Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Геворкян, Теоремы единственности для рядов по системе Франклина, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 786–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10898>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:30:00

Теоремы единственности для рядов по системе Франклина

Г. Г. Геворкян

В 1928 г. Франклин [1] построил первый пример полного ортонормированного базиса в $C[0; 1]$. Эта система состоит из кусочно линейных непрерывных функций. Систематическое изучение системы Франклина началось с работ Чисельского [2], [3]. Далее эта система оказалась очень полезной при решении разных задач. В работе [4] сделан подробный обзор исследований рядов по системе Франклина.

В теории тригонометрических рядов широко известна теорема единственности Кантора (см. [5; с. 191]).

ТЕОРЕМА КАНТОРА. *Если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Эта теорема послужила отправным пунктом для развития теории единственности тригонометрических рядов. Здесь напомним только теорему Валле-Пуссена (см. [5; с. 789])

ТЕОРЕМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА. *Если тригонометрический ряд (1) всюду, кроме быть может, некоторого счетного множества сходится к всюду конечной интегрируемой функции, то он является рядом Фурье этой функции.*

Однако, до сих пор некоторые фундаментальные проблемы в этой области остаются открытыми. В частности, не решена следующая проблема Ульянова (см. [6; с. 24]): *Следует ли из всюду сходимости к нулю некоторой подпоследовательности частичных сумм тригонометрического ряда, с ограниченными коэффициентами, что все коэффициенты этого ряда равны нулю?*

С работ [7]–[9] начались исследования вопросов единственности рядов по системам Хаара и Уолша. В работах [7], [8] была доказана теорема типа Кантора для рядов Хаара. Фабер [11] показал, что даже одноточечное множество $\{1/2\}$ не является множеством единственности для рядов Хаара, т.е. существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду вне этого множества сходится к нулю. Оказалось (см., например, [10]), что для рядов Хаара любое одноточечное множество не является множеством единственности. В работе [10] доказаны также аналоги теоремы Валле-Пуссена для рядов по системам Хаара и Уолша, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым необходимым условиям.

Вопросы единственности для рядов по системе Франклина менее изучены. До настоящей статьи не был известен аналог теоремы Кантора для системы Франклина. Для формулировки ранее полученных и новых результатов в этом направлении напомним некоторые определения.

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu \geq 0$, $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{для } 0 \leq i \leq 2\nu \\ \frac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{для } 2\nu < i \leq n. \end{cases}$$

Через S_n обозначим пространство функций, непрерывных на $[0; 1]$ и кусочно линейных с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$, т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0; 1]$, и f линейна на каждом отрезке $[s_{n,i-1}; s_{n,i}]$,

Данная работа была проделана при финансовой поддержке гранта 10-3/1-41 ГКОМОН РА.

DOI: 10.4213/mzm10898

$i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ получается добавлением точки $s_{n,2\nu-1}$ к множеству $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Поэтому, существует единственная, с точностью до знака, функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Полагая

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad x \in [0; 1],$$

получим ортонормированную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, которая другим эквивалентным образом определена Франклином [1].

Наверно, первым утверждением о единственности рядов по системе Франклина была следующая теорема, сформулированная в работе [12].

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \quad (2)$$

с коэффициентами

$$a_n = o(\sqrt{n}) \quad (3)$$

по мере сходится к некоторой ограниченной функции f и всюду, кроме быть может, некоторого счетного множества, выполняется условие

$$\sup_N \max_{t \in (x-1/N; x+1/N)} \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(t) \right| < +\infty.$$

Тогда ряд (2) является рядом Фурье–Франклина функции f .

Аналогичные теоремы для общей системы Франклина и других систем доказаны в работе [13]. Однако, до работы [13] были доказаны другие теоремы единственности рядов по системе Франклина. В работе [14] нами доказана следующая теорема (см. [14; теорема 3]).

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы ряд (2) был рядом Фурье–Франклина некоторой интегрируемой функции f , необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. сходиллся к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0; 1] : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| > \lambda \right\} \right) = 0. \quad (4)$$

В работе [15] найдены формулы восстановления коэффициентов ряда (2), который п.в. сходится к некоторой функции f и удовлетворяет условию (4). В той же работе рассмотрены кратные ряды по системе Франклина.

Пусть k некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^k} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_0^k$ – вектор с целочисленными неотрицательными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in [0; 1]^k$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1) \cdots f_{m_k}(x_k)$. Говорят, что ряд (5) сходится по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}$, если существует предел

$$\lim_{\mathbf{M} \rightarrow +\infty} \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{M}} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{m} \leq \mathbf{M}$ означает $m_j \leq M_j$, $j = 1, \dots, k$, а $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_k) \rightarrow +\infty$ означает $\min_j M_j \rightarrow +\infty$.

Для кратных рядов Франклина в работе [15] доказана следующая теорема (см. [15; теорема 10]).

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы ряд (5) был рядом Фурье–Франклина некоторой функции $f \in L \ln^{k-1} L([0; 1]^k)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд (5) по прямоугольникам п.в. сходилась к $f(\mathbf{x})$ и выполнялось условие

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\lambda \cdot \mu \left\{ \mathbf{x} \in [0; 1]^k : \sup_{\mathbf{m} \leq \mathbf{M}} \left| \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{M}} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \right| > \lambda \right\} \right) = 0. \quad (6)$$

Нами доказан аналог теоремы Кантора для системы Франклина.

ТЕОРЕМА 4. Если ряд (2) всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Верна более общая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть ряд (2) всюду сходится к ограниченной функции. Тогда ряд (2) является рядом Фурье–Франклина этой функции.

Известно, что (см. [3; теорема 3]) для ядра Дирихле системы Франклина $K_n(x, t) = \sum_{m=0}^n f_m(x) f_m(t)$ выполняется неравенство

$$|K_n(x, t)| \leq C \cdot n \cdot (2 - \sqrt{3})^{n|x-t|},$$

где C – некоторая постоянная. Следовательно, для любой точки $t \in [0; 1]$ существует нетривиальный ряд (2), который всюду, за исключением точки t , сходится к нулю. Действительно, для этого достаточно положить $a_m = f_m(t)$. Однако, если на коэффициенты ряда (2) наложить условие (3), то любое счетное множество будет множеством единственности.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ряд (2) с коэффициентами (3) по мере сходится к нулю и всюду кроме, быть может, некоторого счетного множества выполняется

$$\sup_n \left| \sum_{m=0}^n a_m f_m(x) \right| < +\infty. \quad (7)$$

Тогда все коэффициенты ряда (2) равны нулю.

Теорема 6 дает положительный ответ на вопрос, сформулированный в [16]. Легко заметить, что из оценок ядра Дирихле системы Франклина следует, что ряд Фурье–Франклина ограниченной функции по мере сходится и во всех точках удовлетворяет условию (7). Поэтому из теоремы 6 немедленно следует

ТЕОРЕМА 7. Пусть ряд (2) с коэффициентами (3) по мере сходится к ограниченной функции и всюду кроме, быть может, некоторого счетного множества выполняется (7). Тогда ряд (2) является рядом Фурье–Франклина этой функции.

Здесь отметим одну теорему Вронича [17], указывающую на важность выполнения условия (7) для всей последовательности частичных сумм ряда (2).

ТЕОРЕМА ВРОНИЧА. Существует нетривиальный ряд по системе Франклина (2), для которого

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2^\nu} a_n f_n(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in [0; 1].$$

Вернемся к теоремам 2 и 3. Через $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ обозначим квадратичные частные суммы ряда (5) с номерами 2^ν , т.е.

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \leq 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k)$. Нами доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Для того, чтобы ряд (5) был рядом Фурье–Франклина некоторой функции $f \in L([0; 1]^k)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) суммы $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ по мере сходятся к f ;
- 2) $\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda \cdot \mu\{\mathbf{x} \in [0; 1]^k : \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})| > \lambda\}) = 0$.

Метод доказательства этой теоремы существенно отличается от метода доказательств теорем 2 и 3. Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2, и поэтому есть потеря: вместо класса интегрируемых функций в теореме 3 получается класс $L \ln^{k-1} L$.

Теорема 8 является новой даже в одномерном случае. Во-первых, условие 2 в теореме 8 существенно слабее условия (4) теоремы 2. Во-вторых, в теореме 2 требуется сходимость ряда (2), а в теореме 8 требуется сходимость последовательности $\sum_{n \leq 2^\nu} a_n f_n(x)$. Как указывает теорема Вронича, в этом есть существенная разница.

В связи с полученными результатами возникают следующие вопросы.

ВОПРОС 1. Можно ли в теоремах 5 и 7 вместо ограниченности функции f потребовать интегрируемость и всюду конечность этой функции?

ВОПРОС 2. Из теоремы 4 следует, что не существуют два разных ряда по системе Франклина, которые всюду сходятся к одной и той же функции f . Как можно определить коэффициенты всюду сходящегося ряда по системе Франклина по его сумме?

ВОПРОС 3. Пусть известна последовательность λ_q , которая реализует условие 2 в теореме 8, т.е.

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left(\lambda_q \cdot \mu\left\{ \mathbf{x} \in [0; 1]^k : \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})| > \lambda_q \right\} \right) = 0. \quad (9)$$

Можно ли выразить коэффициенты a_m через последовательность λ_q и функцию f ? В работе [15] это сделано для одномерных рядов по системе Франклина, при условии, что выполняется (4) (см. [15; теорема 3]).

Когда ряд (2) п.в. сходится к некоторой функции f и вместо (4) выполняется

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lambda \cdot \mu\left\{ x \in [0; 1] : \sup_N \left| \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) \right| > \lambda \right\} \right) = 0,$$

тогда (см. [15; теорема 3']) функция f A -интегрируема и ряд (2) является рядом Фурье–Франклина функции f в смысле A -интегрирования.

ВОПРОС 4. Пусть в (9) $\lambda_q = q$. Может ли A -интеграл восстановить коэффициенты ряда (5)?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ph. Franklin, *Math. Ann.*, **100** (1928), 522–529. [2] Z. Ciesielski, *Studia Math.*, **23** (1963), 141–157. [3] Z. Ciesielski, *Studia Math.*, **27** (1966), 289–323. [4] Z. Ciesielski, A. Kamont, *Approximation Theory*, DARBA, Sofia, 2002, 84–132. [5] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961. [6] П. Л. Ульянов, *УМН*, **19:4** (1964), 3–92. [7] Ф. Г. Арутюнян, *Докл. АН Арм. ССР*, **38:3** (1964), 129–134. [8] М. Б. Петровская, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28:4** (1964), 773–798. [9] В. А. Скворцов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1964, № 5, 3–6. [10] Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28:6** (1964), 1391–1408. [11] G. Faber, *Deutsche Math. Ver.*, **19** (1910), 104–112. [12] Г. Г. Геворкян, *Уч. зап. Ереванск. гос. ун-та. Естеств. науки*, 1986, № 2, 146–148. [13] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, *J. Contemp. Math. Anal.*, **44:5** (2009), 271–283. [14] Г. Г. Геворкян, *Матем. заметки*, **46:2** (1989), 51–58. [15] Г. Г. Геворкян, *Матем. заметки*, **59:4** (1996), 521–545. [16] G. G. Gevorkyan, *Approximation and Probability*, Banach Center Publ., **72**, Polish Acad. Sci., Warszawa, 2006, 85–92. [17] Z. Wronicz, *Opusc. Math.* (to appear).

Г. Г. Геворкян

Ереванский государственный университет

E-mail: ggg@ysu.am

Поступило

26.05.2015