Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Бычков, Базисы и изоморфизмы некоторых банаховых пространств, связанных с функциями Гельдера, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 625–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:16:17

БАЗИСЫ И ИЗОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ ГЁЛЬДЕРА

А. Б. Бычков

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое банахово пространство функций, определенных на предкомпакте $K \subset \mathbb{R}$, $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность различных точек множества K . Базис $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $\mathcal{F}$ называется *интерполирующим в узлах* $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, если для всякой функции $f \in \mathcal{F}$, $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i$, всех n и $j = 0, 1, \dots, n$ выполняется $\sum_{i=0}^n c_i f_i(x_j) = f(x_j)$. Базис называется *монотонным*, если его базисная константа равна 1. Безусловный базис называется *симметрическим*, если любая перестановка его элементов дает базис эквивалентный исходному (подробнее см. в [1], [2]).

Обозначим через Ω класс функций $\omega(t)$, $t \geq 0$, таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$, непрерывных в нуле и удовлетворяющих условиям

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{t}{\omega(t)} = 0, \quad \omega(t_1) \leq \gamma \omega(t_2), \quad \frac{\omega(t_2)}{t_2} \leq \gamma \frac{\omega(t_1)}{t_1},$$

где $t_2 \geq t_1 > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Известно, что множество Ω образовано всеми функциями эквивалентными вогнутым функциям класса Ω , т.е. для всякой $\omega(t) \in \Omega$ найдется вогнутая функция $\varphi(t) \in \Omega$, константы C и c такие, что $c\varphi(t) \leq \omega(t) \leq C\varphi(t)$ для всех $t \geq 0$ (см. [3, с. 67–73]). Определим подмножество $\Omega^* \subset \Omega$ функций $\omega(t)$, удовлетворяющих условиям (оба условия мы приводим в двух равносильных формах записи):

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)) \iff \sum_{i=n}^{\infty} \omega(2^{-i}) = O(\omega(2^{-n})), \quad n \geq 0; \quad (1)$$

$$\int_{\delta}^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta}\right) \iff \sum_{i=0}^n 2^i \omega(2^{-i}) = O(2^n \omega(2^{-n})), \quad n \geq 0. \quad (2)$$

С нормой

$$\|f\|_{\omega} \stackrel{\text{df}}{=} \|f\|_C + |f|_{\omega} = \sup_{x \in K} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)}$$

рассмотрим банахово пространство функций, удовлетворяющих ω -условию Гёльдера $C_{\omega}(K) = \{f(x) : \|f\|_{\omega} < \infty\}$, и его подпространство

$$C_{\omega}^0(K) = \left\{ f(x) : \lim_{|x-y| \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} = 0 \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\omega(t) \in \Omega$. Для произвольной плотной в K последовательности различных точек $\{x_i\}_{i=0}^\infty \subset K$ существует базис $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ пространства $C_\omega^0(K)$, интерполирующий в узлах $\{x_i\}_{i=0}^\infty$. При условии вогнутости функции $\omega(t)$ этот базис монотонный.

Данное предложение не является теоремой существования: конструкция функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ и доказательство приведены в [4].

В заметке найден симметрический базис в указанном семействе интерполирующих базисов и построен совместный изоморфизм

$$C_\omega(K) \sim \ell_\infty, \quad C_\omega^0(K) \sim c_0, \quad (3)$$

где ℓ_∞ и c_0 – банаховы пространства ограниченных и бесконечно малых последовательностей $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ с нормой $\|\xi\|_\infty = \sup_{i \geq 0} |\xi_i|$. Результат получен при условиях $\omega(t) \in \Omega^*$, K – компакт на вещественной оси, содержащий бесконечно число точек. Всюду далее предполагается, что эти требования удовлетворены. Кроме того, не ограничивая общности, мы вправе считать, что $\min_{x \in K} x = 0$, $\max_{x \in K} x = 1$, а функция $\omega(t)$ является вогнутой.

Пусть $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^\infty U_i$, где $U_i = (u_i^-, u_i^+)$ – попарно не пересекающиеся открытые интервалы; если K есть объединение n отрезков, то под U_i для $i \geq n$ понимаем пустое множество. Рассмотрим функцию $d(x)$, действующую из $[0, 1]$ в K так, что

$$\min_{t \in K} |t - x| = |d(x) - x| \quad \forall x \in [0, 1].$$

Для некоторых K (например, для множества Кантора) таких функций может быть много – выберем одну из них.

Отрезок $[0, 1]$ обозначим через Δ_1^1 . Определим точки $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $\xi_2 = (x_0 + x_1)/2$ и $x_2 = d(\xi_2)$. Теперь $[0, 1]$ разделен на два интервала: (x_0, x_2) и (x_2, x_1) . Один из них, возможно, не содержит внутри себя ни одного элемента множества K . Тогда этот интервал есть U_i при некотором $i \in \mathbb{N}$. Другой интервал, необходимо содержащий точки из K , мы обозначим через Δ_1^2 . Если же $(x_0, x_2) \cap K \neq \emptyset$ и $(x_2, x_1) \cap K \neq \emptyset$, то положим $\Delta_1^2 = (x_0, x_2)$ и $\Delta_2^2 = (x_2, x_1)$. С учетом введенных обозначений

$$[0, 1] = \{\Delta_i^2\}_{i=1}^{p_2} \cup \{U_{\eta(i)}\}_{i=1}^{q_2} \cup \{x_i\}_{i=0}^2.$$

Здесь p_2 – количество интервалов $\{\Delta_i^2\}$, q_2 – число множеств семейства $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, ограниченных точками $\{x_i\}_{i=0}^2$, $q_2 \in \{0, 1\}$, $\eta(1)$ – номер этого множества (если $q_2 = 1$).

Продолжим строить последовательность $\{x_i\}_{i=0}^\infty$. Определим ξ_i , $2 < i \leq 2 + p_2$, как середины интервалов Δ_i^2 и положим $x_i = d(\xi_i)$. Набор точек $\{x_i\}_{i=0}^{2+p_2}$ разбивает отрезок $[0, 1]$ на попарно не пересекающиеся интервалы. Пусть p_3 из них содержат внутри себя точки множества K (обозначим их через $\{\Delta_i^3\}_{i=1}^{p_3}$). Тогда остальные q_3 интервалов суть элементы $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, и

$$[0, 1] = \{\Delta_i^3\}_{i=1}^{p_3} \cup \{U_{\eta(i)}\}_{i=1}^{q_3} \cup \{x_i\}_{i=0}^{n_3}.$$

Здесь $n_3 = p_3 + q_3$ и $\eta(i)$ – номера тех интервалов семейства $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, концы которых принадлежат множеству $\{x_i\}_{i=0}^{n_3}$.

Процесс построения поколений

$$x_0, x_1, x_2, \{x_i\}_{i=3}^{n_3}, \{x_i\}_{i=n_3+1}^{n_4}, \dots \quad (4)$$

можно продолжить по индукции. В результате получится плотная на K последовательность различных точек.

Пусть $\{\psi_i\}_{i=0}^\infty$ – система типа Фабера–Шаудера на $[0, 1]$ (см. [5, с. 226]), построенная по узлам (4), т.е. $\psi_n(x_i) = \delta^{in}$ (символ Кронекера), $i \leq n$, функции ψ_i непрерывны на $[0, 1]$ и линейны на всех интервалах $[0, 1] \setminus \{x_i\}_{i=0}^n$. Рассмотрим систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^\infty$, определенную на K следующим образом:

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_i(x) = \frac{\psi_i|_K}{|\psi_i|_K|_\omega}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Можно проверить, что $\varphi_i \in C_\omega^0(K)$, $i \geq 0$. Более того, $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^\infty$ – базис пространства $C_\omega^0(K)$, интерполирующий в узлах $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, монотонный в случае вогнутости $\omega(t)$ (см. [4]).

Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^\infty \in \ell_\infty$. Через $T_\omega(\xi)$ обозначим сумму равномерно сходящегося ряда $\sum_{i=0}^\infty \xi_i \varphi_i(x)$; сходимост следует из (1), условия нормировки $|\varphi_i|_\omega = 1$, $i \in \mathbb{N}$, и следующей леммы.

ЛЕММА. Если $\Delta_i^n \supset \Delta_j^{n+1} \supset \Delta_k^{n+2}$, то $\mu(\Delta_k^{n+2}) < \mu(\Delta_j^{n+1})$ и $\mu(\Delta_k^{n+2}) < \frac{1}{2}\mu(\Delta_i^n)$, где $\mu(\cdot)$ – длина соответствующего интервала.

ТЕОРЕМА. Пусть компакт $K \subset \mathbb{R}$, $\omega(t) \in \Omega^*$. Тогда оператор T_ω реализует совместный изоморфизм (3).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Линейность отображения T_ω очевидна, инъективность следует из условия $\varphi_i(x_j) = 0$, $i > j$. Ввиду эквивалентности норм $\|\cdot\|_\omega$ и $\|\cdot\|_0$, $\|f\|_0 = |f(0)| + |f|_\omega$, для доказательства ограниченности оператора T_ω достаточно проверить, что для всякой пары $x, y \in K$, $x \neq y$, имеет место

$$\frac{|T_\omega(\xi, x) - T_\omega(\xi, y)|}{\omega(|x - y|)} \leq (2C_1 + 5C_2 + 11)\|\xi\|_\infty, \quad \xi \in \ell_\infty. \quad (5)$$

Пусть $x_p, x_q \in \{x_i\}_{i=2}^\infty$, $\hat{p}(i)$ – порядковый номер интервала $\Delta_{\hat{p}(i)}^i$ i -го поколения такого, что $x_p \in \Delta_{\hat{p}(i)}^i$, $p \leq n_{i-1}$. Аналогично, если $q \leq n_{i-1}$, то $x_q \in \Delta_{\hat{q}(i)}^i$. Определим $k \geq 2$ так, чтобы число $k - 1$ было наибольшим, для которого $\hat{p}(k - 1) = \hat{q}(k - 1)$. Если $n_i < x_p \leq n_{i+1}$, то номер поколения $i + 1$ мы обозначим через P , и $Q := i + 1$, если $n_i < x_q \leq n_{i+1}$.

Элементы последовательности (4), последовательности $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ и системы $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ для удобства занумеруем двумя индексами. Верхний индекс будет показывать номер поколения данного элемента, нижний – порядковый номер в поколении: $x_0 = x_1^0$, $x_1 = x_1^1$, $x_2 = x_1^2$,

$$n_{k-1} < i \leq n_k \implies x_i = x_{i-n_{k-1}}^{n_k}, \quad \xi_i = \xi_{i-n_{k-1}}^{n_k}, \quad \varphi_i = \varphi_{i-n_{k-1}}^{n_k}.$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{|T_\omega(\xi, x_p) - T_\omega(\xi, x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)} &= \frac{1}{\omega(|x_p - x_q|)} \left| \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{p_{i-1}} \xi_j^i \varphi_j^i(x_p) - \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{p_{i-1}} \xi_j^i \varphi_j^i(x_q) \right| \\ &\leq \|\xi\|_\infty \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^{p_{i-1}} \frac{|\varphi_j^i(x_p) - \varphi_j^i(x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)} \\ &= \|\xi\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{p_{i-1}} \frac{|\varphi_j^i(x_p) - \varphi_j^i(x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)} + \frac{|\varphi_{\hat{p}(k-1)}^k(x_p) - \varphi_{\hat{p}(k-1)}^k(x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k+1}^P \frac{\varphi_{\hat{p}(i-1)}^i(x_p)}{\omega(|x_p - x_q|)} + \sum_{i=k+1}^Q \frac{\varphi_{\hat{p}(i-1)}^i(x_q)}{\omega(|x_p - x_q|)} \right) \\ &\leq \|\xi\|_\infty (C_2 + 1 + 2(5 + C_1 + C_2)). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно убедиться, что оценка (5) верна для всех $x, y \in \{x_i\}_{i=0}^\infty$. Из непрерывности функций $T_\omega(\xi, x)$, $x \in K$, и $\omega(x)$ (см. [3, с. 71]) и из плотности множества $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ в K следует справедливость оценки (5) для всех $x, y \in K$.

О сюръективности T_ω и непрерывности обратного. Известно, что система $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ является базисом банахова пространства непрерывных функций $C(K)$ (см. [2, с. 36–37]). Всякую $f \in C_\omega(K)$ можно единственным образом представить в виде равномерно сходящегося ряда:

$$f(x) = \sum_{i=0}^\infty \xi_i(f) \varphi_i(x) = T_\omega(\xi),$$

$\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов разложения. Рассуждая по аналогии с [3, с. 272], для линейной комбинации $g(x)$ функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ имеем

$$|g|_\omega = \max_{0 \leq p < q \leq n} \frac{|g(x_p) - g(x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)}.$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ найдется $j < n$ такое, что

$$\begin{aligned} |\xi_n| &= |\xi_n \varphi_n|_\omega = \frac{|\xi_n \varphi_n(x_n) - \xi_n \varphi_n(x_j)|}{\omega(|x_n - x_j|)} = \frac{1}{\omega(|x_n - x_j|)} \left| \sum_{i=n}^\infty \xi_i \varphi_i(x_n) - \sum_{i=n}^\infty \xi_i \varphi_i(x_j) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega(|x_n - x_j|)} \left(\left| \sum_{i=0}^\infty \xi_i \varphi_i(x_n) - \sum_{i=0}^\infty \xi_i \varphi_i(x_j) \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x_j) \right| \right) \\ &\leq \frac{|f(x_n) - f(x_j)|}{\omega(|x_n - x_j|)} + \max_{0 \leq p < q < n} \frac{1}{\omega(|x_p - x_q|)} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x_p) - \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x_q) \right| \\ &\leq |f|_\omega + \max_{0 \leq p < q < n} \frac{|f(x_p) - f(x_q)|}{\omega(|x_p - x_q|)} \leq 2|f|_\omega. \end{aligned}$$

И поскольку $|\xi_0| = |f(0)| \leq \|f\|_C$, то $\|T_\omega^{-1}\| \leq 2$. Следовательно, оператор T_ω является изоморфизмом пространств $C_\omega(K)$ и ℓ_∞ .

Сужение $T_\omega|_{c_0} : c_0 \rightarrow C_\omega^0(K)$ также является изоморфизмом, так как образом $T_\omega(e_i)$ симметрического базиса единичных векторов $e_i = \{\delta^{ij}\}_{j=0}^\infty$ пространства c_0 является базис $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ пространства $C_\omega^0(K)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\omega(t) \in \Omega^*$. Система $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ является симметрическим базисом банахова пространства $C_\omega^0(K)$, интерполирующим в узлах (4), монотонным в случае вогнутости функции $\omega(t)$.

Некоторые замечания. В [6] и ряде других работ методом разложения доказана совместная изоморфность (3) (без построения оператора) для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащего бесконечное число точек, $\omega(t) \in \Omega^*$.

Если $K = [0, 1]$, то построенные функции $\{\varphi_i\}_{i=0}^\infty$ суть система Фабера–Шаудера. В этом частном случае изоморфизм T_ω построил З. Чисельский [7] (см. также [8]).

Ни в предположении, ни в следствии к теореме требование вогнутости функции $\omega(t)$ нельзя заменить более слабым условием квазивогнутости ($\omega(t)$ и $t/\omega(t)$ не убывают).

Результат данного сообщения и некоторые близкие факты были сформулированы в [9]. В частности, если K – множество Кантора, удалось построить совместный изоморфизм (3), отказавшись от условия (2).

Вопрос о необходимости условий (1) и (2) для изоморфности (3), по-видимому, остается открытым.

Автор выражает признательность М. И. Кадецу и Б. С. Кашину за ценные библиографические советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Singer I. Bases in Banach Spaces. V. 1. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1970. 2. Se-madeni Z. Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions. Lecture Notes in Math. V. 918. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982. 3. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 4. Бычков А. Б. // Изв. вузов. Матем. 1998. № 3 (430). С. 3–9. 5. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 6. Frampton J., Tromba A. // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 336–342. 7. Ciesielski Z. // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 1960. № 4. P. 217–222. 8. Горячев А. П. // Математические методы исследования физических процессов. М., 1982. С. 14–22. 9. Бычков А. Б. // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов воронежской зимней математической школы. Воронеж: ВГУ, 1997. С. 35.

Ростовский государственный строительный университет

Поступило

13.05.96

Исправленный вариант

08.09.98