Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, Асимптотическое поведение нормированных собственных функций оператора типа Штурма–Лиувилля для уравнений в частных производных в N -мерном шаре, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 622–625

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 05:08:46

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НОРМИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В N -МЕРНОМ ШАРЕ

Г. А. Айгунов

Пусть Ω_N – шар в пространстве $\mathbb{R}^N$ радиуса $R = 1$ с центром в начале координат, S_N – поверхность Ω_N , а $\{\lambda_n, u_n\}$ – спектральная пара задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda \rho(|x|) u(x), \quad x \in \Omega_N, \\ u|_{S_N} &= 0, \quad \int_{\Omega_N} \rho(|x|) u^2(x) d\Omega_N = 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $|x| = r = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$.

В заметке изучается вопрос о росте норм собственных функций $u_n(x)$ задачи (1) в пространстве $C(\Omega_N)$. Рассматривается случай, когда функция $\rho(|x|)$ бесконечно дифференцируема на полуинтервале $(0, 1]$ и непрерывна на отрезке $[0, 1]$.

Отметим, что задаче об оценке норм $\|u_n(x)\|_C$ собственных функций $u_n(x)$ эллиптических операторов посвящены работы [1]–[5]. Автором данной заметки ранее были рассмотрены случаи $N = 1$ и $N > 1$ для N -мерного куба в работах [6] и [7] соответственно.

Перейдем к сферическим координатам. Тогда задача (1) примет вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{q_j \sin^{N-j-1} \omega_j} \frac{\partial}{\partial \omega_j} \left(\sin^{N-j-1} \omega_j \frac{\partial u}{\partial \omega_j} \right) = \lambda \rho(r) u, \quad (2)$$

$$u(1, \omega) = 0, \quad \int_0^1 \int_{S_N} \rho(r) u^2(r, \omega) r^{N-1} dr d\omega = 1,$$

где $q_1 = 1$, $q_j = (\sin \omega_1 \cdots \sin \omega_{j-1})^2$, $j \geq 2$.

Будем искать решение задачи (2) методом Фурье в виде $u(r, \omega) = f(r) \cdot Y(\omega)$. Тем самым, получим, что $u(r, \omega) = f_{n,m} \cdot Y_{n,N}^{(j)}$, где $n = 0, 1, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, k_{n,N}$,

$$k_{n,N} = (2n + N - 2) \frac{(N + n - 3)!}{(N - 2)! n!},$$

$Y_{n,N}^{(j)}$ – сферические функции, $f_{n,m}$ – собственные функции задачи

$$r^2 f''(r) + (N - 1) r f'(r) + [\lambda \rho(r) r^2 - n(n + N - 2)] f(r) = 0,$$

$$f(1) = 0, \quad f(0) \text{ ограничено.}$$

Пусть m, M ($0 < m < M < \infty$) – фиксированные числа. Обозначим через $C_{[0,1]}^+$ множество всех непрерывных весовых функций $\rho(x)$ на сегменте $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $m \leq \rho(x) \leq M$.

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\alpha_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, стремящихся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Тогда

- а) существует весовая функция $\rho(r, \{\alpha_n\}) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{(0,1]}^\infty$, не дифференцируемая в точке $r = 0$, такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \lambda_n^{-N/4} \|u_n(x)\|_C = \infty;$$

- б) для любого действительного r_1 существует весовая функция $\rho(r, \{\alpha_n\}) \in C_{[0,1]}^+ \cap C_{(0,1]}^\infty$ такая, что

$$\rho'(0) = r_1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \lambda_n^{-N/4} \|u_n(x)\|_C = \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\rho(r) \in C_{[0,1]}^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-N/4} \|u_n(x, \rho)\|_C = 0$$

$(\{\lambda_n, u_n\} - \text{спектральная пара задачи (1)}).$

ТЕОРЕМА 3. Если $\rho(r) \in C_{[0,1]}^+$ – функция ограниченной вариации, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-(N-1)/4} \|u_n(x, \rho)\|_C < \infty.$$

Доказательства теорем основываются на леммах 1–3 (см. ниже).

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda > 0$, $g(x) \in C^+_{[0,1]}$, $y(x)$ – решение уравнения $-y''(x) = \lambda g(x)y(x)$, а z' и z'' – два последовательных нуля функции $y(x)$,

$$m = \min_{x \in [z', z'']} g(x), \quad M = \max_{x \in [z', z'']} g(x).$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda M}} &\leq z'' - z' \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda m}}, \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda M}} &\leq \frac{1}{|y'(z')|} \max_{x \in [z', z'']} |y(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda m}}, \\ \sqrt{\frac{m}{M}} &\leq \frac{|y'(z'')|}{|y'(z')|} \leq \sqrt{\frac{M}{m}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Если $y(x)$ – произвольное ограниченное в нуле решение уравнения задачи (2), то имеют место неравенства

$$\max_{x \in [0, z_1]} |y(x)| \leq \frac{C(\nu)}{\sqrt{\lambda m}} \left(\frac{M}{m} \right)^{\nu+1} |y'(z_1)|,$$

где $\nu = n + (N - 2)/2$, z_1 – первый из нулей $y(x)$ на $(0, \infty)$,

$$m = \min_{x \in [0, z_1]} \rho(x), \quad M = \max_{x \in [0, z_1]} \rho(x),$$

$C(\nu)$ – константа, зависящая только от ν .

ЛЕММА 3. Пусть $y(x)$ – решение задачи Коши

$$-y''(x) = g(x)y(x), \quad y(z') = 0, \quad y'(z') = y'_0,$$

где $g(x)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|g(x)| < G$ ($-\infty < x < \infty$), z', z'' – два последовательных нуля решения $y(x)$, а G – некоторое вещественное положительное число. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [z', z'']} |y(x)| &\leq \frac{|y'_0|}{2\sqrt{G}} e^{\sqrt{G}(z'' - z')}, \\ e^{-\sqrt{G}(z'' - z')} &\leq \left| \frac{y'(z'')}{y'(z')} \right| \leq e^{\sqrt{G}(z'' - z')}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смолицкий Х. Л. // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74. № 2. С. 205–208. 2. Эйдус Д. М. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798. 3. Ильин В. А., Шишмарев И. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. № 6. С. 883–896. 4. Якубов В. Я. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 1. С. 35–37. 5. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 4. С. 32–34. 6. Айгунов Г. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 147–148. 7. Айгунов Г. А. // Труды международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, посвященной 75-летию члена-корр. РАН профессора Л. Д. Кудрявцева. Т. 2. Москва, 1998. С. 42–46.

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Поступило
30.10.98