Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Мощевитина, О целых точках в многоугольниках, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 629–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:05:45

О ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Л. А. Мошевитина

1. Введение. Работа посвящена вопросу о распределении целых точек в многоугольниках. Пусть P – произвольный s -угольник на плоскости $\mathbb{R}^2$, $P + x$ – его сдвиг на вектор $x \in \mathbb{R}^2$, tP – его образ при гомотетии относительно начала координат с коэффициентом t , $S(P)$ – его площадь. Определим

$$R(P) = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\text{card}((P + x) \cap \mathbb{Z}^2) - S(P)|.$$

Представляет интерес асимптотическое поведение $R(tP)$ при $t \rightarrow \infty$. Хорошо известно [1]–[3], что для иррациональных многоугольников (т.е. таких, что угловые коэффициенты α_j , $j = 1, \dots, s$, прямых линий, задающих стороны, иррациональны) $R(tP) = o(t)$. Для многоугольников, у которых неполные частные разложения в цепную дробь угловых коэффициентов α_j , $j = 1, \dots, s$, ограничены в совокупности, известна (см., например, [3], [4]) оценка $R(tP) \ll \log t$, причем константа в знаке “ $\ll$ ” зависит только от s и максимума неполных частных для угловых коэффициентов. В общем случае этот результат неумлучшаем. Специальный случай, когда P является параллелограммом и неполные частные обоих угловых коэффициентов α_1, α_2 ограничены, рассматривался в [5], где получено уточнение оценки $R(tP) \ll \log t$ для некоторой последовательности значений $t_\nu \rightarrow \infty$.

Мы получим улучшение общего результата $R(tP) = o(t)$ для многоугольников с рационально зависимыми угловыми коэффициентами сторон. Возможность улучшения основана на качественном анализе двумерных совместных приближений Дирихле.

2. Уточнение теоремы Дирихле. Хорошо известная теорема Дирихле [6] в двумерном случае утверждает, что для двух вещественных чисел α_1 и α_2 , по крайней мере одно из которых иррационально, найдется бесконечно много целочисленных векторов (p, a_1, a_2) таких, что

$$|\alpha_j p - a_j| < p^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \quad \text{НОД}(p, a_1, a_2) = 1.$$

Мы уточним эту теорему на основе классического алгоритма вытягивания параллелепипедов (цепи Минковского–Вороного [7]–[9]). Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть действительные числа α_1, α_2 таковы, что их отношение α_1/α_2 иррационально. Тогда найдется бесконечная последовательность целочисленных векторов $(q_\nu, a_{1,\nu}, a_{2,\nu})$ таких, что

$$|\alpha_j q_\nu - a_{j,\nu}| < q_\nu^{-1/2}, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

$$\text{НОД}(q_\nu, a_{1,\nu}, a_{2,\nu}) = 1, \quad (2)$$

$$\text{НОД}(a_{1,\nu}, a_{2,\nu}) = d_\nu \ll q_\nu^{1/2}, \quad q \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Теорема 1 анонсирована автором на конференции [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, отнесенном к координатам (x, y_1, y_2) , определим параллелепипед $\Pi(q, \sigma)$, задаваемый соотношением

$$\Pi(q, \sigma) = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < q, |\alpha_j x - y_j| < \sigma\}, \quad \sigma < \frac{1}{2}.$$

Опишем алгоритмически процесс построения цепи параллелепипедов. Выберем параллелепипед Π_1 указанного вида такой, что в нем имеется ровно одна нетривиальная целая точка, причем она лежит на ребре грани $\{x = q_1\}$ параллелепипеда Π_1 . Обозначим эту точку $\zeta_1 = (q_1, a_{1,1}, a_{2,1})$. Дальнейшее построение проведем индуктивным образом. Пусть уже построены параллелепипеды $\Pi_\mu = \Pi(q_\mu, \sigma_\mu)$, $\mu = 1, \dots, \nu$, с нетривиальными целыми точками $\zeta_\mu = (q_\mu, a_{1,\mu}, a_{2,\mu})$, $\mu = 1, \dots, \nu$, лежащими на ребрах граней $\{x = q_\mu\}$ соответствующих параллелепипедов, причем

$$q_1 < q_2 < \dots < q_\nu, \quad \frac{1}{2} > \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\nu, \quad \Pi_\mu \cap \mathbb{Z}^3 = \{0, \zeta_\mu\}, \quad \mu = 1, \dots, \nu.$$

Построим параллелепипед $\Pi_{\nu+1}$. Будем рассматривать все параллелепипеды вида $\Pi(q, \sigma_\nu)$, где $q > q_\nu$. Определим $q_{\nu+1}$ как минимальное натуральное число такое, что $\Pi(q_{\nu+1}, \sigma_\nu)$ содержит кроме ζ_ν еще ровно одну нетривиальную целую точку $\zeta_{\nu+1} = (q_{\nu+1}, a_{1,\nu+1}, a_{2,\nu+1})$. Положим

$$\sigma_{\nu+1} = \max_{j=1,2} |\alpha_j q_{\nu+1} - a_{j,\nu+1}|, \quad \Pi_\nu^* = \Pi(q_{\nu+1}, \sigma_\nu), \quad \Pi_{\nu+1} = \Pi(q_{\nu+1}, \sigma_{\nu+1}).$$

Цепь построена.

Отметим, что строго внутри вспомогательного параллелепипеда Π_ν^* целых точек нет и, следовательно, применяя теорему Минковского о выпуклом теле, получаем неравенство $q_{\nu+1} \sigma_\nu^2 \leq 1$.

ЛЕММА 1. Существует бесконечно много пар точек $\zeta_\nu, \zeta_{\nu+1}$, которые при ортогональной проекции на координатную плоскость (y_1, y_2) не проецируются на одну прямую, проходящую через начало координат 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так, т.е. все точки ζ_ν , начиная с некоторого номера ν_0 , проецируются на одну прямую m , причем $0 \in m$. Это означает, что все точки ζ_ν , $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \dots$, и 0 лежат в одной плоскости π перпендикулярной координатной плоскости $0y_1y_2$. Очевидно, что общая ось параллелепипедов Π_ν , направляющий вектор которой имеет координаты $(1, \alpha_1, \alpha_2)$, также лежит в плоскости π . Но тогда вектор $(1, \alpha_1, \alpha_2)$ проецируется на прямую m и, таким образом, $a_{1,j}/a_{2,j} = \alpha_1/\alpha_2$, $j = \nu_0, \nu_0 + 1, \dots$. Последнее противоречит иррациональности отношения α_1/α_2 .

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть точки ζ_ν и $\zeta_{\nu+1}$ не проецируются на одну прямую, проходящую через начало координат 0. Тогда выполнено неравенство

$$d_{\nu+1} \ll q_{\nu+1}^{1/2}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекцию K вспомогательного параллелепипеда Π_ν^* на координатную плоскость $0y_1y_2$. Она представляет собой объединение всех квадратов со сторонами длины $2\sigma_\nu$ параллельными осям координат и с центрами на отрезке, соединяющем точки $(0, 0)$ и $(q_{\nu+1}\alpha_1, q_{\nu+1}\alpha_2)$. Очевидно, что для площади $S(K)$ проекции рассматриваемого параллелепипеда выполняется неравенство

$$S(K) \ll \sigma_\nu q_{\nu+1}. \quad (5)$$

Для получения оценки снизу для $S(K)$ рассмотрим треугольник T с вершинами $(0, 0)$, $(a_{1,\nu}, a_{2,\nu})$, $(a_{1,\nu+1}, a_{2,\nu+1})$, содержащийся в K . На стороне треугольника T , соединяющей вершины $(0, 0)$ и $(a_{1,\nu+1}, a_{2,\nu+1})$, лежат, кроме нуля, ровно $d_{\nu+1}$ целых точек. Следовательно, для его площади $S(T)$ выполняется неравенство

$$\frac{d_{\nu+1}}{2} < S(T) < S(K). \quad (6)$$

Объединяя (5), (6) и замечание, получаем (4).

Лемма доказана.

Из изложенного выше сразу вытекает утверждение теоремы. Соотношения (1), (2) выполняются в силу принадлежности точки ζ_ν грани $\{x = q_\nu\}$ параллелепипеда Π_ν . Соотношение (3) обеспечивается выбором точки $\zeta_{\nu+1}$ (лемма 1), для которой согласно лемме 2 выполняется неравенство (4).

3. Целые точки в многоугольниках. Будем говорить, что $2s$ чисел $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}$ обладают D -свойством, если существует бесконечно много примитивных целочисленных наборов $p, a_{1,j}, a_{2,j}$, $j = 1, \dots, s$, таких, что

$$\begin{aligned} |p\alpha_{1,j} - a_{1,j}| &< C_1(\alpha)p^{-\rho}, \quad \rho > 0, \\ \text{НОД}(a_{1,j}, a_{2,j}) &= d_j < C_2(\alpha)p^\gamma, \quad \gamma < 1. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть s -угольник P таков, что для координат векторов $(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j})$, $j = 1, \dots, s$, его сторон выполнено D -свойство с некоторыми ρ, γ . Тогда существует последовательность $t_\nu \rightarrow \infty$ такая, что $R(tP) \ll t^{1-\varkappa}$ с $\varkappa = \min\{\rho, 1 - \gamma\} \in (0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на следующей известной лемме (см. [11], [3]).

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha_j = \alpha_{1,j}/\alpha_{2,j}$, $j = 1, \dots, s$. Тогда выполняется неравенство

$$|R(tP)| \ll \sum_{j=1}^s \left| \sum_n \left(\{\alpha_j n + \delta_j\} - \frac{1}{2} \right) \right| + O(k),$$

где δ_j — некоторые действительные числа, k — число целых точек на границе tP и суммирование ведется в пределах $z_j < n \leq t\alpha_{1,j} + z_j$, причем z_j — координата проекции j -й вершины многоугольника tP на ось y_1 .

Предложение вытекает из леммы 3, если положить $t = p$ для некоторого p из D -свойства. Иррациональность отношения α_j обеспечивает то, что $k = O(s)$. Каждая сумма

$$\sum_n \left(\{\alpha_j n + \delta_j\} - \frac{1}{2} \right)$$

приводится к виду

$$\sum_n \left(\left\{ \frac{n}{a_{1,j}^*} + O(p^{-\varkappa}) \right\} - \frac{1}{2} \right),$$

где $a_{1,j}^* = a_{1,j}/d_j$. Если $0 < n/a_{1,j}^* + O(p^{-\varkappa}) < 1/2$, то знак дробной доли $\{\cdot\}$ можно отбросить, а сумма по остальным n дает вклад $dO(p^{1-\varkappa}/d) = O(p^{1-\varkappa})$. В итоге $|R(tP)| = O(p^{1-\varkappa} + p^\gamma)$, и предложение доказано.

Назовем две пары вещественных чисел (α_1, α_2) и (β_1, β_2) рационально зависимыми, если $\alpha_1 = \lambda_1\beta_1$, $\alpha_2 = \lambda_2\beta_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$.

Из теоремы 1 вытекает, что если все векторы $(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j})$ сторон многоугольника P попарно рационально зависимы, то D -свойство выполнено с $\gamma = 1/2$, $\rho = 1/2$. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть векторы сторон многоугольника P рационально зависимы (в определенном выше смысле) и $\alpha_{1,1}/\alpha_{1,2} \notin \mathbb{Q}$. Тогда для некоторой последовательности $t_\nu \rightarrow +\infty$ выполнено $R(t_\nu P) \ll t_\nu^{1/2}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1922. V. 1. P. 212–249.
2. Khintchine A. // Math. Z. 1923. V. 18. № 3–4. P. 289–306.
3. Скриганов М. М. // Алгебра и анализ. 1989. Т. 16. № 2. С. 207–228.
4. Skriganov M. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1993. V. 43. № 2. P. 313–323.
5. Рузимурадов Х. Х. // Аналитическая теория чисел и теория функций. Вып. 11. Зап. научных семин. ПОМИ. 1993. Т. 204. С. 82–89.
6. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
7. Minkovski H. // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1896. V. 13. P. 41–60.
8. Вороной Г. Ф. // Избранные труды. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 197–391.
9. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
10. Мощевитина Л. А. // Конференция “Современные проблемы теории чисел и ее приложения” (Тула 9–14 сентября, 1996). Тезисы докл. Тула, 1996. С. 103.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.