_s называются *пространствами цели и источника*. Они являются полупростыми подалгебрами H .

Слабая алгебра Хопфа H становится слабой биалгеброй, если на ней определено k -линейное отображение $S: H \rightarrow H$ (*антипод*), удовлетворяющее условиям $S * \text{id} = \varepsilon_s$, $\text{id} * S = \varepsilon_t$ и $S * \text{id} * S = S$, где $*$ обозначает обычную свертку.

Заметим, что алгебра Хопфа автоматически является слабой алгеброй Хопфа, и слабая алгебра Хопфа является алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ или, эквивалентно, ε является отображением алгебр.

Если существует антипод S , то он единствен и является морфизмом антиалгебр и антикоалгебр. Если H – конечномерная слабая алгебра Хопфа, то отображение S автоматически биективно, и двойственная алгебра $H^* = \text{Hom}(H, k)$ обладает естественной структурой слабой алгебры Хопфа с операциями, двойственными операциям в H .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть H – слабая алгебра Хопфа с биективным антиподом S . Тогда H^{cop} (где cop обозначает противоположное коумножение) является слабой алгеброй Хопфа с антиподом S^{-1} , причем

$$S^{-1}(h_2)h_1 = S^{-1}\varepsilon_s(h) = \varepsilon_t S^{-1}(h) = \varepsilon(h1_1)1_2 \triangleq \tilde{\varepsilon}_t(h), \quad (2.1)$$

$$h_2 S^{-1}(h_1) = S^{-1}\varepsilon_t(h) = \varepsilon_s S^{-1}(h) = 1_1 \varepsilon(1_2 h) \triangleq \tilde{\varepsilon}_s(h). \quad (2.2)$$

Пусть H – слабая алгебра Хопфа. Для любых $h, g \in H$, $y \in H_s$ и $z \in H_t$ имеют место равенства [5], [13]

$$\Delta(1) \in H_s \otimes H_t, \quad yz = zy, \quad (2.3)$$

$$\Delta(y) = 1_1 \otimes y1_2, \quad \Delta(z) = 1_1 z \otimes 1_2, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(\varepsilon_s(h)g) = \varepsilon(h\varepsilon_t(g)), \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_t \circ S = \varepsilon_t \circ \varepsilon_s = S \circ \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_s \circ \tilde{\varepsilon}_t, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s \circ \varepsilon_s, \quad \varepsilon_t \circ \varepsilon_t = \varepsilon_t, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_s(h_1) \otimes h_2 = 1_1 \otimes h1_2, \quad h_1 \otimes \varepsilon_s(h_2) = h1_1 \otimes S(1_2). \quad (2.8)$$

2.2. Слабые расширения Хопфа–Галуа. Пусть H – слабая алгебра Хопфа и A – любая алгебра. Согласно [13] и [14] алгебра A является слабой правой H -комодульной алгеброй, если существует правое H -комодульное структурное отображение $\rho_A: A \rightarrow A \otimes H$ ($a \mapsto a_0 \otimes a_1$) со свойством $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ для всех $a, b \in A$, удовлетворяющее равносильным условиям

$$\rho(1) = 1_0 \otimes 1_1 \in A \otimes H_t, \quad (2.9)$$

$$\rho^2(1) = 1_0 \otimes 1_1 1_{H1} \otimes 1_{H2} \triangleq 1_0 \otimes 1_1 \otimes 1_2, \quad (2.10)$$

$$\rho^2(1) = 1_0 \otimes 1_{H1} 1_1 \otimes 1_{H2} \triangleq 1_0 \otimes 1_1 \otimes 1_2, \quad (2.11)$$

и

$$a_0 \otimes \varepsilon_t(a_1) = 1_0 a \otimes 1_1 \quad \forall a \in A, \quad (2.12)$$

$$a_0 \otimes \tilde{\varepsilon}_t(a_1) = a1_0 \otimes 1_1 \quad \forall a \in A. \quad (2.13)$$

Определим множество коинвариантов

$$B := A^{\text{co } H} := \{a \in A \mid \rho_A(a) = 1_0 a \otimes 1_1\}.$$

Из условий (2.9)–(2.13) вытекает, что $B = \{a \in A \mid \rho_A(a) = a1_0 \otimes 1_1\}$ и B является подалгеброй алгебры A . Мы будем говорить, что расширение A/B является *слабым правым H -расширением Галуа*, если отображение $\beta: A \otimes_B A \rightarrow A \otimes_t H$, определенное правилом $a \otimes_B b \mapsto ab_0 \otimes_t b_1$, биективно; здесь

$$A \otimes_t H := (A \otimes H)\rho(1) = \{a1_0 \otimes h1_1 \triangleq a \otimes_t h \mid a \in A, h \in H\}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения. Для каждого $h \in H$ выберем конечное множество элементов $r_i(h), l_i(h) \in A$, $i \in I$, для которых

$$1 \otimes_t h = \beta(r_i(h) \otimes_B l_i(h)) = r_i(h)l_i(h)_0 \otimes_t l_i(h)_1.$$

Здесь мы опускаем знак суммирования. Заметим, что элемент $r_i(h) \otimes_B l_i(h)$ однозначно определен как прообраз элемента $1 \otimes_t h$ при изоморфизме $\beta: A \otimes_B A \rightarrow A \otimes_t H$.

Согласно [9] и [15] для любых $h, g \in H$, $a \in A$ и $b \in B$ выполнены следующие тождества:

$$br_i(h) \otimes_B l_i(h) = r_i(h) \otimes_B l_i(h)b, \quad (2.14)$$

$$a_0 r_i(a_1) \otimes_B l_i(a_1) = 1 \otimes_B a, \quad (2.15)$$

$$r_i(h)l_i(h) = 1_0 \varepsilon(h 1_1), \quad (2.16)$$

$$r_i(h) \otimes_B l_i(h)_0 \otimes l_i(h)_1 = r_i(h_1) \otimes_B l_i(h_1) \otimes h_2, \quad (2.17)$$

$$r_i(h)_0 \otimes_B l_i(h) \otimes r_i(h)_1 = r_i(h_2) \otimes_B l_i(h_2) \otimes S(h_1), \quad (2.18)$$

$$r_i(hg) \otimes_B l_i(hg) = r_i(g)r_i(h) \otimes_B l_i(h)l_i(g). \quad (2.19)$$

Кроме того, согласно [15] каноническое отображение $\beta: A \otimes_B A \rightarrow A \otimes_t H$, определенное правилом $\beta(a \otimes_B b) = ab_0 \otimes_t b_1$, является морфизмом в категориях $A\text{-Mod}$ и $\text{Mod-}A$; здесь

(1) $A \otimes_B A$ и $A \otimes H$ – левые A -модули со структурами

$$a(x \otimes_B y) := ax \otimes_B y, \quad a(x \otimes_t h) := ax \otimes_t h, \quad (2.20)$$

(2) $A \otimes_B A$ and $A \otimes H$ – правые A -модули со структурами

$$(x \otimes_B y)a := x \otimes_B ya, \quad (x \otimes_t h)a := xa_0 \otimes_t ha_1 \quad (2.21)$$

для любых $a, x, y \in A$ и $h \in H$.

3. Спектральная последовательность для слабых расширений Хопфа–Галуа

Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H . В этом разделе мы строим спектральную последовательность для функтора Ext и применяем ее для получения оценки глобальной размерности.

ЛЕММА 3.1. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H . Тогда

- (1) если $y \in H_s$, то $r_i(y) \otimes_B l_i(y) = 1 \otimes_B r_i(y)l_i(y) \in B \otimes_B A$;
- (2) если $z \in H_t$, то $r_i(z) \otimes_B l_i(z) = r_i(z)l_i(z) \otimes_B 1 \in A \otimes_B B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Поскольку $\beta(r_i(y) \otimes_B l_i(y)) = 1 \otimes_t y$ и каноническое отображение β биективно, достаточно показать, что $\beta(1 \otimes_B r_i(y)l_i(y)) = 1 \otimes_t y$. Для $y \in H_s$ имеем

$$\begin{aligned} \beta(1 \otimes_B r_i(y)l_i(y)) &\stackrel{(2.16)}{=} \beta(1 \otimes_B 1_0 \varepsilon(y 1_1)) = 1_0 \otimes_t 1_1 \varepsilon(y 1_2) \stackrel{(2.10)}{=} 1_0 \otimes_t 1_1 1_{H1} \varepsilon(y 1_{H2}) \\ &\stackrel{(2.4)}{=} 1_0 \otimes_t 1_1 y_1 \varepsilon(y_2) = 1_0 \otimes_t 1_1 y \stackrel{(2.3)}{=} 1_0 \otimes_t y 1_1 = 1 \otimes_t y. \end{aligned}$$

(2) Как и в случае (1), достаточно показать, что $\beta(r_i(z)l_i(z) \otimes_B 1) = 1 \otimes_t z$. Для $z \in H_t$ имеем

$$\begin{aligned}
 \beta(r_i(z)l_i(z) \otimes_B 1) &\stackrel{(2.16)}{=} \beta(1_0\varepsilon(z1_1) \otimes_B 1) = 1_01'_0\varepsilon(z1_1) \otimes_t 1'_1 \\
 &\stackrel{(2.13)}{=} 1_0\varepsilon(z1_2) \otimes_t \tilde{\varepsilon}_t(1_1) \stackrel{(2.1)}{=} 1_0\varepsilon(z1_2) \otimes_t S^{-1}\varepsilon_s(1_1) \stackrel{(2.8)}{=} 1_0\varepsilon(z1_11_{H2}) \otimes_t S^{-1}(1_{H1}) \\
 &= 1_0\varepsilon(z1_1S(1_{H1})) \otimes_t 1_{H2} \stackrel{(2.5), (2.6)}{=} 1_0\varepsilon(z1_11_{H1}) \otimes_t 1_{H2} \stackrel{(2.3)}{=} 1_0\varepsilon(1_{H1}z1_1) \otimes_t 1_{H2} \\
 &= 1_0 \otimes_t \varepsilon_t(z1_1) \stackrel{(2.7)}{=} 1_0 \otimes_t z1_1 = 1 \otimes_t z.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующие леммы обобщают следствие 3.5 из [16].

Пусть V и W – левые A -модули. Для любых $\phi \in \text{Hom}_B(V, W)$ и $h \in H$ определим отображение $\phi h: V \rightarrow W$, полагая $(\phi h)(v) = \Sigma r_i(h)\phi(l_i(h)v)$, $v \in V$.

ЛЕММА 3.2. *Определенные выше отображения превращают $\text{Hom}_B(V, W)$ в правый H -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi \in \text{Hom}_B(V, W)$. Поскольку отображение ϕ B -линейно, отображение ϕh корректно определено. В силу (2.14) это отображение тоже B -линейно. Из (2.16) и (2.19) вытекает, что $\phi 1 = \phi$ и $\phi(hg) = (\phi h)g$.

ЛЕММА 3.3. *Существует канонический k -линейный изоморфизм*

$$\text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H \cong \text{Hom}_A(V, W),$$

где H_s рассматривается как правый H -модуль с умножением $y \cdot h = \varepsilon_s(yh)$ для $y \in H_s$ и $h \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что H_s – правый H -модуль с указанным выше умножением. Чтобы определить изоморфизм, мы должны сначала доказать существование канонического изоморфизма между $\text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H$ и k -пространством H -инвариантов в $\text{Hom}_B(V, W)$, т.е. пространством

$$\text{Hom}_B(V, W)^H = \{\phi \in \text{Hom}_B(V, W) \mid \phi h = \phi \varepsilon_s(h) \text{ для всех } h \in H\}.$$

Определим отображение $\alpha: \text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H \rightarrow \text{Hom}_B(V, W)^H$ правилом

$$\alpha(f) = f(1)$$

для $f \in \text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H$. Это отображение корректно определено, т.е. $f(1) \in \text{Hom}_B(V, W)^H$. Действительно, для каждого $h \in H$ имеем

$$f(1)h = f(1 \cdot h) = f(\varepsilon_s(h)) \stackrel{(2.7)}{=} f(\varepsilon_s(\varepsilon_s(h))) = f(1 \cdot \varepsilon_s(h)) = f(1)\varepsilon_s(h).$$

Рассмотрим k -линейное отображение

$$\beta: \text{Hom}_B(V, W)^H \rightarrow \text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H,$$

определенное правилом

$$\beta(g)(y)(v) = g(1_0v)\varepsilon(y1_1)$$

для $g \in \text{Hom}_B(V, W)^H$, $y \in H_s$ и $v \in V$. Покажем, что отображения α и β взаимно обратны. Для $g \in \text{Hom}_B(V, W)^H$ и $v \in V$ имеем

$$\alpha\beta(g)(v) = \beta(g)(1)(v) = g(1_0v)\varepsilon(1_1) = g(v).$$

С другой стороны, можно показать, что для $f \in \text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H$, $y \in H_s$ и $v \in V$

$$\beta\alpha(f)(y)(v) = \alpha(f)(1_0v)\varepsilon(y1_1) = f(1)(1_0v)\varepsilon(y1_1),$$

причем

$$\begin{aligned} f(y)(v) &= f(1 \cdot y)(v) = (f(1)y)(v) = r_i(y)f(1)(l_i(y)v) \\ &= f(1)(r_i(y)l_i(y)v) \quad (\text{из } B\text{-леволинейности } f(1) \text{ и леммы 3.1 (1)}) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} f(1)(1_0v)\varepsilon(y1_1). \end{aligned}$$

Следовательно, $\beta\alpha = \text{id}_{\text{Hom}(H_s, \text{Hom}_B(V, W))_H}$.

Таким образом, достаточно показать, что $\text{Hom}_B(V, W)^H = \text{Hom}_A(V, W)$. Сначала мы покажем, что если $f \in \text{Hom}_B(V, W)^H$, то $f \in \text{Hom}_A(V, W)$. Для $a \in A$, $v \in V$ имеем

$$\begin{aligned} f(av) &\stackrel{(2.15)}{=} a_0r_i(a_1)f(l_i(a_1)v) = a_0(fa_1)(v) = a_0(f\varepsilon_s(a_1))(v) \quad (f \in \text{Hom}_B(V, W)^H) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} a_0(f\varepsilon_s(\tilde{\varepsilon}_t(a_1)))(v) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} a1_0(f\varepsilon_s(1_1))(v) = a1_0(f1_1)(v) = a1_0r_i(1_1)f(l_i(1_1)v) \\ &\stackrel{(2.15)}{=} a1f(1v) = af(v). \end{aligned}$$

Обратно, если $f \in \text{Hom}_A(V, W)$, то $f \in \text{Hom}_B(V, W)^H$. Действительно, для $h \in H$ и $v \in V$ имеем

$$\begin{aligned} (fh)(v) &= r_i(h)f(l_i(h)v) = f(r_i(h)l_i(h)v) \quad (\text{из } A\text{-линейности } f) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} f(1_0v)\varepsilon(h1_1) \stackrel{(2.5)}{=} f(1_0v)\varepsilon(\varepsilon_s(h)1_1) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} f(r_i(\varepsilon_s(h))l_i(\varepsilon_s(h))v) = r_i(\varepsilon_s(h))f(l_i(\varepsilon_s(h))v) = (f\varepsilon_s(h))(v). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть W – левый A -модуль. Тогда имеет место изоморфизм правых H -модулей

$$\text{Hom}_B(A, W) \cong \text{Hom}(H, W)_{H_t},$$

где действие H на пространстве в правой части определено правилом $(\psi h)(k) = \psi(hk)$ для $\psi \in \text{Hom}(H, W)_{H_t}$ и $h, k \in H$, W рассматривается как правый H_t -модуль относительно умножения $w \cdot z = 1_0\varepsilon(z1_1)w$ для $w \in W$ и $z \in H_t$, а действие правого H_t -модуля на H определяется как умножение в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала отображение

$$\theta: \text{Hom}_B(A, W) \rightarrow \text{Hom}(H, W)_{H_t},$$

определенное правилом

$$\theta(\phi)(h) = (\phi h)(1) = r_i(h)\phi(l_i(h))$$

для $\phi \in \text{Hom}_B(A, W)$ и $h \in H$. Сначала надо показать, что это отображение корректно определено, т.е. $\theta(\phi) \in \text{Hom}(H, W)_{H_t}$. Для $\phi \in \text{Hom}_B(A, W)$, $h \in H$ и $z \in H_t$ имеем

$$\begin{aligned} \theta(\phi)(hz) &= r_i(hz)\phi(l_i(hz)) \stackrel{(2.19)}{=} r_i(z)r_i(h)\phi(l_i(h)l_i(z)) = r_i(z)(\phi h)(l_i(z)) \\ &= r_i(z)l_i(z)(\phi h)(1) \quad (\text{из } B\text{-леволинейности } \phi h \text{ и леммы 3.1 (2)}) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} 1_0\varepsilon(z1_1)(\phi h)(1) = (\phi h)(1) \cdot z = \theta(\phi)(h) \cdot z. \end{aligned}$$

Очевидно, отображение θ H -праволинейно. Определим отображение

$$\tau: \text{Hom}(H, W)_{H_t} \rightarrow \text{Hom}_B(A, W)$$

правилом

$$\tau(\psi)(a) = a_0\psi(a_1)$$

для $\psi \in \text{Hom}(H, W)_{H_t}$ и $a \in A$.

Покажем, что отображения θ и τ взаимно обратны. Для $\phi \in \text{Hom}_B(A, W)$, $\psi \in \text{Hom}(H, W)_{H_t}$, $a \in A$ и $h \in H$ выполнены отношения

$$\begin{aligned} \theta\tau(\psi)(h) &= r_i(h)\tau(\psi)(l_i(h)) = r_i(h)l_i(h)_0\psi(l_i(h)_1) \stackrel{(2.17)}{=} r_i(h_1)l_i(h_1)\psi(h_2) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} 1_0\varepsilon(h_11_1)\psi(h_2) \stackrel{(2.5)}{=} 1_0\varepsilon(\varepsilon_s(h_1)1_1)\psi(h_2) \stackrel{(2.8)}{=} 1_0\varepsilon(1_{H_1}1_1)\psi(h1_{H_2}) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} 1_0\psi(h1_1) = 1_0(\psi(h) \cdot 1_1) = 1_01'_0\varepsilon(1_11'_1)\psi(h) \quad (1_1 \in H_t) \\ &= 1_0\varepsilon(1_1)\psi(h) = \psi(h) \\ \tau\theta(\phi)(a) &= a_0\theta(\phi)(a_1) = a_0r_i(a_1)\phi(l_i(a_1)) \stackrel{(2.15)}{=} \phi(a). \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем изоморфизм. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H , и пусть V, V' и W, W' – левые A -модули. Если $f: V \rightarrow V'$ и $g: W \rightarrow W'$ – отображения A -модулей, то $g_* \circ f^*: \text{Hom}_B(V', W) \rightarrow \text{Hom}_B(V, W')$ – отображение H -модулей, и $\text{Ext}_B^*(V, W)$ является правым H -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы проверяется непосредственно.

Пусть V и W – левые A -модули и

$$\mathcal{P}^\bullet: \dots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

– проективная резольвента модуля V (в частности, $H_n(\mathcal{P}^\bullet) = 0$ для $n \neq 0$ и $H_0(\mathcal{P}^\bullet) \cong V$). Поскольку H – конечномерная слабая алгебра Хопфа, в силу следствия 4.3 из [4] естественные модули ${}_B A$ и A_B являются конечно порожденными проективными модулями. Следовательно, ограничение $\mathcal{P}^\bullet$ на $B\text{-Mod}$ – проективная резольвента модуля ${}_B V$, так что $\text{Ext}_B^*(V, W) = H^*(\text{Hom}_B(\mathcal{P}^\bullet, W))$. Из леммы 3.2 и первого утверждения леммы 3.5 вытекает, что компоненты комплекса $\text{Hom}_B(\mathcal{P}^\bullet, W)$ являются правыми H -модулями, а дифференциал $(f_n^*)_n$ является H -линейным отображением. Таким образом, когомологии $H^*(\text{Hom}_B(\mathcal{P}^\bullet, W))$ – правый H -модуль, а значит, $\text{Ext}_B^*(V, W)$ – тоже правый H -модуль. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого раздела.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H , а V и W – левые A -модули. Тогда существует спектральная последовательность третьего квадранта

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_H^p(H_s, \text{Ext}_B^q(V, W)) \Longrightarrow \text{Ext}_A^n(V, W).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.5 выражение $\text{Ext}_H^*(H_s, \text{Ext}_B^*(V, W))$ имеет смысл. Нужную спектральную последовательность можно получить из спектральной последовательности Гротендика (ср. [17; гл. 10]). Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.5 из [10]. Для полноты изложения мы приводим его ниже. Пусть W – левый A -модуль. Рассмотрим функторы

$$\begin{aligned} G: A\text{-Mod} &\rightarrow \text{Mod-}H, & G(V) &= \text{Hom}_B(V, W), \\ F: \text{Mod-}H &\rightarrow \text{Mod-}k, & F(X) &= \text{Hom}(H_s, X)_H. \end{aligned}$$

По лемме 3.3 функтор FG эквивалентен функтору $\text{Hom}_A(\cdot, W)$, поэтому правые производные функторы $R^n(FG)$ эквивалентны функторам $\text{Ext}_A^n(\cdot, W)$. Более того, если левый A -модуль $P \in A\text{-Mod}$ проективен, то $(R^n F)(G(P)) = \text{Ext}_H^n(H_s, G(P)) = 0$ для всех $n > 0$, а значит, правый H -модуль $G(P)$ право- F -ацикличен. В самом деле, достаточно проверить это равенство для $P = A$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \text{Ext}_H^n(H_s, G(A)) &= \text{Ext}_H^n(H_s, \text{Hom}_B(A, W)) \\ &= \text{Ext}_H^n(H_s, \text{Hom}(H, W)_{H_t}) && \text{по лемме 3.4} \\ &\stackrel{(*)}{\cong} \text{Ext}_{H_t}^n\left(H_s \bigotimes_H H, W\right) \cong \text{Ext}_{H_t}^n(H_s, W) = 0, && n > 0, \end{aligned}$$

где изоморфизм $(*)$ вытекает из следствия 10.65 в [17] и двусторонней проективности бимодуля ${}_H H_{H_t}$; последнее равенство следует из того, что H_s является проективным (а на самом деле свободным) как правый H_t -модуль. Теперь, чтобы получить требуемую спектральную последовательность, достаточно применить теорему 10.49 из [17]. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы сразу вытекает следующая оценка проективной размерности модулей.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H и V – левый A -модуль. Тогда

$$\text{proj. dim}_A V \leq \text{proj. dim } H_{sH} + \text{proj. dim}_B V.$$

Следовательно,

$$\text{lgl. dim } A \leq \text{rgl. dim } H + \text{lgl. dim } B.$$

В частности, если B и H полупросты, то алгебра A тоже полупроста.

Заметим, что $\text{proj. dim } H_{sH} = \text{rgl. dim } H$ (см. [18]). Сформулированное выше следствие обобщает теорему типа теоремы Машке для расширений Хопфа-Галуа (см. предложение 4.12 из [19]).

4. Конечно представимая размерность для слабых расширений Хопфа–Галуа

Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для полупростой слабой алгебры Хопфа H . В этом разделе мы выведем соотношение между конечно представимыми размерностями алгебр A и B .

Мы начнем с определения конечно представимой размерности колец и модулей, которое предложил Нг в работе [20].

Пусть A – алгебра (или кольцо) и M – левый A -модуль. Конечно представимая размерность модуля M , обозначаемая через $\text{f. p. dim}_A M$ или просто $\text{f. p. dim } M$, определяется как

$\text{f. p. dim } M = \text{Inf}\{n \mid \text{существует точная последовательность}$

$$P_{n+1} \rightarrow P_n \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где каждый P_i проективен и P_{n+1}, P_n конечно порождены

Точная последовательность, на которой достигается инфимум, называется *представляющей последовательностью* модуля M . Если такой последовательности нет ни для какого n , полагают $\text{f. p. dim } M = \infty$. Конечно представимая размерность алгебры A (обозначаемая через $\text{f. p. dim } A$) определяется как

$$\text{f. p. dim } A = \text{Sup}\{\text{f. p. dim } M \mid M \text{ – конечно порожденный левый } A\text{-модуль}\}.$$

Из этих определений вытекает, что левый A -модуль M конечно представим тогда и только тогда, когда $\text{f. p. dim } M = 0$, а алгебра (или кольцо) A нетерова тогда и только тогда, когда $\text{f. p. dim } A = 0$. Таким образом, конечно представимую размерность A -модуля можно рассматривать как меру того, насколько данный модуль далек от конечно представимого модуля, а конечно представимую размерность алгебры (или кольца) – как меру ненетеровости этой алгебры.

Отметим, что размерность $\text{f. p. dim } A$ может быть намного меньше глобальной размерности $\text{gl. dim } A$. Рассмотрим $A = \mathbb{Z}_4$. Идеал (2) имеет проективную размерность ∞ , а значит, $\text{gl. dim } A = \infty$. Однако алгебра $\mathbb{Z}_4$ нетерова, так что $\text{f. p. dim } A = 0$.

ЛЕММА 4.1. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H . Тогда

(1) $\text{f. p. dim}_B M \leq \text{f. p. dim}_A M$ для всякого левого A -модуля M ;

(2) $\text{f. p. dim } A \otimes_B M \leq \text{f. p. dim}_B M$ для всякого левого B -модуля M .

Здесь подразумевается, что A -модуль M превращается в B -модуль путем применения функтора ограничения $B(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (1) и (2) немедленно вытекают из того факта, что естественные модули ${}_B A$ и A_B являются конечно порожденными проективными модулями, а функтор $A \otimes_B$ точен.

Напомним [5], что левый (правый) интеграл в слабой алгебре Хопфа H – это элемент $l \in H$ (элемент $r \in H$), удовлетворяющий условию $hl = \varepsilon_t(h)l$ ($rh = r\varepsilon_s(h)$) для всех $h \in H$. Левый интеграл l называется нормированным, если $\varepsilon_t(l) = 1$, а правый интеграл r называется нормированным, если $\varepsilon_s(r) = 1$. Алгебра H полупроста тогда и только тогда, когда H содержит нормированный левый интеграл или, что равносильно, нормированный правый интеграл.

ЛЕММА 4.2. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для полупростой слабой алгебры Хопфа H . Тогда любой A -модуль M является прямым слагаемым в $A \otimes_B M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $f: A \otimes_B M \rightarrow M$, определенное правилом $a \otimes_B m \mapsto am$ для всех $a \in A$ и $m \in M$. Ясно, что f является A -эпиморфизмом.

Определим отображение $g: M \rightarrow A \otimes_B M$, полагая $g(m) = r_i(r) \otimes_B l_i(r)m$ для всех $m \in M$, где r – нормированный правый интеграл. Отображение g A -линейно, поскольку $r_i(r) \otimes_B l_i(r)a = ar_i(r) \otimes_B l_i(r)$ для всех $a \in A$. Действительно, для $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} \beta(r_i(r) \otimes_B l_i(r)a) &\stackrel{(2.21)}{=} \beta(r_i(r) \otimes_B l_i(r))a = (1 \otimes_t r)a \stackrel{(2.21)}{=} a_0 \otimes_t ra_1 = a_0 \otimes_t r\varepsilon_s(a_1) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} a_0 \otimes_t r\varepsilon_s\tilde{\varepsilon}_t(a_1) \stackrel{(2.13)}{=} a_1 \otimes_t r\varepsilon_s(1_1) = a_1 \otimes_t r1_1 \\ &\stackrel{(2.20)}{=} a(1 \otimes_t r) = a\beta(r_i(r) \otimes_B l_i(r)) \stackrel{(2.20)}{=} \beta(ar_i(r) \otimes_B l_i(r)). \end{aligned}$$

Из биективности β вытекает, что $r_i(r) \otimes_B l_i(r)a = ar_i(r) \otimes_B l_i(r)$ для всех $a \in A$.

Наконец, для каждого $m \in M$ имеем

$$\begin{aligned} fg(m) &= f(r_i(r) \otimes_B l_i(r)m) = r_i(r)l_i(r)m \stackrel{(2.16)}{=} 1_0\varepsilon(r1_1)m \stackrel{(2.5)}{=} 1_0\varepsilon(\varepsilon_s(r)1_1)m \\ &= 1_0\varepsilon(1_1)m = m. \end{aligned}$$

Таким образом, M является A -прямым слагаемым в $A \otimes_B M$. Лемма доказана.

Заметим, что если A/B – слабое правое H -расширение Галуа для полупростой слабой алгебры Хопфа H , то A/B – сепарабельное расширение. Действительно, чтобы доказать сепарабельность A/B , достаточно найти сепарабельный идемпотент $e \in A \otimes_B A$, т.е. элемент, удовлетворяющий условиям

- (1) $(a \otimes_B 1)e = e(1 \otimes_B a)$ для всех $a \in A$;
- (2) $m_A(e) = 1$, где m_A обозначает умножение в A .

Положим $e = r_i(r) \otimes_B l_i(r)$, где r – нормированный правый интеграл в H . Из доказательства леммы 4.2 вытекает, что e – сепарабельный идемпотент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для полупростой слабой алгебры Хопфа H и M – любой A -модуль. Тогда $\text{f.p. dim}_B M = \text{f.p. dim}_A M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 (1) имеем $\text{f.p. dim}_B M \leq \text{f.p. dim}_A M$. Обратно, поскольку H – полупростая слабая алгебра Хопфа, M является A -прямым слагаемым в $A \otimes_B M$. Следовательно, $\text{f.p. dim}_A M \leq \text{f.p. dim } A \otimes_B M$. Применяя лемму 4.1 (2), получаем $\text{f.p. dim}_A M \leq \text{f.p. dim } A \otimes_B M \leq \text{f.p. dim}_B M$. Предложение доказано.

Из предложения 4.3 немедленно следует основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для полупростой алгебры Хопфа H . Тогда $\text{f.p. dim } A \leq \text{f.p. dim } B$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа с биективным антиподом и $A \#_\sigma H$ – слабое скрещенное произведение с обратимым отображением σ (детали можно найти в [21] и [10]). Тогда $A \# H$ является слабой правой H -комодульной алгеброй, для которой

$$\rho_{A \# H} = \text{id}_A \otimes \Delta_H, \quad (A \# H)^{\text{co } H} = A \# H_t \cong A.$$

Согласно [2] $A \# H/A$ является слабым правым H -расширением Галуа (на самом деле $A \# H/A$ является слабым правым расщепляемым H -расширением). Отсюда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа. Предположим, что сама алгебра H и двойственная алгебра H^* полупроста. Пусть $A \#_{\sigma} H$ – слабое скрещенное произведение с обратимым отображением σ . Тогда

$$\text{f. p. dim } A \#_{\sigma} H = \text{f. p. dim } A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, из того, что $A \# H/A$ является слабым правым H -расширением Галуа и H полупроста, по теореме 4.4 следует, что

$$\text{f. p. dim } A \#_{\sigma} H \leq \text{f. p. dim } A.$$

Заметим, что $A \#_{\sigma} H$ можно превратить в слабую левую H^* -модульную алгебру, положив

$$\varphi \cdot (a \#_{\sigma} h) = a \#_{\sigma} (\varphi \rightharpoonup h) = \langle \varphi, h_2 \rangle a \#_{\sigma} h_1$$

для $a \#_{\sigma} h \in A \#_{\sigma} H$ и $\varphi \in H^*$. Таким образом, можно рассмотреть слабое smash-произведение алгебр $A \#_{\sigma} H$ и H^* , получив новую алгебру $(A \#_{\sigma} H) \# H^*$ (см. статью Никшича [22]). В [10] показано, что слабое smash-произведение является частным случаем слабого скрещенного произведения. Поэтому $(A \#_{\sigma} H) \# H^*/A \#_{\sigma} H$ – слабое правое H -расширение Галуа. Отсюда в силу полупростоты алгебры H^* получаем

$$\text{f. p. dim } (A \#_{\sigma} H) \# H^* \leq \text{f. p. dim } A \#_{\sigma} H.$$

Согласно предложению 6.3 из [10] алгебра $(A \#_{\sigma} H) \# H^*$ эквивалентна в смысле Мориты алгебре A ; значит, $\text{f. p. dim } A = \text{f. p. dim } (A \#_{\sigma} H) \# H^*$. Следовательно,

$$\text{f. p. dim } A = \text{f. p. dim } (A \#_{\sigma} H) \# H^* \leq \text{f. p. dim } A \#_{\sigma} H \leq \text{f. p. dim } A.$$

Итак,

$$\text{f. p. dim } A \#_{\sigma} H = \text{f. p. dim } A.$$

Следствие доказано.

5. Алгебра Горенштейна для слабых расширений Хопфа–Галуа

Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H . В этом разделе мы докажем, что если B – n -алгебра Горенштейна, то A тоже является n -алгеброй Горенштейна. В качестве приложения мы покажем, что слабое скрещенное произведение $A \#_{\sigma} H$ является n -алгеброй Горенштейна тогда и только тогда, когда такой алгеброй является A .

Сначала напомним определение алгебр Горенштейна, которое было введено в [23]. Кольцо Горенштейна R – это нетерово слева и справа кольцо, для которого

$$\text{inj. dim } {}_R R < \infty, \quad \text{inj. dim } R_R < \infty;$$

кольцо Горенштейна называется n -кольцом Горенштейна, если $\text{inj. dim } {}_R R \leq n$. В этом случае $\text{inj. dim } R_R \leq n$. Алгебра A называется алгеброй Горенштейна, если она является кольцом Горенштейна.

Знаменитая симметричная гипотеза Горенштейна (см. [24]) состоит в том, что если A – конечномерная (или артинова) алгебра и $\text{inj. dim } {}_A A < \infty$, то $\text{inj. dim } A_A < \infty$. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть A/B – слабое правое H -расширение Галуа для конечномерной слабой алгебры Хопфа H . Тогда если B является n -алгеброй Горенштейна, то A также является n -алгеброй Горенштейна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, если B нетерова слева (справа), то тем же свойством обладает и A , поскольку A , очевидно, является конечно порожденным левым (правым) B -модулем.

Покажем теперь, что

$$\text{inj. dim } {}_A A \leq \text{inj. dim } {}_B B.$$

Мы можем считать, что $\text{inj. dim } {}_B B = n < \infty$ и

$$0 \rightarrow B \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow 0$$

– инъективная резольвента модуля ${}_B B$. Поскольку A является проективным правым B -модулем,

$$0 \rightarrow A \otimes_B B \rightarrow A \otimes_B E^0 \rightarrow A \otimes_B E^1 \rightarrow \dots \rightarrow A \otimes_B E^n \rightarrow 0$$

– инъективная резольвента произведения $A \otimes_B B$, рассматриваемого как левый A -модуль, а поскольку $A \otimes_B B$ и A изоморфны как левые A -модули, получаем

$$\text{inj. dim } {}_A A \leq \text{inj. dim } {}_B B.$$

Аналогичные рассуждения доказывают, что $\text{inj. dim } A_A \leq \text{inj. dim } B_B$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа и $A \#_{\sigma} H$ – слабое скрещенное произведение с обратимым отображением σ . Тогда $A \#_{\sigma} H$ является n -алгеброй Горенштейна в том и только том случае, если этим свойством обладает A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие доказывается аналогично теореме 4.4. В процессе доказательства получается, что

$$\text{inj. dim } {}_{A \#_{\sigma} H} A \#_{\sigma} H = \text{inj. dim } {}_A A, \quad \text{inj. dim } A \#_{\sigma} H_{A \#_{\sigma} H} = \text{inj. dim } A_A.$$

Из следствия 5.2 немедленно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть H – конечномерная слабая алгебра Хопфа и $A \#_{\sigma} H$ – слабое скрещенное произведение с обратимым σ . Тогда симметричная гипотеза Горенштейна верна для $A \#_{\sigma} H$ в том и только том случае, если она верна для A .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Hayashi, “Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its applications to Jones’s index theory”, *Comm. Math. Phys.*, **157**:2 (1993), 331–345.

- [2] D. Nikshych, L. Vainerman, “Finite quantum groupoids and their applications”, *New Directions in Hopf Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 211–262.
- [3] T. Yamaneuchi, “Duality for generalized Kac algebras and a characterization of finite groupoid algebras”, *J. Algebra*, **163**:1 (1994), 9–50.
- [4] G. Böhm, K. Szlachányi, “Weak Hopf algebras. II. Representation theory, dimension, and the Markov trace”, *J. Algebra*, **233**:1 (2000), 156–212.
- [5] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, “Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C^* -structure”, *J. Algebra*, **221**:2 (1999), 385–438.
- [6] S. Caenepeel, E. De Groot, “Galois theory for weak Hopf algebras”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **52**:2 (2007), 151–176.
- [7] M. E. Sweedler, “The predual theorem to the Jacobson–Bourbaki theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **213** (1975), 391–406.
- [8] G. Böhm, “Galois theory for Hopf algebroids”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **51** (2005), 233–262.
- [9] L. Kadison, “Galois theory for bialgebroids, depth two and normal Hopf subalgebras”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **51** (2005), 209–231.
- [10] L. Liu, B.-L. Shen, S.-h. Wang, “On weak crossed products of weak Hopf algebras”, *Algebr. Represent. Theory*, **16**:3 (2013), 633–657.
- [11] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [12] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [13] S. Caenepeel, E. De Groot, “Modules over weak entwining structures”, *New Trends in Hopf Algebra Theory*, Contemp. Math., **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 31–54.
- [14] G. Böhm, “Doi–Hopf modules over weak Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:10 (2000), 4687–4698.
- [15] R. F. Niu, Y. Wang, L. Y. Zhang, “The structure theorem of endomorphism algebras for weak Doi–Hopf modules”, *Acta Math. Hungar.*, **127**:3 (2010), 273–290.
- [16] H.-J. Schneider, “Representation theory of Hopf–Galois extensions”, *Israel J. Math.*, **72**:1-2 (1990), 196–231.
- [17] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Universitext, Springer, New York, 2009.
- [18] D. Wang, S. Yang, “Representations of weak Hopf algebras associated to cyclic quivers”, *Comm. Algebra*, **33**:11 (2005), 4321–4335.
- [19] C. Năstăsescu, F. Panaite, F. Van Oystaeyen, “External homogenization for Hopf algebras: applications to Maschke’s theorem”, *Algebr. Represent. Theory*, **2**:3 (1999), 211–226.
- [20] H. K. Ng, “Finitely presented dimension of commutative rings and modules”, *Pacific J. Math.*, **113**:2 (1984), 417–431.
- [21] G. Böhm, T. Brzeziński, “Cleft extensions of Hopf algebroids”, *Appl. Categ. Structures*, **14**:5-6 (2006), 431–469.
- [22] D. Nikshych, “A duality theorem for quantum groupoids”, *New Trends in Hopf Algebra Theory*, Contemp. Math., **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 237–243.
- [23] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, De Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [24] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

Сяоянь Чжоу

Nanjing Agricultural University, China

E-mail: zhouxy@njau.edu.cn

Тао Ян

Nanjing Agricultural University, China

E-mail: tao.yang.seu@gmail.com

Поступило

15.10.2013

Исправленный вариант

06.03.2015