Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ермакова, Векторные расслоения конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 790–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 04:01:46

Векторные расслоения конечного ранга на полных пересечениях конечной коразмерности в линейном инд-грассманиане

С. М. Ермакова

1. Введение. Теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато утверждает, что любое векторное расслоение конечного ранга на бесконечномерном комплексном проективном инд-пространстве $\mathbf{P}^\infty$ изоморфно прямой сумме линейных расслоений. Для расслоений ранга два эта теорема была доказана Бартом и Ван де Веном в [1], а для расслоений конечного ранга это было доказано Тюриным в [2] и Сато в [3]. В частности, теорема Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато верна для линейных инд-грассманианов и их линейных сечений [4]–[6].

В данной работе мы распространим эти результаты на случай полных пересечений в линейном инд-грассманиане. Основным полем является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Вначале напомним определение линейных инд-многообразий, в том числе линейных инд-грассманианов, изученных Пенковым и Тихомировым [6], [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Инд-многообразие $\mathbf{X} = \varinjlim X_m$ определяется как прямой предел цепочки вложений

$$\mathbf{X} := \{X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{m-1}} X_m \xrightarrow{\phi_m} \dots\},$$

где X_m – гладкое алгебраическое многообразие для каждого $m \geq 1$.

Инд-многообразие $\mathbf{X}$ называется *линейным*, если на нем определен обратимый пучок

$$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(1) = \varinjlim \mathcal{O}_{X_m}(1),$$

где для каждого $m \geq 1$ пучок $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ обилен на X_m .

Пусть

$$X_m = G(k_m, n_m), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} k_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (n_m - k_m) = \infty,$$

и $\mathcal{O}_{X_m}(1)$ является образующей группы Пикара $X_m = G(k_m, n_m)$. Тогда инд-многообразие $\mathbf{X}$ называется *линейным инд-грассманианом* и обозначается $\mathbf{G}$.

Для линейного инд-грассманиана $\mathbf{G}$ определим плюккерovo вложение $\mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{P}^\infty$ как прямой предел плюккеро-вложений грассманианов $G(k_m, n_m)$. Наконец, *инд-гиперповерхностью степени d* в $\mathbf{P}^\infty$ назовем прямой предел гиперповерхностей степеней d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим линейный инд-грассманиан $\mathbf{G}$, вложенный по Плюккеру в $\mathbf{P}^\infty$. Пусть $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_l$ – инд-гиперповерхности степеней $d_1, \dots, d_l$ в $\mathbf{P}^\infty$. Линейное инд-многообразие

$$\mathbf{X} = \mathbf{G} \cap \mathbf{Y}_1 \cap \dots \cap \mathbf{Y}_l$$

называется *полным пересечением* в $\mathbf{G}$, если для всякого $m \geq 1$ многообразие

$$G(k_m, n_m) \cap \mathbf{Y}_1 \cap \dots \cap \mathbf{Y}_l$$

является полным пересечением.

Под *векторным расслоением $\mathbf{E}$ ранга $r > 0$ на $\mathbf{X}$* мы понимаем обратный предел $\mathbf{E} = \varprojlim E_m$ цепочки векторных расслоений $\{E_m\}_{m \geq 1}$ ранга r , где E_m – расслоение ранга r на X_m с фиксированными изоморфизмами $E_m \cong \phi_m^* E_{m+1}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Любое векторное расслоение $\mathbf{E}$ конечного ранга на полном пересечении $\mathbf{X} \subset \mathbf{G}$ конечной коразмерности изоморфно прямой сумме линейных расслоений.

2. Первоначальные сведения. Доказательство теоремы 1 опирается на понятия и результаты из статей [8] и [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X – проективное многообразие с обильным пучком $\mathcal{O}_X(1)$.

1. Назовем *проективным подпространством* в X такое многообразие $M \simeq \mathbb{P}^r$ в X , что $\mathcal{O}_X(1)|_M \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. В случае, если M одномерно, назовем его *проективной прямой* в X , или просто *прямой* в X .

2. Путь $p_n(x, y)$ длины n на X , соединяющий точки x, y , – это набор точек $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ в X и набор проективных прямых $l_0, \dots, l_{n-1}$ в X таких, что $x_i, x_{i+1} \in l_i$.

Многообразие всех путей длины n , соединяющих точки x и y , обозначим $P_n(x, y)$.

3. Назовем X *1-связным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует путь, соединяющий x с y .

Следующая теорема является следствием главного результата работы [8], основанного на формуле Монка для умножения в когомологиях пространства полных флагов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \leq [n/2]$ и X – полное пересечение грассманиана $G(k, n)$, вложенного по Плюккеру, с набором гиперповерхностей степеней $d_1, \dots, d_l$:

$$X = G(k, n) \cap \bigcap_{i=1}^l Y_i.$$

Если

$$2 \sum_i (d_i + 1) \leq \frac{k}{2} \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor,$$

то многообразие $P_k(u, v)$ путей длины k , соединяющих любые две точки u, v в X , непусто и связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbf{E}$ – расслоение ранга r на линейном инд-многообразии $\mathbf{X}$. Расслоение $\mathbf{E}$ называется *равномерным*, если его ограничение на все проективные прямые имеет одинаковый тип расщепления. Расслоение $\mathbf{E}$ называется *линейно тривиальным*, если ограничение $\mathbf{E}$ на любую проективную прямую из $\mathbf{X}$ тривиально.

ТЕОРЕМА 3 [9]. Пусть $\mathbf{X}$ – полное пересечение в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G}$. Всякое конечномерное векторное расслоение $\mathbf{E}$ на $\mathbf{X}$ равномерно.

Эта теорема является первым шагом в доказательстве расщепимости расслоения $\mathbf{E}$. Она выводится из теоремы Барта–Ван де Вена–Тюрина–Сато и свойств пространства проективных плоскостей в $\mathbf{X}$.

3. Флаг подрасслоений в $\mathbf{E}$. В этом разделе мы формулируем две теоремы и даем идеи их доказательств.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{X}$ – полное пересечение в линейном инд-грассманиане $\mathbf{G}$, $\mathbf{E}$ – расслоение конечного ранга на $\mathbf{X}$. Тогда существует цепочка подрасслоений

$$0 = \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \dots \subset \mathbf{F}_s = \mathbf{E}$$

таких, что каждое фактор-расслоение $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$ для $1 \leq i \leq s$ является подкруткой линейно тривиального расслоения.

Объясним, как построить флаг подпространств в слое $\mathbf{E}_x$ расслоения $\mathbf{E}$ над точкой x в $\mathbf{X}$. Для всякой проективной прямой l , проходящей через x , по теореме Гротендика в ограничении $\mathbf{E}|_l$ имеется канонический флаг подрасслоений

$$0 = \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \dots \subset \mathbf{F}_s = \mathbf{E}|_l.$$

Таким образом, в $\mathbf{E}_x$ возникает флаг подпространств. Пусть $B_m(x)$ – база семейства прямых на X_m , проходящих через x . В силу равномерности $\mathbf{E}$, сопоставляя прямой из $B_m(x)$ соответствующий флаг, мы получаем морфизм из $B_m(x)$ в пространство флагов в $\mathbf{E}_x$. Из следующей теоремы вытекает, что данный морфизм постоянен при больших m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого d существует такое число $M(d)$, что для всякого $m > M(d)$ всякий морфизм из $B_m(x)$ в многообразие размерности, меньшей d , постоянен.

Идея доказательства. При больших m многообразие $B_m(x)$ 1-связно [9; предложение 1]. Кроме того, всякая прямая из $B_m(x)$ содержится в проективном подпространстве $\mathbb{P}^d \subset B_m(x)$ большой размерности d [9; лемма 3]. Таким образом, теорема сводится к факту, что всякий морфизм из $\mathbb{P}^d$ в многообразие меньшей размерности постоянен.

Мы объяснили, как выделить флаг в каждом слое расслоения $\mathbf{E}$. Для завершения доказательства теоремы 4 остается понять, что эти флаги образуют флаг подрасслоений. Расслоения $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$ являются подкрутками линейно тривиальных по построению.

После доказательства теоремы 6 теорема 1 будет вытекать из следующего результата.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{X}$ – полное пересечение в линейном инд-грассманиане и $\mathbf{E}$ – расслоение конечного ранга на $\mathbf{X}$. Пусть

$$0 = \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{F}_s = \mathbf{E}$$

– флаг подрасслоений такий, что расслоение $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$ подкруткой тривиального расслоения на линейное расслоение для всякого $1 \leq i \leq s$. Тогда

$$\mathbf{E} = \bigoplus_i \mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}.$$

Идея доказательства. Покажем, что при больших m ограничение векторного расслоения $\mathbf{E}$ на X_m расщепляется в сумму $\bigoplus_i \mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}|_{X_m}$. Проведем индукцию по i . Пусть доказано, что

$$\mathbf{F}_{i-1}|_{X_m} = \sum_{1 \leq j \leq i-1} r_j \mathcal{O}(a_j).$$

Тогда $\mathbf{F}_i|_{X_m}$ является расширением расслоения $\mathbf{F}_{i-1}|_{X_m}$ при помощи $r_i \mathcal{O}(a_i)$. Чтобы доказать, что $\mathbf{F}_i|_{X_m}$ расщепляется, достаточно знать, что

$$H^1\left(r_i \mathcal{O}(-a_i) \otimes \sum_{1 \leq j \leq i-1} r_j \mathcal{O}(a_j)\right) = 0.$$

Это равенство действительно выполняется для достаточно больших m в силу теоремы Кодаиры, так как при больших m многообразия X_m являются многообразиями Фано и индекс X_m стремится к бесконечности при m стремящемся к бесконечности.

4. Критерий тривиальности линейно тривиальных расслоений. В этом пункте мы сформулируем теорему, которая дает критерий тривиальности линейно тривиальных расслоений.

Пусть X – нормальное проективное многообразие, E – векторное расслоение на нем. Пусть Y – база семейства прямых на X . Пусть $Z \subset Y \times X$ – универсальная прямая. Обозначим π и p проекции из Z в Y и в X соответственно. Отметим, что $\pi: Z \rightarrow Y$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение. Рассмотрим схему

$$Z_1 = Z \times_Y Z.$$

Она параметризует прямые на X с парой выделенных точек на них. Пусть $p_1, p_2: Z_1 \rightarrow X$ – композиции проекций $p_{r_1}, p_{r_2}: Z_1 \rightarrow Z$ с отображением $p: Z \rightarrow X$. Далее мы определим индуктивно многообразие

$$Z_{n+1} = Z_n \times_X Z_1,$$

с проекциями $p_1: Z_1 \rightarrow X$ и $p_{n+2}: Z_{n+1} \rightarrow X$, посредством следующей диаграммы:

Для точки $x \in X$ положим

$$Z_n(x) := p_1^{-1}(x).$$

Проекцию $Z_n(x) \rightarrow X$, индуцированную проекцией $p_{n+1}: Z_n \rightarrow X$, обозначим $f_{x,n}$.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что X нормально и для некоторого $n > 0$ и для некоторой точки $x \in X$ отображение $f_{x,n}: Z_n(x) \rightarrow X$ доминантно и имеет связные слои. Тогда любое линейно тривиальное векторное расслоение на X тривиально.*

Поясним идею, на которой основана эта теорема. Покажем как выбор базиса в векторном пространстве E_x задает тривиализацию E над X . Пусть y – точка многообразия X , тогда многообразие $f_{x,n}^{-1}(y)$ является пространством $P_n(x, y)$ путей длины n , соединяющих x и y . Так как E тривиально на всех прямых из X , то для всякого пути $p_n(x, y)$ выбор базиса в E_x задает базис в E_y . Таким образом, мы получаем отображение из $P_n(x, y)$ в пространство базисов в E_y . Так как первое многообразие проективно, непусто и связно по теореме 2, а второе аффинно, то образ этого отображения – точка.

5. Доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 в расслоении $\mathbf{E}$ есть флаг подрасслоений $\mathbf{F}_i$ таких, что фактор расслоение $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$ для $1 \leq i \leq s$ является подкруткой линейно тривиального расслоения.

Положим в теореме 6 $X = X_m$ – полное пересечение в $G(k_m, n_m)$ и положим $n = k_m$. Тогда слоем отображения f_{x,k_m} над точкой $y \in X_m$ является пространство путей длины k_m на X_m , соединяющих x и y . Положим в теореме 2 $X = X_m$. Тогда для достаточно больших m таких, что k_m и n_m удовлетворяют двойному неравенству

$$2 \sum_i (d_i + 1) \leq \frac{k_m}{2} \leq \left\lceil \frac{n_m}{4} \right\rceil, \quad \text{где } d_i = \deg \mathbf{Y}_i,$$

пространство путей $P_{k_m}(x, y)$ непусто и связно. Следовательно, все слои отображения f_{x,k_m} непусты и связны; в частности, f_{x,k_m} доминантно.

Таким образом, для X_m выполняется условие теоремы 6. Отсюда следует, что всякое линейно тривиальное векторное расслоение на X тривиально. А значит, каждое $\mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$ является подкруткой тривиального расслоения.

Наконец, применяя теорему 5, получаем, что расслоение $\mathbf{E}$ представимо в виде прямой суммы: $\mathbf{E} = \bigoplus_i \mathbf{F}_i/\mathbf{F}_{i-1}$. Теорема 1 доказана.

Автор выражает признательность своему научному руководителю А.С. Тихомирову, а также Дмитрию Панову и Александру Кузнецову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Barth, A. Van de Ven, *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Lecture Notes in Math., **412**, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 1–35. [2] А.Н. Тюрин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1248–1268. [3] E. Sato, *J. Math. Kyoto Univ.*, **17**:1 (1977), 127–150. [4] J. Donin, I. Penkov, *Int. Math. Res. Not.*, **34** (2003), 1871–1887. [5] I. Penkov, A. S. Tikhomirov, *Algebra, Arithmetic, and Geometry: in Honor of Yu. I. Manin*, Vol. II, Progr. Math., **270**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009, 555–572. [6] И.Б. Пенков, А.С. Тихомиров, *Матем. сб.*, **206**:6 (2015), 49–84. [7] I. Penkov, A. S. Tikhomirov, *Pure Appl. Math. Q.*, **10**:2 (2014), 289–323. [8] С.М. Ермакова, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:4 (2014), 35–46. [9] С.М. Ермакова, *Модел. и анализ информ. систем*, **22**:2 (2015), 209–218. [10] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I. Classical Setting: Line Bundles and Linear Series*, Berlin, 2004.

С. М. Ермакова

Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова

E-mail: svetlana.ermakova1802@gmail.com

Поступило

28.04.2015