Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Щепин, О достижении максимума кубо-линейного отношения трехмерных кривых Пеано, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 923–929

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:57:07

О достижении максимума

кубо-линейного отношения трехмерных кривых Пеано

Е. В. Щепин

В данной статье определяется класс так называемых q -адических кривых Пеано, который достаточно широк, чтобы включать в себя полифрактальные кривые, и для которого кубо-линейное отношение достигает своего максимального значения, которое может быть эффективно определено доступным для современных компьютеров перебором.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10909

1. Введение. Под *кривыми Пеано* мы понимаем любые непрерывные отображения отрезка на квадрат или даже на n -мерный куб, т.е. кривые, которые в англоязычной литературе называются *заполняющими пространство* (space-filling). Кривые Пеано, прежде всего двумерные, стали активно изучаться в компьютерную эру и нашли разнообразные приложения (см. [1]), связанные с распределенными вычислениями. Как оригинальная кривая Пеано, так и ее упрощенный и наиболее известный вариант, предложенный Гильбертом, обладают свойством *фрактальности*: они состоят из нескольких кусков (фракций) каждая из которых подобна всей кривой. При этом минимальное количество фракций образующих кривую (*фрактальный род* согласно [2]) для оригинальной кривой Пеано равно девяти, а для кривой Гильберта — четырем. Фрактальность кривых Пеано позволяет их легко моделировать на компьютере и проводить с ними эффективные вычисления.

Если в двумерном случае классическая кривая Гильберта является единственной фрактальной кривой Пеано минимально возможного фрактального рода 4, то в трехмерном случае кривых минимально возможного фрактального рода — рода 8 — уже тысячи. Хэверкорт [3] и Шалыга [4] предприняли попытки классифицировать эти кривые.

Важнейшей метрической характеристикой трехмерной кривой Пеано $p(t)$ является *кубо-линейное отношение*

$$\sup_{x \neq y} \frac{\|p(x) - p(y)\|^3}{|x - y|}, \quad (1)$$

где под $\|p(x) - p(y)\|$ обычно понимается какая-то из трех норм: евклидова (L_2), манхэттенская (L_1) или мажоритарная (c_0). В данной статье мы ограничимся евклидовым случаем.

Обычно рассматривают кривые Пеано, которые за равные промежутки времени заполняют равные объемы пространства. Для таких трехмерных кривых Пеано кубо-линейное отношение совпадает с понятием *локальности* (locality), употребляемым в англоязычной литературе.

Для произвольной кривой Пеано кубо-линейное отношение может быть неограниченным. В данной статье определяется класс так называемых q -адических кривых Пеано, который достаточно широк, чтобы включать в себя все рассматриваемые Хэверкортом [3], для которого кубо-линейное отношение не только ограничено, но достигает своего максимального значения, которое определяется конечным, доступным для современных компьютеров перебором.

2. q -Адические кривые Пеано. Непрерывная кривая $p: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$ называется q -адической для некоторого натурального числа q , если образом любого отрезка типа

$$\left[\frac{k}{q^{3n}}, \frac{k+1}{q^{3n}} \right]$$

при целых k, n таких, что $0 \leq k < 2^n$, является куб со стороной $1/q^n$.

Ограничение q -адической кривой на отрезок типа $[k/q^{3n}, (k+1)/q^{3n}]$ называется *фракцией n -го порядка*.

Из данного выше определения нетрудно вывести, что образы фракций представляют собой кубы с гранями, параллельными координатным плоскостям, и что вершины фракций n -го порядка имеют q -рациональные координаты (типа k/q^n для целого k).

Основные результаты этой статьи относятся к 2-адическим кривым.

3. Полифрактальность. Трехмерные кривые Пеано $p(t), t \in [a, b]$ и $p'(t), t \in [a', b']$ называются *подобными*, если для любой пары различных точек $t_1, t_2 \in [a, b]$ имеет место равенство отношений

$$\frac{|p(t_1) - p(t_2)|^3}{|t_1 - t_2|} = \frac{|p'(t'_1) - p'(t'_2)|^3}{|t'_1 - t'_2|}, \quad (2)$$

где t' определяется по формуле

$$t' = a' + \frac{b' - a'}{b - a}(t - a).$$

q -Адическая кривая $p(t)$ называется *n -фрактальной*, если существует n попарно неподобных друг другу фракций таких, что все остальные фракции кривой подобны одной из них.

4. Стыки и глубина. Пара F_1, F_2 соседних фракций n -го порядка q -адической кривой Пеано называется *стыком n -го порядка*.

В зависимости от того, чем является пересечение $F_1 \cap F_2$ пары фракций стыка, стык называется *вершинным*, *реберным* или *граневым*. Если все стыки кривой Пеано являются граневыми, то сама кривая называется *гранево-непрерывной* (face-continuous). Если встречаются как граневые, так и реберные стыки, то кривая называется *реберно-непрерывной* (edge-continuous).

Последняя фракция $(n+1)$ -го порядка, содержащаяся в F_1 , вместе с первой фракцией $(n+1)$ -го порядка, содержащейся в F_2 , образуют стык F'_1, F'_2 , называемый *производным стыком* для F_1, F_2 .

Кубо-линейное отношение стыка F_1, F_2 определяется как супремум кубо-линейных отношений пар точек $x \in F_1, y \in F_2$, причем или $x \notin F'_1$, или $y \notin F'_2$, т.е. пара x, y не принадлежит производному стыку.

Аналогично определяется *квадратно-линейное отношение* стыка.

Глубину (следуя [5]) q -адической полифрактальной кривой Пеано определяем как максимальное k , для которого существует стык k -го порядка, не подобный никакому стыку меньшего порядка.

Как показывают вычисления [4], наибольшая глубина у трехмерных фрактальных 2-адических 1-фрактальных кривых Пеано равна семи.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая трехмерная q -адическая кривая Пеано имеет конечное кубо-линейное отношение¹. Всякая полифрактальная трехмерная q -адическая кривая Пеано $p: I \rightarrow I^3$ имеет конечную глубину и ее кубо-линейное отношение достигает своего максимума на некоторой паре точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как из пары кубических кривых Пеано, очевидно, можно образовать лишь конечное число попарно неизометричных стыков, то конечность числа попарно неподобных типов фракций, имеющих у полифрактальной кривой, влечет и конечность числа их возможных стыков. Откуда непосредственно следует конечность глубины полифрактальной кривой.

Для данного $\varepsilon > 0$ компактно множество пар $\{(t_1, t_2) \in I^2 \mid |t_2 - t_1| \geq \varepsilon\}$. Поэтому кубо-линейное отношение кривой p принимает на этом множестве свое максимальное значение, которое мы обозначаем $M(\varepsilon)$.

Заметим, что пара точек $(p(t_1), p(t_2))$, не принадлежащая никакому стыку, не принадлежит, в частности, никакому стыку первого порядка и потому удовлетворяет неравенству $|t_1 - t_2| \geq 1/q^3$, а значит, имеет кубо-линейное отношение, не превосходящее $M(1/q^3)$.

Кубо-линейное отношение любого стыка порядка k оценивается сверху величиной $8\sqrt{27}q^3$, являющейся отношением куба его диаметра, который не превышает удвоенного диаметра фракции (равного $\sqrt{3}/q^k$), к $1/q^{3(k+1)}$. Поэтому кубо-линейное отношение любой пары точек q -адической кривой оценивается сверху максимумом из чисел $M(1/q^3)$ и $6^{3/2}q^3$.

Если же кривая имеет конечную глубину d , то кубо-линейное отношение любого стыка совпадает с кубо-линейным отношением стыка порядка $\leq d$ и потому оценивается сверху величиной $M(1/q^{3(d+1)})$.

Следовательно, кривая глубины d имеет кубо-линейное отношение любой пары точек не превосходящим величины $M(1/q^{3(d+1)})$, принимаемой на некоторой паре точек кривой.

5. Неравенство Бернулли.

ЛЕММА 1. *При любых вещественных D и ΔD справедливо неравенство*

$$\sqrt{(D^2 + \Delta D^2)^3} \geq D^3 + \frac{3}{2}(\Delta D)^2 D.$$

¹ Конечность кубо-линейного отношения q -адической кривой, т.е. ее гёльдеровость с показателем $1/3$ следует также из общей теоремы 1 из [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При отрицательном D указанное неравенство справедливо ввиду положительности его левой части и отрицательности правой. При положительном D это неравенство получается умножением на D^3 из приведенного ниже, которое непосредственно вытекает из обобщенного неравенства Бернулли:

$$\left(1 + \frac{(\Delta D)^2}{D^2}\right)^{3/2} \geq 1 + \frac{3}{2} \frac{(\Delta D)^2}{D^2}.$$

6. Неравенство квадратно-линейных отношений.

ЛЕММА 2. Пусть фиксировано отображение $p: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ и тройка чисел $t_0, t_1, t_2 \in I$ такова, что угол $\angle p(t_0), p(t_1), p(t_2)$ неострый. Положим $T = t_1 - t_0$, $\Delta T = t_2 - t_1$ и обозначим через D_1 , D_2 и ΔD длины отрезков $[p(t_0), p(t_1)]$, $[p(t_0), p(t_2)]$ и $[p(t_1), p(t_2)]$ соответственно.

Тогда неравенство кубо-линейных отношений

$$\frac{D_1^3}{T} \geq \frac{D_2^3}{T + \Delta T}$$

влечет следующее неравенство квадратно-линейных отношений:

$$\frac{(\Delta D)^2}{\Delta T} \leq \frac{2}{3} \frac{D_1^2}{T}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия на угол заключаем $D_2 \geq \sqrt{D_1^2 + (\Delta D)^2}$. Тогда куб D_2^3 в силу леммы 1 оценивается снизу величиной

$$\left(\sqrt{D_1^2 + (\Delta D)^2}\right)^3 \geq D_1^3 + \frac{3}{2}(\Delta D)^2 D_1. \quad (3)$$

Тогда из неравенства кубо-линейных отношений $D_1^3/T \geq D_2^3/(T + \Delta T)$ получаем неравенство

$$\frac{D_1 + \frac{3}{2} D_1 (\Delta D)^2}{T + \Delta T} \leq \frac{D_1^3}{T}, \quad (4)$$

которое может быть преобразовано в следующее:

$$\frac{(\Delta D)^2}{\Delta T} \leq \frac{2}{3} \frac{D_1^2}{T}. \quad (5)$$

7. Об экстремумах кубо-линейного отношения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны q -адическая кривая $p(t)$, точка $A \in \mathbb{R}^3$ и константа $c > 0$. Если кубо-линейное отношение

$$\frac{|p(t) - A|^3}{|t + c|}$$

достигает локального максимума в точке t_1 , то $p(t_1)$ имеет все три координаты q -рациональными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что первая координата, которую будем представлять высотой, q -рациональна. Предположим, что x_1 – первая координата точки $p(t_1)$ – больше либо равна первой координате точки A ; иными словами, $p(t_1)$ выше чем A . Рассмотрим запись x_1 в q -ичной системе счисления. Если она бесконечна,

то это означает существование бесконечной последовательности натуральных чисел $n_1, \dots, n_k, \dots$, являющихся номерами позиций, на которых в q -ичной записи стоят отличные от нулей цифры. Наличие ненулевой цифры на позиции n_i означает, что точка $p(t_1)$ в образе содержащей ее дроби F порядка n_i находится на $\Delta_i x \geq 1/q^{n_i+1}$ выше нижней грани этой дроби. Так как вся дробь F проходит за время $1/q^{3n_i}$, то момент t_2 , для которого $p(t_2)$ является вертикальной проекцией $p(t_0)$ на верхнюю грань дроби F , отличается от t_0 на величину

$$\Delta_i t = t_2 - t_1 \leq \frac{1}{q^{3n_i}}.$$

Так как $p(t_2)$ дальше, чем $p(t_1)$, находится от A , то $\Delta_i t > 0$, ибо иначе получилось бы противоречие с условием максимальности кубо-линейного отношения в t_0 . В таком случае квадратно-линейное отношение $(\Delta_i x)^2/\Delta_i t$ может быть оценено снизу величиной $(1/q^{2(n_i+1)})q^{3n_i}$. Откуда видна неограниченность последовательности $(\Delta_i x)^2/\Delta_i t$. Но если здесь положить $t_0 = -c$ и $p(t_0) = 0$, то мы приходим к противоречию с леммой 2, согласно которой локальная максимальность отношения $|p(t_1) - p(t_0)|^3/|t_1 - t_0|$ влечет ограниченность отношений $(\Delta_i x)^2/\Delta_i t$ величиной

$$\frac{2}{3} \frac{|p(t_1) - p(t_0)|^2}{|t_1 - t_0|}.$$

Аналогично доказывается q -рациональность остальных координат точки $p(t_1)$.

8. Теорема стабилизации.

ТЕОРЕМА 3. Пусть дана 2-адическая кривая $p(t)$, точка A вне единичного куба и неотрицательное число τ . Тогда максимум отношения

$$\frac{|p(t) - A|^3}{t + \tau} \quad (6)$$

при условии $t + \tau \geq 1/8$ достигается в вершине шестого подразделения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что максимум отношения (6) достигается в точке $p(t_1)$, являющейся вершиной (углом) k -го подразделения и не являющейся вершиной $(k-1)$ -го подразделения. Поскольку $p(t_1)$ не является вершиной $(k-1)$ -го подразделения, то она является серединой отрезка длины $1/2^{k-1}$, оба конца которого принадлежат той же самой дроби $(k-1)$ -го порядка, что и $p(t_1)$. Поэтому временной интервал Δt от t_1 до дальнего от A конца этого отрезка B ($\Delta t > 0$ в силу максимальности t_1) не превосходит $1/8^{k-1}$, а расстояние $\Delta D = 1/2^k$. Согласно лемме 2, примененной к ситуации $p(t_0) = A$, $t_0 = -\tau$, $t_2 = t_1 + \Delta t$, должно быть выполнено неравенство

$$\frac{(\Delta D)^2}{\Delta t} \leq \frac{2}{3} \frac{D_1^2}{t_1 + \tau} < \frac{2}{3} 3 \cdot 8 = 16. \quad (7)$$

Подставляя сюда значения $\Delta t = 8^{1-k}$ и $\Delta D = 2^{-k}$, получаем неравенство

$$4^{-k} 8^{k-1} < 16, \quad (8)$$

откуда $2^{-2k+3k-3} < 2^4$, а значит, $k-3 < 4$ и $k < 7$.

9. Оценка квадратно-линейного отношения для стыка.

ЛЕММА 3. Квадратно-линейное отношение граневого стыка k -го порядка для 2-адической гранево-непрерывной кривой Пеано $< 24 \cdot 2^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стык нулевого порядка. Тогда $t_2 - t_1 \geq 1/8$. Если $t_2 - t_1 \geq 1/4$, то так как диаметр стыка не превосходит $\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, то для квадратно-линейного отношения получим оценку $\leq 4 \cdot 6 < 24$. Если $1/4 > t_2 - t_1 \geq 1/8$, то пара точек лежит в тройке соседних фракций, которая имеет диаметр

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Поэтому для квадратно-линейного отношения получаем оценку сверху $2 \cdot 11 = 22$. Таким образом, для квадратно-линейного отношения стыка порядка k получаем оценку сверху $< 24 \cdot 2^k$.

10. Первичное квадратно-линейное отношение.

ЛЕММА 4. Если пара точек $p(t_1), p(t_2)$ 2-адической гранево-непрерывной кривой Пеано такова, что обе принадлежат фракции порядка k и не принадлежат никакой фракции порядка $k+1$, а также не принадлежат паре соседних фракций порядка $k+1$, то кубо-линейное отношение этой пары точек не превосходит 21, а квадратно-линейное отношение не превосходит $18 \cdot 2^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем вычисления для $k=0$. Для остальных случаев все вытекает из подобия. Если временной интервал $t_2 - t_1 > 1/4$, то, так как расстояние между ними не превосходит диаметра единичного куба равного $\sqrt{3}$, то для квадратно-линейного отношения получаем оценку сверху $\leq 4 \cdot 3 \leq 12$, а для кубо-линейного отношения получаем оценку сверху $\leq 12\sqrt{3} \leq 21$.

Если $t_2 - t_1 < 1/4$, то при заданных условиях пара точек принадлежит паре фракций первого порядка имеющих общего соседа – тоже фракцию первого порядка. В таком случае расстояние между точками оценивается сверху диаметром объединения тройки соседних фракций $\leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2/4} = 3/2$. А так как $t_2 - t_1 \geq 1/8$, то для квадратно-линейного отношения получаем оценку сверху $\leq 9/4 \cdot 8 = 18$, а для кубо-линейного отношения получаем оценку $\leq 8 \cdot 3/2^3 = 9$.

11. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 4. Для гранево-непрерывной правильной фрактальной трехмерной кривой Пеано $p: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$ глубины d фрактального рода 8 максимум кубо-линейного отношения в евклидовой метрике достигается на паре вершин $(d+6)$ -го подразделения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пара точек $p(t_0), p(t_1)$ имеет максимально возможную разность $t_1 - t_0$ среди всех пар, на которых достигается максимум кубо-линейного отношения. Наша цель доказать, что в этом случае обе эти точки являются вершинами фракций $(d+6)$ -го подразделения кривой. Если пара $p(t_0), p(t_1)$ принадлежит стыку F_1, F_2 фракций k -го порядка, то условие на максимальности разности $t_1 - t_0$ позволяет заключить, что $k \leq d$. Действительно, ведь любой стык порядка $k > d$ подобен стыку порядка d и при таком подобии кубо-линейное отношение точек неизменно, а разность времен умножается на 2^{k-d} . Сделаем замену координат $t' = 8^k t$, $(x', y', z') = 2^k(x, y, z)$. В новых координатах фракции F_i сделаются единичными кубами, а разность времен $t'_2 - t'_1$ будет не меньше, чем $1/8$. Обозначим через τ' время перехода из фракции F_1 в F_2 . Теперь мы можем применить теорему 3 для

$$t = t' - \tau', \quad A = p(t'_0), \quad \tau = \tau' - t'_1$$

и на ее основании заключить, что t'_2 является прообразом вершины шестого подразделения. Поэтому t_2 является прообразом вершины $(k+6)$ -го подразделения. Аналогично доказывается, что $p(t_1)$ является вершиной подразделения порядка $k+6 \leq d+6$.

Предположим теперь, что пара точек $p(t_0), p(t_1)$ не принадлежит никакому стыку фракций, но в силу максимальности разности времен мы получим, что эта пара не может принадлежать одной и той же фракции первого порядка. А так как и соседним они не могут принадлежать, то временной интервал между ними будет больше, чем $1/8$. Поэтому на основании той же теоремы 3 можно будет заключить, что обе точки являются вершинами фракций порядка ≤ 7 . Так как глубина любой кривой не может быть меньше единицы, то в этом случае заключение теоремы также справедливо.

12. Уточнение основного результата. Таким образом, максимум отношения достигается на углах фракций 9-го подразделения. Более того, он достигается на ребрах фракций восьмого подразделения. Ведь если угол 9-го подразделения лежит в середине грани 8-го подразделения, то он служит серединой отрезка, лежащего во фракции 8-го подразделения имеющего квадрат длины вдвое больший, чем у ребра восьмого подразделения. В результате $(\Delta D)^2$ в этом случае увеличится вдвое.

Далее, проверять на максимум нужно только самые дальние середины ребер восьмого подразделения. Таким образом, просчитывать для каждого куба 8-го подразделения нужно лишь три середины ребра, выходящих из самого дальнего угла куба.

При этом максимальная пара углов является самыми удаленными углами фракций и соединяющий их вектор не может быть перпендикулярен граням куба. Пара должна быть наклонной – т.е. быть единственным экстремумом расстояния. При этом углы должны быть внутренними (не входом-выходом).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Bader, *Space-Filling Curves. An Introduction with Applications in Scientific Computing*, Texts Comput. Sci. Eng., **9**, Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [2] Е. В. Щепин, “О фрактальных кривых Пеано”, *Геометрическая топология и теория множеств*, Тр. МИАН, **247**, Наука, М., 2004, 294–303.
- [3] H. Haverkort, *An Inventory of Three-Dimensional Hilbert Space-Filling Curves*, 2011, arXiv: 1109.2323v1.
- [4] Д. К. Шалыга, “О точном вычислении кубо-линейного отношения кривых Пеано”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2014, 088, 13 с.
- [5] Е. В. Щепин, К. Е. Бауман, “Минимальная кривая Пеано”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 251–271.
- [6] E. V. Shchepin, “On Hölder maps of cubes”, *Math. Notes*, **87**:5-6 (2010), 757–767.

Е. В. Щепин

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: scepin@mi.ras.ru

Поступило

17.06.2015