Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, Счетная паракомпактность и нормальные функторы, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 794–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10899>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:02:38

Счетная паракомпактность и нормальные функторы

А. П. Комбаров

Все топологические пространства в этой заметке предполагаются регулярными. Терминология и обозначения, не разъясняемые ниже, такие же, как в книге [1]. В статье [2] доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – паракомпактное p -пространство, $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то X – метризуемое пространство.

Паракомпактные p -пространства – это в точности полные прообразы метрических пространств при совершенных отображениях [3]. Ковариантный функтор $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ называется *нормальным*, если функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, мономорфен, эпиморфен, сохраняет вес, пересечения, прообразы, точку и пустое множество (см. [4]), а также удовлетворяет условию, взятому из работы [5]: для любого паракомпактного p -пространства X и любого натурального n отображение $\pi_n: X^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ непрерывно. *Отображение Басманова*

$$\pi_n: X^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

определяется равенством

$$\pi_n(\xi, a) = \mathcal{F}(\xi)(a),$$

в котором каждая точка $\xi \in X^n$ отождествляется с отображением $\xi: n \rightarrow X$. Здесь n обозначает дискретное пространство, состоящее из n точек. Условия непрерывности, мономорфности, эпиморфности, сохранения веса, пересечения, прообразов, точки, пустого множества, входящие в определение нормального функтора в категории $\mathcal{P}$, аналогичны условиям из определения нормального функтора в категории Comp всех компактов и их непрерывных отображений. Поэтому ограничение нормального функтора в категории $\mathcal{P}$ на подкатегорию Comp является нормальным функтором в категории Comp в смысле определения, принадлежащего Щепину (см. [6], [4]); при этом теорема 1 переходит в известную теорему Федорчука [7], которая, тем самым, является следствием теоремы 1. Другое обобщение теоремы Федорчука содержится в работе [8]. Известно, что если $\mathcal{F}$ – нормальный функтор, то для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен носитель $\text{supp}(a)$ следующим образом:

$$\text{supp}(a) = \bigcap \{Y : Y \text{ – замкнутое подмножество } X, a \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

Напомним также, что степень функтора $\deg(\mathcal{F})$ не превосходит числа n , если для любого X и любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ справедливо неравенство $|\text{supp}(a)| \leq n$.

Основным результатом настоящей заметки является теорема 2, аналогичная теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – паракомпактное p -пространство, $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно счетно паракомпактно, то X – метризуемое пространство.

Напомним, что пространство называется *счетно паракомпактным*, если в любое счетное открытое покрытие этого пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие. Счетно паракомпактное пространство не обязано быть нормальным, и существуют примеры нормальных пространств, не являющихся счетно паракомпактными [1].

Теорема 2 является обобщением следующей теоремы 3, доказанной Журавевым [9].

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – компакт, $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории Comp . Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно счетно паракомпактно, то X – метризуемое пространство.

Теорема Жураева в свою очередь усиливает теорему Зенора о метризуемости компакта, куб которого наследственно счетно паракомпактен [10]. Зенор [10] выводит свою теорему о кубе из следующей теоремы 4, которая необходима для доказательства теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. Если произведение $X \times Y$ наследственно счетно паракомпактно, то или X совершенно нормально, или любое счетное дискретное подпространство пространства Y замкнуто в Y .

Хорошо известно, что для произвольного хаусдорфова топологического пространства определено пространство $\text{exr}_c(X)$ компактных подмножеств пространства X с топологией Вьеториса (см., например, [4]). Далее, для любого натурального числа k через $\text{exr}_k(X)$ обозначается подпространство пространства $\text{exr}_c(X)$, состоящее из всех компактов, содержащих не более k точек [4]. В статье [2] для любого совершенного отображения $f: X \rightarrow Y$ паракомпактного p -пространства X на паракомпактное p -пространство Y с помощью формулы $(\text{exr}_c(f))(F) = f(F)$ определено отображение $\text{exr}_c(f): \text{exr}_c(X) \rightarrow \text{exr}_c(Y)$ и показано, что операция $\text{exr}_c(\cdot)$ является нормальным функтором, действующим в категории $\mathcal{P}$, а $\text{exr}_k(\cdot)$ является нормальным подфунктором функтора $\text{exr}_c(\cdot)$.

Следующая лемма 1 является следствием теоремы 3.

ЛЕММА 1. Пусть X – пространство точечно-счетного типа с единственной неизолированной точкой несчетного характера. Тогда $\text{exr}_3(X)$ не является наследственно счетно паракомпактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, в пространстве точечно-счетного типа любая точка содержится в компакте счетного характера. Если C – компакт счетного характера, содержащий точку несчетного характера, то, очевидно, компакт C не удовлетворяет первой аксиоме счетности в этой точке и, следовательно, не является метризуемым. Поскольку $\text{exr}_3(\cdot)$ является нормальным функтором, по теореме 3 компакт $\text{exr}_3(C)$ и, следовательно, $\text{exr}_3(X)$ не являются наследственно счетно паракомпактными пространствами.

ЛЕММА 2. Всякое паракомпактное p -пространство X такое, что $\text{exr}_3(X)$ наследственно счетно паракомпактное пространство, метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все точки пространства X изолированы, то утверждение леммы 2, очевидно, выполняется. Заметим, что X не может содержать единственную неизолированную точку, характер пространства в которой несчетен. Это следует из леммы 1, поскольку любое паракомпактное p -пространство является пространством точечно-счетного типа. Если же X содержит только одну неизолированную точку, характер пространства в которой счетен, то пространство X обладает σ -дискретной базой и, следовательно, метризуемо [1; 4.4.8]. Пусть теперь X содержит две различные неизолированные точки x_1 и x_2 . Выберем открытые множества U_1 и U_2 , V_1 и V_2 так, чтобы

$$x_1 \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1, \quad x_2 \in V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Очевидно, $\bar{V}_1 \times \text{exr}_2(\bar{V}_2)$ гомеоморфно подпространству $\text{exr}_3(X)$, поскольку $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 = \emptyset$. Множество $\bar{V}_1$ замкнуто в паракомпактном p -пространстве X , поэтому является паракомпактным p -пространством. Следовательно, $\bar{V}_1$ – пространство точечно-счетного типа с неизолированной точкой. Поэтому $\bar{V}_1$ содержит счетное дискретное незамкнутое подпространство. Тогда по теореме 4 пространство $\text{exr}_2(\bar{V}_2)$ совершенно нормально. Из того, что $\bar{V}_2$ является паракомпактным p -пространством, следует, что и $\text{exr}_2(\bar{V}_2)$ является паракомпактным p -пространством [2]. Из совершенной нормальности $\text{exr}_2(\bar{V}_2)$ следует метризуемость $\bar{V}_2$ [2; предложение 5]. Совершенно аналогично показывается, что и $\bar{V}_1$ метризуемо. Итак, доказано, что если паракомпактное p -пространство X такое, что пространство

$\text{exr}_3(X)$ наследственно счетно паракомпактно, содержит по крайней мере две неизолированные точки, то у любой неизолированной точки пространства X есть метризуемая окрестность. Приведенное рассуждение показывает, что паракомпактное p -пространство X локально метризуемо и поэтому метризуемо [1]. Лемма 2 доказана.

Из утверждений 2.1.4 и 5.2.G книги [1] легко выводится следующая лемма 3.

ЛЕММА 3. *Образ наследственно счетно паракомпактного пространства при совершенном отображении является наследственно счетно паракомпактным пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\mathcal{F}$ – нормальный функтор степени ≥ 3 . Тогда в пространстве $\mathcal{F}(3)$ найдется элемент $a \in \mathcal{F}(3)$ такой, что $|\text{supp}(a)| = 3$. Определим $\mathcal{F}_a(X) = \pi_3(X^3 \times \{a\})$. Очевидно, $\mathcal{F}_a(X) \subset \mathcal{F}(X)$. Будем рассматривать отображение supp как однозначное, действующее из $\mathcal{F}_a(X)$ в $\text{exr}_3(X)$. Известно [2; лемма 1], что отображение $\text{supp}: \mathcal{F}_a(X) \rightarrow \text{exr}_3(X)$ совершенно и является эпиморфизмом. Наследственно счетно паракомпактное пространство $\mathcal{F}(X)$ содержит подпространство $\mathcal{F}_a(X)$, поэтому пространство $\mathcal{F}_a(X)$ также наследственно счетно паракомпактно. По лемме 3 совершенный образ пространства $\mathcal{F}_a(X)$ также является наследственно счетно паракомпактным пространством. Следовательно, пространство $\text{exr}_3(X)$ наследственно счетно паракомпактно. Применение леммы 2 завершает доказательство теоремы 2.

В заключение вопрос. Можно ли усилить теорему 2, заменив наследственную счетную паракомпактность на наследственную δ -нормальность (см. [11], [12])?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [2] М. А. Добрынина, *Матем. заметки*, **90**:4 (2011), 630–633. [3] А. В. Архангельский, *Матем. сб.*, **67**:1 (1965), 55–88. [4] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988. [5] В. Н. Басманов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1984, № 6, 40–42. [6] Е. В. Щепин, *УМН*, **36**:3 (1981), 3–62. [7] В. В. Федорчук, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 4, 93–96. [8] А. П. Комбаров, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 147–149. [9] Т. Ф. Жураев, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2000, № 4, 8–11. [10] P. Zenor, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30** (1971), 199–201. [11] А. П. Комбаров, *Матем. заметки*, **92**:5 (2012), 786–788. [12] А. П. Комбаров, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 473–476.

А. П. Комбаров

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: apkombarov@gmail.com

Поступило

03.04.2015