Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Проективные коники и M -квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:06:51

ПРОЕКТИВНЫЕ КОНИКИ И M -КВИНТИКИ В ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ С МАКСИМАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮЩЕЙСЯ ПАРОЙ ОВАЛОВ

С. Ю. Оревков

В настоящей работе продолжается исследование плоских вещественных приводимых кривых степени 7, начатое в [1]–[3]; дается изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. Мы используем те же методы, что и в [4], [3]. При этом, как оказалось, случай коники и квинтики более “регулярен”, чем случай кубики и квартики: все запреты удастся доказать по одной схеме, то же относится и к построениям. Мы придерживаемся тех же обозначений, что и в [3], и часто будем опускать подробности, которые можно найти в [3].

1. Формулировка результата. Далее C_n есть множество вещественных точек M -кривой степени n на $\mathbb{RP}^2$. Напомним, что M -квинтика C_5 состоит из семи гладких окружностей. Среди них шесть *овалов* (изотопных конике), расположенных вне друг друга, и одна *нечетная ветвь* J_5 (изотопная прямой). Всюду в данной работе мы предполагаем, что один из овалов M -квинтики C_5 (обозначим его через O_5) имеет десять различных точек пересечения с коникой C_2 . Тогда по теореме Безу все пересечения должны быть трансверсальными, а остальные пять овалов не могут пересекаться с C_2 , эти овалы мы будем называть *свободными*.

Выбирая различными способами две точки в разных компонентах $\mathbb{RP}^2 \setminus (C_2 \cup C_5)$ и учитывая, что проходящая через эти точки прямая не может пересекать C_n более чем в n точках, несложно проверить (см. [1], [2]), что с точностью до изотопии C_5 должна быть расположена относительно C_2 одним из десяти способов, изображенных на рис. 1, где нечетная ветвь J_5 не нарисована и α, β – априори произвольные неотрицательные целые числа такие, что $\alpha + \beta = 5$ (это количества свободных овалов в соответствующих областях).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00794.

Рис. 1

Цель настоящей статьи – доказать, что реализуемы те и только те расположения, которые отвечают значениям α , перечисленным на рис. 1.

2. Построения. По аналогии с [3] расположения C_5 относительно C_2 (удовлетворяющие условиям, перечисленным в п. 1) мы будем кодировать следующим образом. Словом $w = \langle s_1 \dots s_n \rangle$, $s_k \in \{+, -\}$, будем кодировать расположение O_5 относительно C_2 , составленное из блоков $B(s_1), \dots, B(s_n)$ в соответствии с рис. 2а; блоки $B(+)$ и $B(-)$ изображены на рис. 2б. Параметр α будем указывать в фигурных скобках после слова w .

Рис. 2

Все реализуемые расположения строятся сглаживанием подходящих особых кривых. Обозначим через $2n\{\alpha\}$, $n = 0, 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, расположение особой трехкомпонентной квинтики относительно коники C_2 , изображенное на рис. 2в: квинтика имеет две особые точки типов A_{2n} , A_{8-2n} (по соглашению A_0 – гладкая точка), лежащие на одной четной ветви, и свободный овал квинтики расположен внутри C_2 при $\alpha = 1$ и снаружи при $\alpha = 0$.

ЛЕММА. Все шесть расположений $2n\{\alpha\}$, $n = 0, 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, реализуемы алгебраическими кривыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кривая C в точке p неособа и не имеет перегиба. Обозначим через $f_{C,p}$ квадратичное бирациональное преобразование $(u, v) \mapsto (u, v - u^2)$, где (u, v) – аффинная карта, в которой бесконечно удаленная прямая касается C в точке p , причем C имеет возле p разложение $v = u^2 + O(u)$, $u \rightarrow \infty$.

Рис. 3

$0\{\alpha\}$ и $2\{\alpha\}$. Пусть $Q := L^2 L_0^2 + \varepsilon l_1 l_2 l_3 l_4$, $|\varepsilon| \ll 1$, – каспидальная трехкомпонентная кватрика и p, q – ее точки касания с двумя из прямых l_i (см. рис. 3а, 3б). Тогда $f_{Q,p}(Q) \cup f_{Q,p}(L)$ реализует расположение $0\{1\}$ в случае рис. 3а и $0\{0\}$ в случае рис. 3б, а $f_{Q,q}(Q) \cup f_{Q,q}(L)$ реализует расположение $2\{0\}$ в случае рис. 3а и $2\{1\}$ в случае рис. 3б.

$4\{\alpha\}$. Пусть C – каспидальная кубика, расположенная относительно координатных осей, как показано на рис. 3в, 3г, и $Q := xC + \varepsilon yzL^2$ – каспидальная кватрика. Пусть hy – гиперболизм, т.е. бирациональное преобразование $hy(x : y : z) = (x^2 : xy : yz)$. Тогда $hy(Q) \cup hy(L)$ реализует расположение $4\{1\}$ в случае рис. 3в и $4\{0\}$ в случае рис. 3г.

В [3] показано, что для любого выбора знаков $s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_{4-n}$ существует возмущение кривой $2n\{\alpha\}$ вида $\langle s_1 \dots s_n s'_{4-n} \dots s'_1 \rangle \{\alpha + \alpha_0\}$, где α_0 – число плюсов в последовательности $-s_1, s_2, \dots, (-1)^n s_n, (-1)^n s'_{4-n}, \dots, s'_2, -s'_1$. Несложно проверить, что это дает все расположения на рис. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Четыре расположения $\langle +++++ \rangle \{\alpha\} \langle ---- \rangle \{\alpha + 1\}$, $\alpha = 2, 3$, можно построить элементарно: надо в качестве C_5 взять подходящее возмущение двух коник (одна из них будет C_2) и прямой.

3. Запреты. Не реализованные выше значения α для случая $\langle +++++ \rangle$ запрещены методом комплексных ориентаций [1, VII] (см. также [3, 3.1]). Во всех других случаях найдется точка p , лежащая в области α в выпуклой оболочке овала O_5 и, следовательно, вне свободных овалов квинтики (ср. с проекцией III в [3, 3.2.4]). Выберем аффинные координаты (x, y) , в которых p – бесконечно удаленная точка прямых $x = \text{const}$ и бесконечно удаленная прямая в пяти точках пересекает O_5 . Тогда C_2 , O_5 и J_5 расположены относительно этих координат, как показано на рис. 4, где блоки $B(s_i)$ те же, что и на рис. 2б.

Рис. 4

Поскольку вертикальная прямая не может пересекать C_5 более чем в пяти точках, свободные овалы квинтики должны лежать в полосе между вертикальными касательными к O_5 (обозначим

ее через D). Пусть D_4, D_5, D_6 – три верхние компоненты связности множества $D \setminus (C_2 \cup O_5)$ (см. рис. 4). Тогда α овалов лежат в D_6 и β овалов – в $D_5 \cup D_4$. Занумеруем свободные овалы квинтики слева направо, и пусть D_{i_j} – полоса, в которой лежит j -й овал, $j = 1, \dots, 5$. Положим $\delta\alpha = \sum_{i_j=6} (-1)^j$, $\delta\beta_k = \sum_{i_j=6-k} (-1)^j$, $k = 1, 2$.

Из формулы комплексных ориентаций для C_5 (см. [5]) и теоремы Фидлера о чередовании ориентаций [6] следует, что

$$\delta\alpha + \delta\beta_1 - \delta\beta_2 = 0. \quad (1)$$

Выберем комплексные ориентации на C_2 и C_5 так, чтобы C_2 и O_5 были ориентированы противоположно относительно J_5 . Пусть F – кривая степени 7, получающаяся из $C_2 \cup C_5$ сглаживанием двойных точек в соответствии с выбранными ориентациями (изображена пунктиром на рис. 4). Тогда число овалов кривой F равно $2P + 7$, где P – число плюсов в слове $\langle s_1 s_2 s_3 s_4 \rangle$, кодирующем рассматриваемое расположение $C_2 \cup O_5$. Поэтому формула комплексных ориентаций для F дает

$$\varepsilon((1 + 2\varepsilon)\delta\alpha + \delta\beta_1 - \delta\beta_2) = 2P - 5, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ – знак овала O_5 относительно нечетной ветви J_5 . Добавляя к (1), (2) очевидное соотношение $\delta\alpha + \delta\beta_1 + \delta\beta_2 = -1$ и решая получившуюся систему уравнений, находим

$$\delta\alpha = q - 2, \quad \delta\beta_1 = 1 - q, \quad \delta\beta_2 = 0, \quad \text{где } q = P + \frac{\varepsilon - 1}{2}. \quad (3)$$

Для расположений $\langle s_1 s_2 s_3 s_4 \rangle \{\alpha\}$, не реализованных в п. 2, все наборы чисел $i_1, \dots, i_5$, для которых существует $\varepsilon = \pm 1$, при котором выполнены соотношения (3), таковы (последней колонке этой таблицы отвечают расположения, запрещенные в [1, VII] методом комплексных ориентаций; в частности, мы видим, что в [1] на рис. 16 была опечатка: вместо $\alpha \neq 2$ для пятой модели должно быть $\alpha \neq 5$ для второй модели):

$\langle -+++ \rangle \{0\}$	$\langle -++- \rangle \{1\}$	$\langle -+-+ \rangle \{0\}$	$\langle +--+ \rangle \{4\}$	$\langle +++- \rangle \{5\}$	$\langle ++++ \rangle \{0\}$
$\langle --++ \rangle \{0\}$				$\langle +--+ \rangle \{5\}$	$\langle ++++ \rangle \{4\}$
				$\langle +--- \rangle \{5\}$	$\langle ++++ \rangle \{5\}$
44445	44446				$\langle ++++ \rangle \{5\}$
44544	44556				$\langle ++-+ \rangle \{5\}$
44555	44644				$\langle +--- \rangle \{0\}$
45545	44655				$\langle -+-- \rangle \{0\}$
54444	45546	44445			$\langle ---- \rangle \{0\}$
54455	45645	44544			$\langle ---- \rangle \{1\}$
54554	54456	44555			$\langle ---- \rangle \{5\}$
55445	55446	45545			
55544	55556	54455	56666		нет
55555	55655	55555	66566	66666	решений

(в столбцах 2–4 учтена симметричность слов $\langle -++- \rangle$, $\langle +--+ \rangle$). Проверяя для каждого из перечисленных 41 случаев неравенство Мурасуги–Тристрама так, как это было сделано в [3], убеждаемся, что все они нереализуемы.

Автор благодарит Г. М. Полотовского за полезные обсуждения. Автор выражает признательность Математическому институту им. Макса Планка за гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polotovskii G.M. // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1524. P. 52–74. 2. Polotovskii G.M. On the classification of decomposable 7th degree curves // Contemp. Math. 1999. (to appear). 3. Оревков С. Ю., Полотовский Г. М. Проективные M -кубики и M -квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов // Алгебра и анализ. (в печати). 4. Orevkov S.Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curves // Topology. (to appear). 5. Рохлин В. А. // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 77–89. 6. Фидлер Т. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. С. 853–863.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: orevkov@mi.ras.ru

Поступило

02.11.98