Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Попов, То-
пологический критерий почти-ортодополняемости любого
функционала на $\ell_2(C(X))$, *Матем. заметки*, 1999, том 65,
выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1094>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:47:13

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПОЧТИ-ОРТОДОПОЛНЯЕМОСТИ ЛЮБОГО ФУНКЦИОНАЛА НА $\ell_2(C(X))$

П. С. Попов

1. Введение. Одной из задач K -теории является рассмотрение свойства стягиваемости полной линейной группы операторов над C^* -гильбертовым модулем (см. [1]). Изложение теории C^* -гильбертовых модулей можно найти в [2]. Первый результат в этом направлении был получен еще в работе Диксмье и Дуади [3], где стягиваемость доказывается для группы операторов гильбертова пространства. Однако, общая теория не построена до сих пор. В работе [4] сформулированы условия (см. ниже определения 1, 2), достаточные для стягиваемости $GL(\ell_2(A))$. В случае комплексного гильбертова пространства они сводятся к теореме Рисса и возможности найти для любого вектора ортогональный. В работе исследуется только коммутативный случай $A = C(X)$, где X – отделимый компакт. В этом случае дана переформулировка (определения 3, 4) исходных условий, доказана их эквивалентность (теорема 1) и приведен контрпример (теорема 2). Основным результатом является критерий (теорема 4) выполнения этих условий – свойство типа отрицания сильной бесконечномерности. В частности, компакты, представимые в виде счетного объединения конечномерных, удовлетворяют предложенным условиям.

2. Основная часть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что алгебра с единицей A обладает свойством K , если для любого функционала $v \in \mathbb{H}'_A \equiv \ell_2(A)'$ и любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $h_\varepsilon \in \mathbb{H}_A \equiv \ell_2(A)$ такой, что $|\langle v, h_\varepsilon \rangle| < \varepsilon$ и $\langle h_\varepsilon, h_\varepsilon \rangle \geq 1$, где угловые скобки означают как скалярное произведение в $\mathbb{H}_A$, так и применение функционала к вектору.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что A обладает свойством E , если для любого функционала $v = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in \mathbb{H}'_A$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти функционал $g = (g_1, \dots, g_n, \dots) \in \mathbb{H}'_A$ и число $k \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\|f - g\| < \varepsilon, \quad f_i = g_i, \quad i = k + 1, k + 2, \dots,$$

и $g|_{L_k}: L_k \rightarrow A$ является эпиморфизмом, где $L_n = \{(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)\}$.

Следующие два утверждения дают топологическую характеристику модулей $\mathbb{H}_A$ и $\mathbb{H}'_A$ (доказательство см. в [5]). Всюду далее $A \equiv C(X)$, где X является отделимым компактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пространство $C(X, (\ell_2(\mathbb{C}), \text{strong}))$ – множество всех непрерывных отображений из хаусдорфова компакта в гильбертово комплексное пространство с топологией нормы, – будучи снабжено $C(X)$ -линейным скалярным произведением $\langle v, u \rangle(x) = \langle v(x), u(x) \rangle_{\ell_2}$, изоморфно модулю $\mathbb{H}_A$.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS, грант № 96-1099.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пространство $C(X, (\ell_2(\mathbb{C}), \text{weak}))$ – множество всех непрерывных отображений из хаусдорфова компакта в комплексное гильбертово пространство со слабой топологией (иными словами, множество всех покоординатно непрерывных и равномерно ограниченных по норме отображений), – изоморфно модулю $\mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$. При фиксированном изоморфизме из предложения 1 действие $v \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$ на $u \in \mathbb{H}_{\mathbb{A}}$ задается формулой $\langle v, u \rangle(x) = \langle v(x), u(x) \rangle_{\ell_2}$.*

Теперь мы можем переформулировать свойства K, E для коммутативного случая. Предварительно введем пространство $\mathbb{H}_w \subset \mathbb{H}_{\mathbb{A}} \subset \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$. Определим его как $\mathbb{H}_w = \{v \in \mathbb{H}_{\mathbb{A}} : P_n(v(x)) \equiv v(x) \text{ для некоторого } n\}$, где P_n – проектор в ℓ_2 на первые n базисных векторов. Кроме того, нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Пусть $u \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$, причем $\|u(x)\| > \beta$ для любого $x \in X$. Тогда для любой константы $\alpha < \beta$ существует число n такое, что $\|P_n u(x)\| > \alpha$ всюду на компакте.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $X_i = \{x \in X : \|P_n u(x)\| > \alpha\}$. Эти множества открыты, вложены и образуют покрытие, так как для любого x существует число n такое, что $\|P_n(u(x))\| > \alpha$. Выберем конечное подпокрытие, максимальный номер элементов подпокрытия даст нам число n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Компакт X обладает свойством K , если для любого функционала $v \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $h_{\varepsilon} \in \mathbb{H}_{\mathbb{A}}$ такой, что всюду на X выполнено

$$\|h_{\varepsilon}(x)\| \geq 1, \quad |\langle h_{\varepsilon}(x), v(x) \rangle| < \varepsilon.$$

Заметим, что вместо условия $h_{\varepsilon} \in \mathbb{H}_{\mathbb{A}}$ мы можем потребовать формально более сильное $h_{\varepsilon} \in \mathbb{H}_w$ или формально более слабое $h_{\varepsilon} \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$. Однако, все три условия оказываются эквивалентными: достаточно к $h_{\varepsilon/2}$ применить результат леммы 1 с константой $\alpha = 1/2$. Кроме того, нормировкой можно добиться, чтобы $\|h_{\varepsilon}(x)\| \equiv 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Компакт X обладает свойством E , если для любого функционала $v \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют элемент $v_{\varepsilon} \in \mathbb{H}_{\mathbb{A}}$ и число $n \in \mathbb{Z}$ такие, что всюду на X выполнено

$$\|v_{\varepsilon}(x) - v(x)\| \leq \varepsilon, \quad (1 - P_n)(v_{\varepsilon}(x) - v(x)) = 0, \quad P_n v_{\varepsilon}(x) \neq 0.$$

Заметим, что E не зависит от выбора в качестве основного для ℓ_2 поля $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, так как отображение $\Theta: \ell_2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{R})$, определенное как $\Theta(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\text{Im } x_1, \text{Re } x_1, \dots, \text{Im } x_n, \text{Re } x_n, \dots)$, сохраняет норму и слабую топологию.

ТЕОРЕМА 1. *Свойства E и K эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем импликацию $K \implies E$. Пусть для данных v и $\varepsilon/2$ выполнено свойство K : всюду на компакте $\|h_{\varepsilon/2}(x)\| = 1$ и $|\langle h_{\varepsilon/2}(x), v(x) \rangle| \leq \varepsilon/2$. Как было замечено, можно считать, что существует число n такое, что $P_n h_{\varepsilon/2}(x) \equiv h_{\varepsilon/2}(x)$. Положим $v_{\varepsilon}(x) := v(x) + \varepsilon h_{\varepsilon/2}(x)$. Тогда всюду на компакте $\|v_{\varepsilon}(x) - v(x)\| = \varepsilon$ и $P_n(v_{\varepsilon}(x) - v(x)) = v_{\varepsilon}(x) - v(x)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$|\langle P_n v_{\varepsilon}(x), h_{\varepsilon/2}(x) \rangle| = |\langle v_{\varepsilon}(x), h_{\varepsilon/2}(x) \rangle| = |\langle v(x), h_{\varepsilon/2}(x) \rangle + \varepsilon \|h_{\varepsilon/2}(x)\|^2| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Скалярное произведение отлично от 0 всюду на компакте. Следовательно, отображение $P_n v_{\varepsilon}(x)$ отлично от 0 для любого $x \in X$.

Докажем импликацию $E \implies K$. Пусть для данных v и $\varepsilon/2$ выполнено свойство E : всюду на компакте

$$\|v_{\varepsilon}(x) - v(x)\| \leq \varepsilon, \quad (1 - P_n)(v_{\varepsilon}(x) - v(x)) = 0, \quad P_n v_{\varepsilon}(x) \neq 0.$$

Рассмотрим вектор $P_{2n} v_{\varepsilon}(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_{2n-1}(x), g_{2n}(x), 0, \dots) \neq 0$. Положим

$$h_{\varepsilon}(x) := \frac{(-g_{2n}^*(x), g_1^*(x), \dots, -g_{2n}^*(x), g_{2n-1}^*(x), 0, \dots)}{\|P_{2n} v_{\varepsilon}(x)\|},$$

где норма в знаменателе непрерывна и отлична от 0. Тогда $\|h_\varepsilon(x)\| = 1$ для любого $x \in X$ и, поскольку $\langle h_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x) \rangle \equiv 0$,

$$|\langle h_\varepsilon(x), v(x) \rangle| \leq |\langle h_\varepsilon(x), v(x) - v_\varepsilon(x) \rangle| + |\langle h_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x) \rangle| \leq \|h_\varepsilon(x)\| \cdot \|v_\varepsilon(x) - v(x)\| + 0 \leq \varepsilon.$$

Заметим, что последнее доказательство годится как в комплексном, так и в действительном случае, т.е. K также не зависит от выбора в качестве основного для ℓ_2 поля $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Этим фактом мы будем пользоваться при доказательстве теоремы о “плохом компакте”. Теорема доказана.

Пусть далее $B^\infty \equiv (B(0, 1) \in \ell_2(\mathbb{R}), \text{weak})$ – шар в $\ell_2(\mathbb{R})$, снабженный слабой топологией. В следующей теореме доказано, что $C(B^\infty)$ не удовлетворяет свойствам K, E . Заметим, что это следует из теоремы 4 (см. ниже) и теорем Брауэра, однако будет представлено доказательство несколько более сильного факта.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \equiv B^\infty$, $v = \text{Id}|_{B^\infty}$. Тогда свойство K не выполнено для v . Более того, для любого $\varepsilon < 1$ и любого $h \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$, всюду большего по норме 1, существует точка $x^0 \in B^\infty$ такая, что $|\langle h(x^0), x^0 \rangle| > \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть для $\varepsilon < 1$ существует $h_\varepsilon \in \mathbb{H}'_{\mathbb{A}}$ такой, что $|\langle h_\varepsilon(x), x \rangle| < \varepsilon$ и $\|h_\varepsilon(x)\| > 1$ для любого $x \in B^\infty$. Тогда по лемме 1 существует число n такое, что $P_{2n+1}h(x) > \varepsilon$ всюду на B^∞ . Рассмотрим сферу S^{2n} , вложенную в $\text{Span}(e_1, \dots, e_{2n+1})$. Тогда для любого $y \in S^{2n}$ вектор $P_{2n+1}h_\varepsilon(y)$ не параллелен y , ибо если они параллельны в точке y_0 , то

$$\varepsilon > |\langle P_{2n+1}h_\varepsilon(y_0), y_0 \rangle| = \|y_0\| \cdot \|P_{2n+1}h_\varepsilon(y)\| > \varepsilon.$$

Проекция $P_{2n+1}h_\varepsilon(x)$ на $T_x S^{2n}$ – непрерывное поле, не обращающееся в 0. Получили противоречие. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X = \bigcup_{i=0}^\infty X_i$, X_i обладает свойствами K, E . Тогда X обладает свойствами K, E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем ℓ_2 в прямую сумму гильбертовых пространств $\ell_2 = \bigoplus_{i=0}^\infty \ell_2^i$ и $v(x) = \bigoplus_{i=0}^\infty v^i(x)$. Так как X_i обладает свойством K , существует отображение $h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i: X_i \rightarrow \ell_2^i$ такое, что для любого $x \in X_i$ выполнено

$$\|h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x)\| > 1, \quad |\langle h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x), v^i(x) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+4}}, \quad P_{n_i} h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x) = h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x).$$

Продолжим n_i координатных функций на весь компакт X . Тогда существует окрестность $W(X_i)$ такая, что $\|h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x)\| > 1/2$ и $|\langle h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x), v^i(x) \rangle| \leq \varepsilon/2^{i+3}$. Рассмотрим окрестность $V(X_i)$, содержащую X_i и содержащуюся в $W(X_i)$, и функцию $\tau(x)$ такую, что $\text{Supp}(\tau) \in W(X_i)$, $\tau(x)|_{V(X_i)} = 1$. Тогда для $h^i(x) := 2\tau(x)h_{\varepsilon/2^{i+4}}^i(x)$ выполнено

$$|\langle h^i(x), v^i(x) \rangle| < \varepsilon/2^{i+2} \quad \text{всюду на } X, \quad \|h^i(x)\| > 1 \quad \text{для всех } x \in V(X_i).$$

Выберем из $V(X_i)$ конечное подпокрытие $X = \bigcup_{j \in \psi} V(X_j)$. Введем функцию

$$h_\varepsilon(x) = \bigoplus_{j \in \psi} h^j(x).$$

Легко видеть, что эта функция всюду больше по норме 1 (так как $V(X_j)$, $j \in \psi$, образуют покрытие), и выполнено неравенство

$$|\langle v(x), h^i(x) \rangle| \leq \varepsilon \sum_{j \in \psi} \frac{1}{2^{j+2}} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

3. ℓ_2 -несущественные отображения. Скажем, что отображение $f: X \rightarrow B^n = B(0, 1) \in \mathbb{R}^n$ *n-существенно*, если для любого отображения $g: X \rightarrow B^n$ такого, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in f^{-1}(\delta B^n = S^{n-1})$, точка $O = (0, \dots, 0)$ лежит в образе g . Как показано в [6], требование *n-несущественности* *любого* отображения эквивалентно неравенству $\text{Dim } X < n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $f: K \rightarrow B^\infty = (B(0, 1) \in \ell_2, \text{weak})$ называется *ℓ_2 -существенным*, если для любого n отображение $P_n f \rightarrow B^n$ *n-существенно*. Компакт называется *ℓ_2 -несущественным*, если любое его отображение в B^∞ не является ℓ_2 -существенным. Заметим, что конечномерные компакты удовлетворяют этому свойству.

Предложенное выше свойство сходно со свойством *существенности* отображения в гильбертов кирпич (B^∞ в данном выше определении заменяется на гильбертов кирпич). Это свойство (см. [6]) играет важную роль в теории бесконечномерных пространств. Вопрос о взаимосвязи этих двух определений открыт. Нашей целью является доказательство эквивалентности определения 5 свойствам K, E . Откуда следует выполнение этих свойств как для конечномерных компактов, так и (применяя теорему 3) для компактов, представимых в виде объединения таковых.

ЛЕММА 2. *Существует ретракция $\text{Ret}: \ell_2 \rightarrow B^\infty$ непрерывная в слабой топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Построение.* Определим функцию $t(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$t(x, y) := \begin{cases} y, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ \text{sgn}(y)\sqrt{1-x^2}, & \text{если } x^2 \leq 1 \text{ и } x^2 + y^2 \geq 1, \\ 0, & \text{если } x^2 \geq 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $t(x, y)$ непрерывна. Определим $\text{Ret}(\gamma)$ на $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots)$:

$$\begin{aligned} \text{Ret}(\gamma)_1 &:= t(0, \gamma_1), \quad \text{Ret}(\gamma)_2 := t(|\gamma_1|, \gamma_2) = t(\|P_1 \gamma\|, \gamma_2), \quad \dots, \\ \text{Ret}(\gamma)_n &:= t(\|P_{n-1} \gamma\|, \gamma_n), \quad \dots \end{aligned}$$

Для векторов γ из ℓ_2 по норме ≤ 1 эта функция тождественная. Рассмотрим $\text{Ret}(\gamma)$, где $\|\gamma\| > 1$. Пусть $n_{\min} = \min(n : \|P_n \gamma\| > 1)$. Тогда утверждается, что $\text{Ret}(\gamma)$ представима в виде

$$\text{Ret}(\gamma) = P_{n_{\min}-1} \gamma + e_{n_{\min}} \text{sgn}(\gamma_{n_{\min}}) \sqrt{1 - \|P_{n_{\min}-1} \gamma\|^2}.$$

Легко видеть, что $\|\text{Ret}(\gamma)\| = 1$. Функция Ret является ретракцией в теоретико-множественном смысле. Нам необходимо доказать непрерывность. Она следует из ограниченности по норме и по координатной непрерывности, которая вытекает из непрерывности t и $\|P_n(\gamma)\|$. Построение завершено.

ТЕОРЕМА 4. *Свойства K, E и ℓ_2 -несущественности эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что из ℓ_2 -несущественности следует свойство E . Фиксируем $v: X \rightarrow \ell_2$ и $\varepsilon > 0$. Отображение $f_\varepsilon = \text{Ret}(v/\varepsilon)$ несущественно. Существуют целое n и отображение $g: X \rightarrow B^n$ такие, что $g(x) = P_n f_\varepsilon(x)$ для всех $x \in (P_n f_\varepsilon)^{-1}(S^{n-1})$ и всюду $g(x) \neq 0$. Положим $v_\varepsilon(x) := \varepsilon(g(x) - P_n f_\varepsilon(x)) + v(x)$. Очевидно, что $P_n(v_\varepsilon - v) \equiv 0$ и, кроме того, для любого $x \in X$ выполнено

$$\|v(x) - v_\varepsilon(x)\| = \varepsilon \|g(x) - P_n f_\varepsilon(x)\| \leq 2\varepsilon.$$

Для выполнения свойства E с константой 2ε необходимо доказать, что $P_n v_\varepsilon(x) \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Если $\|P_n v(y)\| \geq \varepsilon$, то, как следует из построения функции Ret , выполнено $\|P_n f_\varepsilon(y)\| = 1$. Значит, $g(y) = P_n f_\varepsilon(y)$. Тогда $P_n v_\varepsilon(y) = P_n v(y) \neq 0$.

Если же $\|P_n v(y)\| < \varepsilon$, то $P_n v_\varepsilon(y) = \varepsilon g(y) + P_n v(y) - \varepsilon P_n \text{Ret}(v(x)/\varepsilon) = \varepsilon g(y) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Докажем, что из свойства E следует ℓ_2 -несущественность. Для фиксированного $v: X \rightarrow B^\infty$ и $\varepsilon = 1/7$ существует отображение $h: X \rightarrow B^\infty$ такое, что $\|h(x)\| = 1$, $|\langle h(x), v(x) \rangle| \leq 1/7$ и $P_n h(x) = h(x)$ всюду на X .

Рассмотрим непрерывную функцию $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что

$$\text{Supp}(\tau) \in [-2/3, 2/3], \quad \tau|_{[-1/3, 1/3]} = 1.$$

Утверждается, что отображение

$$g(x) := P_n v(x) + \frac{1}{6} \tau(\|P_n v(x)\|) h(x)$$

обеспечивает несущественность $v(x)$ в размерности n . Действительно, $g(x)$ совпадает с $P_n v(x)$ на $\{x : \|P_n v(x)\| = 1\}$ и $g(x)$, как будет доказано ниже, не принимает значение 0. Рассмотрим два случая.

Если $\|P_n v(x)\| \geq 1/3$, то $\|g(x)\| \geq 1/3 - 1/6 > 0$.

Если $\|P_n v(x)\| \leq 1/3$, то $g(x) \neq 0$. Поскольку если существует точка x_0 такая, что $g(x_0) = 0$, то $P_n v(x_0) = -h(x_0)/6$. Умножим скалярно обе части равенства на $h(x_0)$, получим противоречие: $1/7 \geq |\langle h(x_0), v(x_0) \rangle| = 1/6$. Итак, отображение f является ℓ_2 -несущественным. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность В. М. Мануйлову, А. С. Мищенко и Е. В. Троицкому за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Троицкий Е. В. // Функцион. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 4. С. 58–64.
2. Lance E. C. Hilbert C^* -Modules – a Toolkit for Operator Algebraists. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 210. Cambridge: Univ. Press, 1995.
3. Dixmier J., Douady A. // Bull. Soc. Math. France. 1963. V. 91. P. 227–284.
4. Троицкий Е. В. // Труды международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, посвященной 75-летию члена-корр. РАН профессора Л. Д. Кудрявцева. Москва, 1998. С. 63.
5. Frank M. // Ann. Global Anal. Geom. 1985. V. 3. № 2. P. 155–171.
6. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерностей. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерностей. М.: Наука, 1973.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
06.10.98