Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, Л. И. Сухочева, В. А. Штраус, Операторы в пространстве Крейна, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 324–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:17:46

УДК 517.9

ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

Т. Я. Азизов, Л. И. Сухочева, В. А. Штраус

Изучаются самосопряженные операторы в пространстве Крейна. Цель работы – показать связь между следующими классами операторов: операторы с компактным “углом”, дефинизируемые операторы, операторы классов $(\mathbf{H})$ и $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, и операторы класса D_{κ}^{+} .

Библиография: 10 названий.

1. Введение и основные понятия. Пусть $\mathcal{K}$ – линейное пространство, снабженное индефинитной метрикой (или, что то же, полутора-линейной формой) $[\cdot, \cdot]$. Предположим, что $\mathcal{K}$ допускает разложение

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{+} \dot{+} \mathcal{K}^{-} \quad (1.1)$$

в прямую ортогональную сумму положительного $\mathcal{K}^{+}$ и отрицательного $\mathcal{K}^{-}$ подпространств. Если $\{\mathcal{K}^{+}, [\cdot, \cdot]\}$ – гильбертово, а $\{\mathcal{K}^{-}, [\cdot, \cdot]\}$ – анти-гильбертово пространство (последнее означает, что $\{\mathcal{K}^{-}, -[\cdot, \cdot]\}$ – гильбертово пространство), то $\mathcal{K}$ называют *пространством Крейна*.

Обозначим через P^{+} и P^{-} проекторы на $\mathcal{K}^{+}$ и $\mathcal{K}^{-}$, соответствующие разложению (1.1), и введем оператор $J = P^{+} - P^{-}$. Тогда $\mathcal{K}$ будет гильбертовым относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot) = [J\cdot, \cdot]$. Отсюда, $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$. Пространство Крейна с так введенным скалярным произведением называют *J-пространством*, а индефинитную метрику – *J-метрикой*. Заметим, что разложение (1.1) ортогонально как относительно J -метрики, так и относительно гильбертова скалярного произведения.

Подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ называется *регулярным*, если

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} \dot{+} \mathcal{L}^{[\perp]}, \quad (1.2)$$

где через $\mathcal{L}^{[\perp]}$ обозначено J -ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$. В отличие от гильбертова случая для пространств с индефинитной метрикой подпространство $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$, называемое *изотропным*, не обязательно тривиально, но даже если и тривиально, то

равенство (1.2) может не иметь место. Отметим, что $\mathcal{L}$ регулярно тогда и только тогда, когда оно само является пространством Крейна. В частности, гильбертовы и анти-гильбертовы подпространства являются регулярными. Последние также называются *равномерно положительными* и *равномерно отрицательными* подпространствами, соответственно.

Говорят, что подпространство $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) принадлежит классу $\mathbf{h}^+$ ($\mathbf{h}^-$), если $\mathcal{L}_+^0$ ($\mathcal{L}_-^0$) конечномерно, а фактор-пространство $\hat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+ / \mathcal{L}_+^0$ ($\hat{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_- / \mathcal{L}_-^0$) является гильбертовым (анти-гильбертовым) относительно индуцированной индефинитной метрики, или, что эквивалентно, $\mathcal{L}_+ \in \mathbf{h}^+$ ($\mathcal{L}_- \in \mathbf{h}^-$), если оно разлагается в сумму конечномерного изотропного и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространств.

Множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств будем обозначать через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно.

Пространство Крейна с $\kappa = \min\{\dim \mathcal{K}^+, \dim \mathcal{K}^-\} < \infty$ называют *пространством Понтрягина с κ положительными или отрицательными квадратами*, в зависимости от того будет ли $\kappa = \dim \mathcal{K}^+$ или $\kappa = \dim \mathcal{K}^-$, соответственно.

Одной из основных проблем теории операторов в пространствах Крейна является проблема существования максимальных неотрицательных и максимальных неположительных инвариантных подпространств у J -самосопряженных и, эквивалентно, J -унитарных операторов. Или в более общем виде: проблема расширения заданного неотрицательного или неположительного инвариантного подпространства до максимально в своем классе инвариантного подпространства. И, наконец, эти же проблемы для семейств операторов. В достаточно полной мере эти задачи решены для случая пространства Понтрягина. В случае общего пространства Крейна ни одна из этих задач не решена, однако получен ряд достаточных условий, при которых они имеют решения (см., например, [1]–[3], и др.); к этим же источникам отсылаем читателя за подробностями геометрии и теории операторов пространств с индефинитной метрикой.

Мы выделяем 4 основных класса операторов:

- (i) операторы с вполне непрерывным “уголком”;
- (ii) дефинизируемые операторы;
- (iii) операторы класса $\mathbf{K}(\mathbf{H})$;
- (iv) операторы класса $\mathbf{D}_\kappa^+$.

Сведения по классам (i), (ii) см., например, в [1]–[3], о классе $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и подклассе $\mathbf{H}$ – в [2] и [4], об операторах класса $\mathbf{D}_\kappa^+$ см. [5], [6]. В дальнейшем изложении будем предполагать, если не оговорено другое, все операторы ограниченными и заданными на всем пространстве.

Цель настоящего исследования – провести сравнительный анализ указанных классов операторов.

2. Классы операторов. Определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{K}$ – пространство Крейна и пусть T – непрерывный оператор и

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

– его матричное представление относительно разложения (1.1). Будем говорить, что непрерывный оператор T имеет вполне непрерывный уголок и писать $T \in \mathfrak{S}_{\infty,12}$, если

существует такое разложение (1.1), что T_{12} – вполне непрерывный оператор ($T_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Самосопряженный оператор A , действующий в пространстве Крейна $\mathcal{H}$, называют *дефинизируемым*, если существует многочлен p такой, что $p(A)$ – неотрицательный оператор, т.е. $[p(A)x, x] \geq 0$ при всех $x \in \mathcal{H}$. Множество дефинизируемых операторов обозначим символом $\mathbf{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что оператор T *принадлежит классу $\mathbf{H}$* и писать $T \in \mathbf{H}$, если у него существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и все такие подпространства принадлежат классу $\mathbf{h}^\pm$, соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, *принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$* , $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой самосопряженный оператор $B \in \mathbf{H}$ в этом пространстве, что $BA = AB$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит из одного оператора A , то будем говорить, что A принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и писать $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Скажем, что семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, *принадлежит классу $\mathbf{D}_\kappa^+$* , $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_\kappa^+$, если для него найдется пара инвариантных подпространств $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathbf{h}^\pm$, $\mathcal{L}^+[\perp]\mathcal{L}^-$, с размерностью подпространства $\mathcal{L}^+ \cap \mathcal{L}^-$, равной κ , $\kappa < \infty$.

Установим связь и различие этих классов операторов. Прежде всего заметим, что из [2, теорема 3.5.16] следует $\mathbf{K}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{D}_\kappa^+$. Мы покажем (см. ниже теорему 4.1), что конечное семейство самосопряженных операторов принадлежит $\mathbf{D}_\kappa^+$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_\kappa^+$ – коммутативное семейство самосопряженных операторов в пространстве Крейна. Из [2, теорема 3.5.2] вытекает существование такого разложения (1.1), что все операторы из $\mathfrak{A}$ имеют вполне непрерывные уголки. В следующем разделе будут приведены примеры, показывающие различие этих классов операторов.

3. Примеры. Ниже в примерах 3.1 и 3.2 предполагается, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \quad (3.1)$$

– ортогональная сумма двух экземпляров бесконечномерного гильбертова пространства $\mathcal{G}$, а J -метрика в $\mathcal{H}$ введена с помощью оператора

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

ПРИМЕР 3.1 ($\mathfrak{S}_{\infty,12} \not\subset (\mathbf{D} \cup \mathbf{K}(\mathbf{H}))$). Пусть $A: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ – ненулевой вольтерров оператор с $\lambda = 0$ в непрерывном спектре. Тогда диагональный относительно (3.1) оператор $\tilde{A} = \text{diag}\{A, A^*\}$ – вольтерров J -самосопряженный оператор, $\tilde{A} \notin \mathbf{K}(\mathbf{H})$ и $\tilde{A}$ не является дефинизируемым. В самом деле, если бы $\tilde{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, то $\tilde{A}$ имел бы базисную (в смысле Рисса) систему собственных векторов (см. [2, теорема 4.2.12]), а если бы он был дефинизируем, то его система собственных векторов была бы полна (см. [2, лемма 4.2.14]). Оба этих свойства несовместимы с вольтерровостью $\tilde{A}$.

ПРИМЕР 3.2 ($\mathbf{D} \not\subset (\mathbf{K}(\mathbf{H}) \cup \mathfrak{S}_{\infty,12})$). Пусть теперь $A: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ – положительный вполне непрерывный оператор. Тогда

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

– J -положительный оператор, имеющий полную систему собственных векторов (см. [2, лемма 4.2.14]), однако в $\mathcal{K}$ не существует базиса, составленного из этих векторов: в противном случае $\tilde{A} \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Следовательно, этот оператор не принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Более того, (3.3) – пример дефинизируемого (неотрицательного) J -самосопряженного оператора, для которого не существует такого разложения (1.1), что относительно него $\tilde{A}$ имеет матричное представление с вполне непрерывным уголком, т.е. $\tilde{A} \notin \mathfrak{S}_{\infty,12}$. Последнее следует из равенства $\tilde{A} = A_1 + A_2$, где

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$A_1 \in \mathfrak{S}_{\infty}$, A_2 – J -неотрицательный оператор и $A_2^2 = 0$. Если бы существовало такое разложение (1.1), что A имело бы вполне непрерывный уголок, то A_2 также имел бы вполне непрерывный уголок относительно того же разложения. В этом случае имеем $A_2^2 = 0$ и вполне непрерывность оператора A_2 , что противоречит бесконечномерности $\mathcal{G}$.

ПРИМЕР 3.3 ($\mathbf{H} \not\subset \mathbf{D}$). Искомый пример $\tilde{A}$ указать достаточно просто: можно рассмотреть относительно (1.1) диагональную блочно-операторную матрицу $\tilde{A} = \{A_1, A_2\}$ с вполне непрерывными самосопряженными циклическими операторами A_1, A_2 , собственные значения которых отличны от нуля и перемежаются. Однако несложно представить в этом случае $\mathcal{K}$ как прямую ортогональную сумму таких двух $\tilde{A}$ -инвариантных подпространств Крейна, что сужения оператора $\tilde{A}$ на эти подпространства – дефинизируемые операторы; более того, эти подпространства можно выбрать как пространства Понтрягина. Таким образом, изучение $\tilde{A}$ сводится к исследованию дефинизируемых операторов или операторов в пространствах Понтрягина, соответственно.

Мы модифицируем этот пример и укажем такой оператор $\tilde{A}$, что нельзя провести подобную редукцию к дефинизируемым операторам или, в частности, к операторам в пространстве Понтрягина.

Пусть $\mathcal{E} = \text{ЛО}\{e\}$ – одномерное пространство и $\mathcal{G}$ – сепарабельное бесконечномерное пространство (ЛО – линейная оболочка). Образует пространство Крейна $\mathcal{K}$ как следующее J -пространство:

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \oplus \mathcal{E} \quad (3.4)$$

с оператором

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ – ортонормированные базисы в $\mathcal{G}$. Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} f_n \quad \text{и} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} g_n.$$

Операторы

$$A_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (\cdot, f_n) f_n \quad \text{и} \quad A_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (\cdot, g_n) g_n$$

являются вполне непрерывными, самосопряженными и $f \notin \text{ran } A_{22}$, $g \notin \text{ran } A_{33}$. Зададим оператор $\tilde{A}$ как блочно-операторную (4×4) -матрицу относительно (3.4):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{12}^* \\ 0 & 0 & A_{33} & -A_{13}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

где $A_{12} = (\cdot, f)e$, $A_{13} = (\cdot, g)e$. Определенный так оператор $\tilde{A}$ является вполне непрерывным, J -самосопряженным относительно J из (3.5), принадлежит классу **H** и не может быть разложен в конечную сумму дефинизируемых операторов.

ПРИМЕР 3.4 ($\mathbf{D}_{\kappa}^+ \neq \mathbf{K}(\mathbf{H})$). Пусть $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{g_0\}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Положим

$$J e_k = e_k, \quad J e_{-k} = -e_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad J e_0 = g_0, \quad J g_0 = e_0, \\ A_k x = e_k[x, e_0] + e_0[x, e_k], \quad \text{где } x \in \mathcal{H}, \quad \pm k = 1, 2, \dots$$

Семейство операторов $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $\mathbf{D}_1^+$, однако, не входит в класс $\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Действительно, все операторы из $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty}$ являются J -самосопряженными, подпространство $\mathcal{L}_+ = \text{ЗЛО}\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ (здесь и всюду ниже ЗЛО – замкнутая линейная оболочка) инвариантно по отношению к $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathbf{h}^+$. Кроме того, $\dim(\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^{[\perp]}) = 1$, так что $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty} \in \mathbf{D}_1^+$. Далее, линейная оболочка, натянутая на вектор e_0 , является общим ядром семейства $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty}$. Допустим, что J -самосопряженный оператор B коммутирует с $\{A_k\}_{\pm k=1}^{\infty}$. Тогда вектор e_0 собственный для B . Без потери общности можно предположить, что $B e_0 = 0$. В этом случае $B g_0 \in \text{ЗЛО}\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Найдем $B e_k$ для $\pm k = 1, 2, \dots$: $B e_k = B A_k g_0 = A_k B g_0 = \beta_k e_0$. В силу последнего мы получаем следующее представление оператора B : $B x = [x, z]e_0 + [x, e_0]z + \xi[x, e_0]e_0$, где $z = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \gamma_k e_k$. Однако ядро этого оператора имеет бесконечный ранг индефинитности и поэтому $B \notin \mathbf{H}$.

4. Операторы классов $\mathbf{D}_{\kappa}^+$ и $\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Ниже мы покажем, что для конечного семейства коммутирующих операторов принадлежность классу $\mathbf{D}_{\kappa}^+$ влечет включение в $\mathbf{K}(\mathbf{H})$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathfrak{A} = \{A_j\}_{j=1}^m$ – конечное семейство ограниченных попарно коммутирующих J -самосопряженных операторов в пространстве Крейна. Тогда условия $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_{\kappa}^+$ и $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H}) \implies \mathfrak{A} \in \mathbf{D}_{\kappa}^+$ следует из [2, теорема 3.5.12].

Докажем, что $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_{\kappa}^+ \implies \mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$. Покажем существование ограниченного J -самосопряженного оператора X класса **H**, коммутирующего с каждым оператором из

$A_j, j = 1, \dots, k$. По определению класса $\mathbf{D}_\kappa^+$ у семейства $\mathfrak{A}$ существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ такие, что $\mathcal{L}^+[\perp]\mathcal{L}^-$ и

$$\mathcal{L}^\pm = \mathcal{L}^0 \oplus \mathcal{L}_\pm, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{L}^0$ – конечномерное нейтральное подпространство, а $\mathcal{L}_\pm$ – равномерно дефинитные подпространства. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{K}^\pm$, где $\mathcal{K}^\pm$ – компоненты (1.1). Обозначим через K угловой оператор подпространства $\mathcal{L}^+$, т.е. $K: \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^-$, $\|K\| \leq 1$ и $\mathcal{L}^+ = \{x = x^+ + Kx^+ \mid x^+ \in \mathcal{K}^+\}$. Пусть $A_j = \|A_{jik}\|_{i,k=1}^2$ – матричное представление операторов $A_j, j = 1, \dots, m$, относительно (1.1). Будем искать оператор X в виде матрицы

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

компоненты которой удовлетворяют следующим условиям: $X_{11} = X_{11}^*$, $X_{21} = KX_{11}$, $X_{12} = -X_{21}^* = -X_{11}K^*$, $X_{22} = X_{22}^* = -KX_{11}K^*$. Поскольку $\mathcal{L}_\pm \subset \mathcal{K}^\pm$, оператор K является конечномерным частично изометрическим. Поэтому из представления (4.2) следует, что $X \in \mathbf{H}$ тогда и только тогда, когда $\dim \ker X_{11} < \infty$. A_j -инвариантность $\mathcal{L}^+$ равносильна тому, что

$$KA_{j11} + KA_{j12}K - A_{j21} - A_{j22}K = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что X коммутирует с A_j тогда и только тогда, когда $(A_{j11} + A_{j12}K)X_{11}$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{K}^+$, что в свою очередь эквивалентно самосопряженности оператора

$$[(P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1}(A_{j11} + A_{j12}K)(P^+ \mid \mathcal{L}^+)][(P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1}X_{11}(P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1*}]. \quad (4.4)$$

Поскольку по условию $\mathcal{L}^+$ инвариантно относительно A_j и по построению относительно X , то из (4.4) и соотношений

$$A_j \mid \mathcal{L}^+ = (P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1}(A_{j11} + A_{j12}K)(P^+ \mid \mathcal{L}^+)$$

следует, что коммутируемость A_j и X эквивалентна существованию такого самосопряженного оператора $Y: \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{L}^+$ с $\dim \ker Y < \infty$ и $Z_j Y = Y Z_j^*$, где $Z_j = A_j \mid \mathcal{L}^+$, $j = 1, \dots, m$, ($Y = (P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1}X_{11}(P^+ \mid \mathcal{L}^+)^{-1*}$).

Пусть $Z_j = \|Z_{jik}\|_{i,k=1}^2$ – матричное представление оператора Z_j относительно разложения (4.1), $j = 1, \dots, m$. Тогда $Z_{j21} = 0$ и Z_{j22} – самосопряженный оператор. Пусть $\sigma(Z_{j11}) = \{\lambda_{js}\}_{s=1}^{s_j}$ – спектр оператора Z_{j11} , P_0 – ортопроектор из $\mathcal{L}_+$ на $\mathcal{H}_0 = \cap \{\text{ЛО}\{\ker(Z_{j22} - \lambda_{js})\}_{s=1}^{s_j}\}_{j=1}^m$ и $\mathcal{M}$ – минимальное подпространство, содержащее $\text{ЛО}\{P_0 Z_{j12}^* \mathcal{L}^0\}_{j=1}^m$ и инвариантное относительно Z_{j22} , $j = 1, \dots, m$. Отсюда $\dim \mathcal{M} < \infty$, подпространство $\mathcal{H}_0$ инвариантно относительно всех операторов Z_{j22} и существует такое разложение

$$\mathcal{L}_+ = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_m, \quad Z_{j22}\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_k, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad (4.5)$$

что

$$\sigma(Z_{j11} \cap \sigma_p(Z_{j22} \mid \mathcal{H}_j)) = \emptyset, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

где символом σ_p обозначено множество собственных значений соответствующего оператора. Пусть $Y = \|Y_{ik}\|_{i,k=1}^2$ – матричное представление искомого оператора Y . Тогда $Z_j Y$ – самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:

- (i) $Z_{j11}Y_{11} + Z_{j12}Y_{12}^* = Y_{11}Z_{j11}^* + Y_{12}Z_{j12}^*$;
- (ii) $Y_{12}^*Z_{j11}^* + Y_{22}Z_{j12}^* = Z_{j22}Y_{12}^*$;
- (iii) $Z_{j22} = Y_{22}Z_{j22}$.

Это дает нам основание строить Y так, чтобы каждое из подпространств разложения (4.5) было инвариантным относительно Y_{22} . Положим $Y = \sum_{j=0}^m Y_j$, где $Y_j = \|Y_{jik}\|_{i,k=1}^2$ удовлетворяют условиям (i)–(iii) и $Y_{j22}|_{\mathcal{H}_k} = 0$ при $j \neq k, j, k = 1, \dots, m$. Если операторы Y_{j22} мы выберем так, чтобы $\dim \ker Y_{j22}|_{\mathcal{H}_j} < \infty$, то построенный Y будет искомым оператором.

Определим операторы $Y_j, j = 0, 1, \dots, m$, следующим образом: $Y_0: Y_{011} = 0, Y_{012} = 0, Y_{022}$ – ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{M}^\perp$; $Y_j, j = 1, \dots, m$. Пусть $\tilde{Z}_j = \prod_{s=1}^{s_j} (Z_j - \lambda_{js})(Z_j - \bar{\lambda}_{js})$ и $\tilde{Z}_j = \|\tilde{Z}_{jik}\|_{i,k=1}^2$ – его матричное представление относительно (4.1). Положим $Y_{j11} = \tilde{Z}_{j12}\tilde{Z}_{j12}^*, Y_{j12} = \tilde{Z}_{j12}\tilde{Z}_{j22}, Y_{j21} = Y_{j12}^*, Y_{j22} = \tilde{Z}_{j22}, j = 1, \dots, m$.

5. Дефинизируемые операторы и класс $\mathbf{K}(\mathbf{H})$. Дефинизируемые операторы и операторы класса $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ имеют ряд похожих свойств. В частности, если J -самосопряженный оператор принадлежит хотя бы одному из этих двух классов, то он обладает спектральной функцией с конечным множеством спектральных особенностей. Характер этих особенностей (в случае дефинизируемого оператора они входят в, вообще говоря, более широкое множество критических точек) для двух указанных случаев различен, поэтому естественен вопрос о спектральных особенностях оператора, входящего одновременно в оба класса.

Ниже в формулировке теоремы 5.3 и ее доказательстве мы будем использовать общепринятую терминологию, касающуюся J -спектральной функции дефинизируемого оператора и ее критических точек [7] (см. также [2, гл. IV]).

Существование спектральной функции у оператора класса $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ в виде упражнения было анонсировано впервые в [2]. Приведем соответствующий результат в той форме, как он подробно доказан в [8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть спектр J -самосопряженного оператора $A \in \mathbf{D}_\kappa^+$ вещественен, $\mathcal{L}_+$ – отвечающее определению 2.5 подпространство, инвариантное относительно A . Тогда оператор A обладает спектральной функцией E_λ с конечным множеством спектральных особенностей $\Lambda \subset \mathbb{R}$, причем

- a) $E_\lambda \in \text{Alg } A$ для любого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$, $\sigma(A|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \bar{\Delta}$ для любого $\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda$, $E(\mathbb{R}) = I$;
- b) если $\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda$ и $\Delta \cap \Lambda = \emptyset$, то $E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Delta^+[+] \mathcal{H}_\Delta^-$, $A\mathcal{H}_\Delta^+ \subset \mathcal{H}_\Delta^+$, $A\mathcal{H}_\Delta^- \subset \mathcal{H}_\Delta^-$, $\mathcal{H}_\Delta^+ = E(\Delta)\mathcal{L}_+$ – равномерно положительное, а $\mathcal{H}_\Delta^-$ – равномерно отрицательное подпространство (каждое из подпространств $\mathcal{H}_\Delta^+$ и $\mathcal{H}_\Delta^-$ может вырождаться в $\{0\}$);
- c) если $\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda$ и $\Delta \cap \Lambda \neq \emptyset$, то $E(\Delta)(\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^{[\perp]}) \neq \{0\}$,

где $\text{Alg } A$ – минимальная слабо замкнутая алгебра, порожденная A и содержащая единицу, $\mathcal{R}_\Lambda$ – система всех таких борелевских подмножеств вещественной

оси, для которых никакая точка из Λ не является точкой прикосновения, хотя и может быть внутренней точкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если J -самосопряженный оператор $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$ имеет невещественный спектр, то он также обладает спектральной функцией, определенной на $\mathbb{R} \setminus \Lambda$, однако в этом случае $E(\mathbb{R}) \neq I$ и $\sigma(A|_{(I-E(\mathbb{R}))\mathcal{H}}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Перейдем теперь к результатам настоящего раздела.

ТЕРЕМА 5.3. Для того чтобы J -самосопряженный оператор $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$ с инвариантными подпространствами $\mathcal{L}^\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, $\mathcal{L}^+[\perp]\mathcal{L}^-$ был дефинизируемым, необходимо и достаточно, чтобы существовало конечное множество точек $\{\mu_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$ таких, что интервалы $(-\infty, \mu_1)$, (μ_1, μ_2) , $\dots$, (μ_m, ∞) состоят из точек дефинитного типа J -спектральной функции E оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из общей теории дефинизируемых операторов [7].

Достаточность. Если J -самосопряженный оператор $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$ имеет невещественный спектр, то последний состоит из конечного числа конечнократных собственных значений [2, следствие 3.5.21]. Пусть $\{\lambda_j, \bar{\lambda}_j\}_{j=1}^s$ — множество невещественных собственных значений оператора A , если они существуют. Введем обозначения:

$$\mathcal{K}_1 = \sum_{j=1}^s \mathcal{L}_{\lambda_j}(A) + \mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(A),$$

где $\mathcal{L}_{\lambda_j}(A)$ и $\mathcal{L}_{\bar{\lambda}_j}(A)$ — корневые линейалы, отвечающие λ_j и $\bar{\lambda}_j$ соответственно, $j = 1, \dots, s$, $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1^{[\perp]}$. Тогда $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ инвариантны относительно A и $\mathcal{H} = \mathcal{K}_1[\dot{+}]\mathcal{K}_2$. Обозначим $A_j = A|_{\mathcal{K}_j}$, $j = 1, 2$. Оператор A_2 обладает теми же свойствами, что и A , и дополнительным свойством, что его спектр вещественен. Отсюда следует существование такого многочлена p с множеством нулей, содержащим $\{\lambda_j, \bar{\lambda}_j\}_{j=1}^s, \{\mu_k\}_{k=1}^m$, что оператор $B := p(A)$ обладает тем свойством, что отрицательная полуось состоит из точек отрицательного типа, а положительная — из точек положительного типа. Поскольку у оператора A длины жордановых цепочек равномерно ограничены [2, следствие 3.5.21], то p выберем так, чтобы $\mathcal{L}_0(B) = \ker B$. По условию подпространства $\mathcal{L}^\pm$ инвариантны относительно A , а потому и относительно B . Пусть $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^+ \cap \mathcal{L}^-$. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}^0 \dot{+} \mathcal{L}_+ \dot{+} \mathcal{L}_- \dot{+} J\mathcal{L}^0, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{L}_\pm$ — равномерно дефинитные компоненты разложения подпространств $\mathcal{L}^\pm$. Относительно (5.1) оператор B представляется матрицей

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ 0 & B_{22} & 0 & B_{24} \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $\mathcal{L}_+$ — равномерно положительное подпространство, а $\mathcal{L}_-$ — равномерно отрицательное, то $\sigma(B_{22}) \in [0, \infty)$, а $\sigma(B_{33}) \in (-\infty, 0]$. Отсюда следует, что оператор B

является конечномерным возмущением J -неотрицательного оператора

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В силу [9] оператор B , а с ним и оператор A , являются дефинизируемыми.

Перейдем теперь к вопросу о том, чем отличается спектральная функция оператора класса $\mathbf{H}$ от спектральной функции оператора класса $\mathbf{D}_\kappa^+$. Отметим, прежде всего, следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть $A \in \mathbf{H}$ – J -самосопряженный оператор. Тогда всем его вещественным собственным числам, за исключением, быть может, их конечного числа, отвечают равномерно дефинитные собственные подпространства, а собственные подпространства, отвечающие исключительным собственным значениям, регулярны или псевдoreгулярны, имеют конечный ранг индефинитности и конечномерную изотропную часть.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Пусть E_λ – спектральная функция J -самосопряженного оператора $A \in \mathbf{D}_\kappa^+$. Функцию $f(\lambda)$, заданную на множестве $\text{Supp}(E) \setminus \Lambda$ (Supp – носитель меры), назовем E -измеримой, если она измерима по отношению к любой мере Лебега–Стилтьеса μ_σ , задаваемой функцией вида $\sigma(\lambda) = [E_\lambda x, x]$,

$$x \in \widetilde{\mathcal{K}} = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda, \Delta \cap \Lambda = \emptyset} \text{ЗЛО } E(\Delta)\mathcal{K}, \quad (5.2)$$

определенной первоначально на $\text{Supp}(E) \setminus \Lambda$ и доопределенной по непрерывности в точках из Λ . Если пространство $\mathcal{K}$ сепарабельно, то измеримость функции по отношению к указанной совокупности мер Лебега–Стилтьеса может быть заменена измеримостью по отношению к единственной мере μ_σ , задаваемой функцией $\sigma(\lambda) = [E_\lambda x, y]$, определяемой некоторыми специально подобранными векторами x и y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, J -самосопряженный оператор $A \in \mathbf{D}_\kappa^+$ порождает в фактор-пространстве $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}/(\mathcal{K} \cap \widetilde{\mathcal{K}}^{[\perp]})$ оператор $\widehat{A}$, самосопряженный по отношению к подходящим образом выбранному каноническому скалярному произведению, причем $\sigma_p(A) \cap \Lambda = \emptyset$. По поводу дальнейшего см., например, [10, п. 76, теорема 1]. Для наших целей целесообразно выбрать указанные вектора специальным образом. Положим

$$\widetilde{\mathcal{K}}_+ = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda, \Delta \cap \Lambda = \emptyset} \{\mathcal{K}_+(\Delta)\}, \quad \widetilde{\mathcal{K}}_- = \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_\Lambda, \Delta \cap \Lambda = \emptyset} \{\mathcal{K}_-(\Delta)\}, \quad (5.3)$$

где $\mathcal{K}_+(\Delta)$ и $\mathcal{K}_-(\Delta)$ взяты в соответствии с условиями а)–с) предложения 5.1. Тогда найдутся такой вектор $x_+ \in \widetilde{\mathcal{K}}_+$, что измеримость множества $X \subset \mathbb{R} \setminus \Lambda$ по отношению к мере μ_{σ_+} , где $\sigma_+(\lambda) = [E_\lambda x_+, x_+]$, влечет измеримость X по отношению к мере μ_σ , где $\sigma(\lambda) = [E_\lambda y, y]$, для любого $y \in \widetilde{\mathcal{K}}_+$, и аналогичный вектор $x_- \in \widetilde{\mathcal{K}}_-$. Искомые вектора x и y , которые исчерпывающим образом описывают E_λ -измеримость, возьмем теперь в виде

$$x = x_+ + x_-, \quad y = x_+ - x_-. \quad (5.4)$$

Из примера 3.3 вытекает, что операторы класса $\mathbf{H}$, вообще говоря, не дефинизируемы, однако приводимая ниже теорема показывает, что в некотором отношении операторы класса $\mathbf{H}$ похожи на дефинизируемые операторы.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, $A \in \mathbf{H}$ — J -самосопряженный оператор, E_λ — его спектральная функция с множеством критических точек Λ . Тогда найдется такое конечное множество $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}$, $\Lambda \subset \hat{\Lambda}$, и E_λ -измеримые множества $X_+, X_- \subset \mathbb{R}$, $X_+ \cap X_- = \emptyset$, $X_+ \cup X_- = \mathbb{R} \setminus \hat{\Lambda}$, что для любого отрезка $\Delta \in B_\Lambda \cap \mathbb{R}$ каждое из подпространств

$$E(\Delta \cap X_+) \mathcal{H} \quad \text{и} \quad E(\Delta \cap X_-) \mathcal{H} \quad (5.5)$$

либо вырождается в $\{0\}$, либо, соответственно, положительно и отрицательно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образует множество $\hat{\Lambda}$, присоединив к Λ те $\lambda \in \sigma_p(A)$, для которых соответствующее собственное подпространство индефинитно. В силу предложения 5.4 $\hat{\Lambda}$ — конечное множество. Для упрощения выкладок допустим, что $\Lambda = \hat{\Lambda}$ и при сделанном предположении покажем, что меры, порождаемые функциями $\sigma_+(\lambda) = [E_\lambda x_+, x_+]$ и $\sigma_-(\lambda) = -[E_\lambda x_-, x_-]$ (x_+ и x_- — те же, что и в (5.4)), взаимно сингулярны. Отметим, во-первых, что в силу сделанного допущения взаимно сингулярны атомические компоненты этих мер, поэтому можно считать, что функции $\sigma_+(\lambda)$ и $\sigma_-(\lambda)$ непрерывны.

В соответствии с замечанием 5.5 и разложением (5.4) имеем $\sigma(\lambda) = \sigma_+(\lambda) + \sigma_-(\lambda)$, откуда $\mu_{\sigma_+} \prec \mu_\sigma$ и $\mu_{\sigma_-} \prec \mu_\sigma$ ($\prec$ — символ подчиненности мер), поэтому

$$\sigma_+(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \rho_+(\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \rho_-(\tau) d\sigma(\tau),$$

причем для любого $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо $\rho_+(\tau), \rho_-(\tau) \in [0; 1]$. Положим $Y = \{\tau : \rho_+(\tau) \neq 0, \rho_-(\tau) \neq 0\}$. Утверждение теоремы будет доказано, если $\mu_\sigma Y = 0$. Допустим противное, т.е. что $\mu_\sigma Y \neq 0$, и введем две функции:

$$f_+(t) = \begin{cases} \left(\frac{\rho_+(\tau) + \rho_-(\tau)}{\rho_+(\tau)} \right)^{1/2} & \text{при } t \in Y, \\ 0 & \text{при } t \notin Y, \end{cases}$$

$$f_-(t) = \begin{cases} \left(\frac{\rho_+(\tau) + \rho_-(\tau)}{\rho_-(\tau)} \right)^{1/2} & \text{при } t \in Y, \\ 0 & \text{при } t \notin Y. \end{cases}$$

Зафиксируем теперь какой-либо промежуток $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\Delta \in B_\Lambda$, для которого $\mu_\sigma(Y \cap \Delta) \neq 0$, и положим

$$y_+ = \int_{\Delta} f_+(t) dE_t x_+, \quad y_- = \int_{\Delta} f_-(t) dE_t x_-.$$

Пусть $\Delta_1 \subset \Delta$, $z_{\Delta_1} = E(\Delta_1)(y_+ + y_-)$. Тогда

$$\begin{aligned} [z_{\Delta_1}, z_{\Delta_1}] &= \int_{\Delta_1} f_+^2(t) d\sigma_+(t) - \int_{\Delta_1} f_-^2(t) d\sigma_-(t) \\ &= \int_{\Delta_1 \cap Y} (\rho_+(t) + \rho_-(t)) d\sigma(t) - \int_{\Delta_1 \cap Y} (\rho_+(t) + \rho_-(t)) d\sigma(t) = 0. \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{L} = \mathcal{Z}\text{ЛО}_{\Delta \subset \Delta_1}\{z_{\Delta_1}\}$. Ясно, что $\mathcal{L}$ – нейтральное подпространство, а поскольку $\mu_\sigma(Y \cap \Delta) \neq 0$ и множество $Y \cap \Delta$ свободно от атомической меры, то $\mathcal{L}$ – бесконечномерное подпространство. Итак, оператор A имеет бесконечномерное нейтральное инвариантное подпространство, что невозможно по определению класса **H**.

В заключение приносим свою благодарность П. Йонасу (Технический университет г. Берлин), неоднократно поднимавшему вопрос о связи дефинизируемых операторов и операторов классов **H** и **K(H)**, что в конечном счете и стимулировало настоящее исследование.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 17. М.: ВИНТИ, 1979. С. 113–205.
- [2] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [3] Boggar J. Indefinite Inner Product Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
- [4] Сухочева Л.И. О свойствах операторов класса Helton'a // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. физ., матем. 2001. №1. С. 120–123.
- [5] Штраус В.А. О структуре операторов дважды перестановочных с оператором класса **K(H)** // Укр. матем. ж. 1986. Т. 38. №6. С. 805.
- [6] Штраус В.А. О структуре семейства коммутирующих J -самосопряженных операторов // Укр. матем. ж. 1989. Т. 41. №10. С. 1431–1433.
- [7] Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces // Lect. Notes in Math. V. 948. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982. P. 1–46.
- [8] Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces // Spectral Theory and its Applications. Proceedings. Theta, 2003. P. 45–67.
- [9] Jonas P., Langer H. Compact perturbations of definitizable operators // J. Operator Theory. 1979. V. 2. P. 63–77.
- [10] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 1. Харьков: Вища школа, 1977.

(Т.Я. Азизов, Л.И. Сухочева) Воронежский государственный университет
(В.А. Штраус) Университет им. С. Боливара, Венесуэла
E-mail: azizov@tom.vsu.ru

Поступило
11.10.2002
Исправленный вариант
15.12.2003