Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 4, 588–602

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:13:23

Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции

Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров

Для произвольной субгармонической функции, не равной тождественно $-\infty$ в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, доказано существование ненулевой голоморфной функции в D , логарифм модуля которой мажорируется локальными усреднениями субгармонической функции с некоторыми логарифмическими добавками или даже без них в случае $D = \mathbb{C}$.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10953

1. Введение

1.1. Основные обозначения, понятия и соглашения. Одним и тем же символом 0 обозначаем, по контексту, число ноль, нулевой вектор, нулевую функцию, нулевую меру и т.п. Для подмножества X (частично) упорядоченного векторного пространства чисел, функций, мер и т.п. с отношением порядка $\geq$ полагаем $X^+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ – все положительные элементы из X ; $x^+ := \max\{0, x\}$. Положительность всюду понимается, в соответствии с контекстом, как ≥ 0 . На множествах функций с упорядоченным множеством значений отношение порядка индуцируется с множества значений как *поточечное*.

Для меры (функции) a ее сужение на множество X обозначаем как $a|_X$.

Для области $D \subset \mathbb{C}$ через $\text{Hol}(D)$ и $\text{har}(D)$ обозначаем векторные пространства соответственно над полем $\mathbb{C}$ голоморфных и над полем $\mathbb{R}$ гармонических в D функций; $\text{sbh}(D)$ – выпуклый конус над $\mathbb{R}^+$ субгармонических в D функций [1], [2]. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на D , обозначаем символом $-\infty \in \text{sbh}(D)$. Для $u \in \text{sbh}(D)$ полагаем

$$(-\infty)_u := \{z \in D : u(z) = -\infty\}$$

– это $(-\infty)$ -множество функции u [2; 3.5].

Через $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функции евклидова расстояния между парами точек, между точкой и множеством, а также между множествами в $\mathbb{C}$. По определению

$$\text{dist}(\cdot, \emptyset) := \text{dist}(\emptyset, \cdot) := \inf \emptyset := +\infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00030).

Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\text{clos } S$ обозначаем замыкание S в $\mathbb{C}$. Для $S_0 \subset S \subset \mathbb{C}$ пишем $S_0 \in S$, если S_0 – относительно компактное подмножество в S в евклидовой топологии, индуцированной с $\mathbb{C}$ на S . Для числа $r > 0$ и $z \in \mathbb{C}$ полагаем

$$D(z, r) := \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| < r\}$$

– открытый круг с центром z радиуса r .

Далее $\mathcal{M}(D)$ – класс борелевских вещественных мер на области $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{M}(D) \supset \mathcal{M}_c(D)$ – подкласс мер с компактным носителем $\text{supp } \nu \subset D$. Для $\nu \in \mathcal{M}(D)$ полагаем $\nu(z, r) := \nu(D(z, r))$, если, конечно, $D(z, r) \subset D$.

Через $\text{const}_{a_1, a_2, \dots} \in \mathbb{R}$ обозначаем постоянные, вообще говоря, зависящие от $a_1, a_2, \dots$ и, если не оговорено противное, только от них.

1.2. Предшествующие результаты и основная задача. Даже для случая голоморфных функций одной переменной один из наиболее глубоких результатов о существовании ненулевой функции $f \in \text{Hol}(D)$, в некотором смысле минорирующей функцию $u \in \text{sblh}(D)$, – это полученное методом Хёрмандера решение $\bar{\partial}$ -задачи с L^2 -оценками [3] в модификации Бомбьери [4; теорема существования]

ТЕОРЕМА 1 [3; теорема 4.2.7]. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $u \in \text{sblh}(D)$, $z_0 \in D$, $r_0 > 0$,

$$I_u^2(z_0, r_0) := \int_{B(z_0, r_0) \cap D} e^{-2u} d\lambda, \quad \text{где } \lambda \text{ – мера Лебега на } \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in \text{Hol}(D)$ с $f_\varepsilon(z_0) = 1$ и

$$I_u^2(z_0; f_\varepsilon) := \int_D \frac{|f_\varepsilon(z)|^2 e^{-2u(z)}}{(1 + |z - z_0|^2)^{1+\varepsilon}} d\lambda(z) \leq \left(2 + \frac{4(1 + r_0^2)^2}{\varepsilon r_0^4}\right) \cdot I_u^2(z_0, r_0). \quad (1.2)$$

При $-\infty \neq u \in \text{sblh}(D)$ для любой точки $z_0 \notin (-\infty)_u$ найдется число $r_0 > 0$, для которого $I_u^2(z_0, r_0) \stackrel{(1.1)}{<} +\infty$ [5; следствие 5.11]. Это дает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $u \in \text{sblh}(D)$. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся $z_0 \in D$ и ненулевая функция $f_\varepsilon \in \text{Hol}(D)$ с $I_u^2(z_0; f_\varepsilon) \stackrel{(1.2)}{<} +\infty$. В частности, для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\log |\varepsilon f_\varepsilon(z)| \leq \sup_{z' \in B(z, r)} u(z') + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z| + r) \quad (1.3)$$

выполнено для всех $z \in D$ и $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D)$.

Случай $r \geq 1 + |z|$ мало информативен в рассматриваемых здесь вопросах. Кроме того, в случае $0 < r \leq 1 + |z|$ последнее слагаемое справа в (1.3) можно заменить, уменьшив число $\varepsilon > 0$, на $(1 + \varepsilon) \log(1 + |z|)$, что разделяет $|z|$ и r . Поэтому далее накладываем ограничение

$$0 < r < \min\{\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D), 1 + |z|\}, \quad z \in D \text{ – область в } \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Стандартный вывод (1.3) из конечности интеграла $I_u^2(z_0; f_\varepsilon)$ применяется давно и элементарен (см., например, [6; лемма 9.1]), но находит весьма широкие применения в теории функций комплексного переменного и ее приложениях. Известны и более тонкие выводы, развивающие (1.3). Так, Елифановым из доказательства одного его же результата [7; теорема 1, (4)] была получена

ЛЕММА 1.1 [8; лемма]. Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция в D , для которой выполнены условия

$$0 < d(z) < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D) \quad \text{для всех } z \in D, \quad (1.5d)$$

$$-\log d \in \text{sbh}(D), \quad \sup_{z \in D} d(z) =: B < +\infty, \quad (1.5b)$$

$$\sup \left\{ \frac{d(z)}{d(z')} : (z, z') \in D \times D, |z - z'| \leq d(z) + d(z') \right\} =: B' < +\infty, \quad (1.5b')$$

Тогда при $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D)$ для любой точки $z_0 \in D$ найдется ненулевая функция $f_0 \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$u(z_0) \leq \log |f_0(z_0)| \quad (1.6l)$$

и для всех $z \in D$ справедлива оценка сверху

$$\log |f_0(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + d(z)e^{i\theta}) d\theta + \log \frac{1}{d(z)} + 4 \log(1 + |z|) + \text{const}_{B, B'}. \quad (1.6u)$$

Если не требовать нижней оценки (1.6l) в точке z_0 , то результат [8; теорема 1] также позволяет не использовать априорную функцию d с ограничениями (1.5):

ЛЕММА 1.2 [9; лемма 1.1]. Пусть функция $u \in \text{sbh}(D)$ ограничена снизу в некоторой окрестности какой-нибудь точки z_0 из области D . Тогда найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой $f(z_0) \neq 0$ и выполнены неравенства

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta + \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) + 9 \log(1 + |z|) \quad \text{для всех } z \in D \quad (1.7)$$

и всех значений r , удовлетворяющих ограничениям $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D)$.

В [10; доказательство основной теоремы, 2а–2б] и [6; часть предложения 9.2] установлена

ТЕОРЕМА 2. Пусть $-\infty \neq u \in \text{sbh}(\mathbb{C})$. Тогда для любого числа $d > 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, для которой

$$\log |f(z)| \leq \sup_{|z' - z| \leq d} u(z') \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

Мы не обсуждаем здесь голоморфное минорирование субгармонических функций из классов, выделяемых глобальными ограничениями на их рост, какими-либо условиями определенной регулярности этих функций или их мер Рисса и т.п., использующие решения специальных случаев $\bar{\partial}$ задачи с оценками или/и аппроксимации субгармонических функций логарифмами модуля голоморфной функции [11]–[18].

Основная задача, решаемая в разделе 2, – избавиться, когда это возможно, от какого бы то ни было добавочного слагаемого вида $\text{const}^+ \log(1 + |z|)$ в правых частях (1.3), (1.6u), (1.7) и даже от любых логарифмических добавок (последнее в случае $D = \mathbb{C}$ подобно (1.8)), сохранив при этом, в отличие от (1.8), некоторое интегральное среднее, присутствующие в правых частях (1.6u), (1.7). Это особенно важно, когда функция $u \in \text{sbh}(D)$ гармоническая или обладает мерой Рисса ν_u достаточно регулярного поведения на части области D .

1.3. Следствия из основных результатов. Из доказываемых ниже теорем 4 и 6, а точнее следствий из них, даже при отбрасывании значительной части информации, заложенной в них, для $D = \mathbb{C}$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $-\infty \neq u \in \text{sbh}(\mathbb{C})$. Для любого числа $c \geq 0$ найдется ненулевая целая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, для которой при всех $z \in \mathbb{C}$

$$\log |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \left(z + \frac{1}{(1+|z|)^c} e^{i\theta} \right) d\theta. \quad (1.9)$$

Здесь в правой части (1.9) стоит интегральное среднее по окружностям с центром в точках $z \in \mathbb{C}$ с быстро “сжимающимся со степенной скоростью” радиусом $r(z) = (1+|z|)^{-c}$ при $z \rightarrow \infty$. Уже это значительно усиливает лемму 1.2 для $D = \mathbb{C}$ и теорему 2. На самом деле в правой части (1.9) можно поставить даже интегральное среднее $B_u(z, r)$ функции u по кругам $D(z, r)$ из (2.3B). Существенно усиливается и лемма 1.1 как в части оценки сверху (1.6u) путем отбрасывания слагаемого $4 \log(1+|z|)$ справа, так и в почти полном произволе в выборе функции $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ – отказ от условий ее непрерывности и довольно жестких ограничений (1.5b)–(1.5b’).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ в области $D \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (1.5d) вместе с ограничением

$$d(z) < 1 + |z| \quad \text{для всех } z \in D, \quad (1.10)$$

а также локально отделена от нуля в том смысле, что для любой точки $z \in D$ существует число $r_z > 0$, для которого $D(z, r_z) \Subset D$, $\inf_{z' \in D(z, r_z)} d(z') > 0$.

Если $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D)$ и выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

- (i) $\text{clos } D \neq \mathbb{C}$ (частный случай – ограниченность области D);
 - (ii) для меры Рисса ν_u функции u выполнено неравенство $\nu_u(D) > 1$;
 - (iii) область D односвязная на сфере Римана $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty$, например, $D = \mathbb{C}$,
- то найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \log \frac{1}{d(z)} \quad \text{при всех } z \in D. \quad (1.11)$$

2. Основные результаты

2.1. Необходимые сведения о субгармонических функциях. Мету Рисса функции $u \in \text{sbh}(D)$ чаще всего будем обозначать как $\nu_u := (1/2\pi)\Delta u$, где оператор Лапласа Δ действует на u в смысле теории распределений (обобщенных функций). Так, для $u \neq -\infty$ ее мера Рисса ν_u – борелевская положительная мера [1], [2]. Для функции же $-\infty \in \text{sbh}(D)$ ее мера Рисса по определению равна $+\infty$ на любом подмножестве из D . В этих обозначениях частный случай формулы Пуассона–Йенсена [2; теорема 4.5.1] для функции $u \neq -\infty$, субгармонической в некотором круге $D(z, r')$ с $r' > r > 0$ и с мерой Рисса ν_u , записывается в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta - \int_0^r \frac{\nu_u(z, t)}{t} dt, \quad (2.1)$$

где для последнего интеграла допускается и значение $+\infty$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = u(z) + \int_0^r \frac{\nu_u(z, t)}{t} dt \quad \text{для всех } z \notin (-\infty)_u,$$

поскольку имеют место эквивалентности

$$\begin{aligned} (u(z) \neq -\infty) &\iff \left(\int_0^r \frac{\nu_u(z, t)}{t} dt < +\infty \right) \\ &\iff \left(\int_{D(z, r)} \log |z' - z| d\nu_u(z') > -\infty \right), \end{aligned}$$

и, в частности, справедливы импликации

$$(u(z) \neq -\infty) \implies \left(\int_0^r \frac{\nu_u(z, t)}{t} dt < +\infty \right) \implies \left(\lim_{0 < r \rightarrow 0} \nu_u(z, r) \log r = 0 \right). \quad (2.2)$$

Для произвольной функции $U: D(z, r') \rightarrow [-\infty, +\infty]$ при $0 < r < r'$ определим классические интегральные средние по окружности и кругу радиуса r с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ [2; определение 2.6.7]

$$C_U(z, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z + re^{i\theta}) d\theta, \quad (2.3C)$$

$$B_U(z, r) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z, r)} U d\lambda \quad (2.3B)$$

– конечно же, при условии существования интегралов справа. При $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D(z, r'))$ известны следующие свойства [2; теорема 2.6.8]:

- (p1) $B_u(z, \cdot), C_u(z, \cdot)$ – возрастающие выпуклые функции от $\log$ на $(0, r')$;
- (p2) $B_u(z, r) \leq C_u(z, r)$ для всех $0 < r < r'$;
- (p3) $\lim_{0 < r \rightarrow 0} B_u(z, r) = \lim_{0 < r \rightarrow 0} C_u(z, r) = u(z)$.

Полезное дополнение к свойствам (p2), (p3) можно получить через классическое неравенство Йенсена [1; теорема 2.1], примененное с выпуклой функцией $\exp$:

- (p4) для функции $U: D(z, r') \rightarrow [-\infty, +\infty]$ при $0 < r < r'$

$$\exp B_U(z, r) \leq B_{\exp U}(z, r) \quad \text{и} \quad \exp C_U(z, r) \leq C_{\exp U}(z, r) \quad (2.4)$$

при условии, что соответствующие интегралы существуют.

Из свойства выпуклости (p1) и формулы Пуассона–Йенсена легко следует, что

- (p5) при $-\infty \neq u \in \text{sbh}(\mathbb{C})$ с мерой Рисса ν_u

$$\nu_u(\mathbb{C}) \stackrel{(2.3C)}{=} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log R} C_u(0, R) \stackrel{(2.3B)}{=} \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log R} B_u(0, R) \in [0, +\infty], \quad (2.5)$$

где пределы всегда существуют и, возможно, равны $+\infty$.

Равенства (2.5) позволяют значение $\nu_u(\mathbb{C})$ меры Рисса ν_u , которое нередко встречается ниже (см. и (ii) в следствии 3), задать через саму функцию $u \in \text{sbh}(\mathbb{C})$.

2.2. Общие результаты о минорировании субгармонических функций.

Начнем с тривиального факта, далее зачастую используемого без упоминания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если существует ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой неравенство $\log |f(z)| \leq q(z, r) + c$ выполнено при всех $z \in D$ и определенных значениях параметра r с постоянной $c \in \mathbb{R}$, не зависящей от $z \in D$ и r , то ненулевая функция $f_c := e^{-c} f$ удовлетворяет неравенству $\log |f_c(z)| \leq q(z, r)$ для всех $z \in D$ и тех же значениях r .

Сначала будут усилены оценки сверху следствия 1, а также лемм 1.1 и 1.2.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $u \in \text{sbh}(D)$ в области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой при всех $z \in D$ и r из (1.4) выполнено неравенство

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + q_\varepsilon(z, r), \quad (2.6f)$$

где

$$q_\varepsilon(z, r) := \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z|). \quad (2.6q)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Еще раз воспользуемся тем, что при $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D)$ можно выбрать произвольную точку $z_0 \notin (-\infty)_u$ в D , а для нее и число $r_0 > 0$ так, что $D(z_0, r_0) \Subset D$ и $I_u^2(z_0, r_0) \stackrel{(1.1)}{<} +\infty$ [5; следствие 5.11]. Пусть $\varepsilon > 0$. По первому утверждению следствия 1 найдется ненулевая функция f_ε , для которой с некоторой постоянной $C = \text{const}_{u, z_0, \varepsilon} > 0$ имеем оценку $I_u^2(z_0; f_\varepsilon) \stackrel{(1.2)}{\leq} C$, или, в иной записи,

$$\int_D |f_\varepsilon|^2 e^{-2v} d\lambda \leq C, \quad v(z) := u(z) + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \log(1 + |z - z_0|^2), \quad z \in D. \quad (2.7)$$

В силу $\log |f_\varepsilon| \in \text{sbh}(D)$ при $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus D)$, т.е. при $D(z, r) \Subset D$,

$$2 \log |f_\varepsilon(z)| - 2B_v(z, r) \leq B_{2 \log |f_\varepsilon| - 2v}(z, r) = B_U(z, r), \quad U := 2 \log |f_\varepsilon| - 2v.$$

По свойству (p4) интегрального среднего по кругу $D(z, r)$ можем продолжить

$$\begin{aligned} 2 \log |f_\varepsilon(z)| &\leq 2B_v(z, r) + B_U(z, r) \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} 2B_v(z, r) + \log B_{\exp U}(z, r) = 2B_v(z, r) + \log \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z, r)} |f_\varepsilon|^2 e^{-2u} d\lambda \\ &\stackrel{(2.7)}{\leq} 2B_v(z, r) + \log \frac{1}{\pi r^2} + \log C = 2B_v(z, r) + 2 \log \frac{1}{r} + \log \frac{C}{\pi} \\ &\stackrel{(2.7)}{\leq} B_v(z, r) + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + (|z - z_0| + r)^2) + \log \frac{C}{\pi} \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} 2B_u(z, r) + 2 \log \frac{1}{r} + 2(1 + \varepsilon) \log(1 + |z|) + (1 + \varepsilon) \log 2 + \log \left((1 + |z_0|)^2 \frac{C}{\pi} \right) \end{aligned}$$

и после деления на 2 по предложению 2.1 получаем (2.6). Теорема доказана.

Из теоремы 3 тривиально следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ такова, что $\mathbb{C} \setminus \text{clos } D \neq \emptyset$. Тогда для любых $u \in \text{sbh}(D)$ и числа $b \geq 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой при всех $z \in D$ и r из (1.4)

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + \log \frac{1}{r} - b \log(1 + |z|). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, функцию f из (2.6f) достаточно домножить на голоморфную в D функцию $z \mapsto (z - z_1)^{-b_\varepsilon}$, где $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \text{clos } D$, $b_\varepsilon := [b + 2 + \varepsilon]$ — целая часть числа $b + 2 + \varepsilon$, и воспользоваться предложением 2.1.

Таким образом, дальнейшие рассуждения, вообще говоря, не тривиальны только для неограниченной области D при $\text{clos } D = \mathbb{C}$. Нам потребуются

2.3. Оценки усреднений логарифмических потенциалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для функции $\log |\cdot| : z \mapsto \log |z|$, $z \in \mathbb{C}$, для любого числа $r > 0$

$$B_{\log |\cdot|}(z) \stackrel{(2.3B)}{=} \begin{cases} \log r - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2} \right) & \text{при } |z| \leq r, \\ \log |z| & \text{при } |z| \geq r. \end{cases} \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|z| \leq r$

$$\begin{aligned} B_{\log |\cdot|}(z) &\stackrel{(2.3B)}{=} \frac{2}{r^2} \int_0^r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |te^{i\theta} - z| d\theta \right) t dt = \frac{2}{r^2} \int_0^r \begin{cases} \log t & \text{при } |z| \leq t \\ \log |z| & \text{при } |z| \geq t \end{cases} t dt \\ &= \frac{2}{r^2} \cdot \begin{cases} \int_0^{|z|} (\log |z|) t dt + \int_{|z|}^r (\log t) t dt & \text{при } |z| \leq r, \\ \int_0^r (\log |z|) t dt & \text{при } |z| \geq r, \end{cases} \\ &= \frac{2}{r^2} \cdot \begin{cases} \log |z| \cdot \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{|z|}^r \log t dt^2 & \text{при } |z| \leq r, \\ \frac{r^2}{2} \log |z| & \text{при } |z| \geq r, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log |z| \cdot \frac{|z|^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int_{|z|}^r \log t dt^2 & \text{при } |z| \leq r, \\ \log |z| & \text{при } |z| \geq r, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log r - \frac{1}{r^2} \int_{|z|}^r t dt & \text{при } |z| \leq r \\ \log |z| & \text{при } |z| \geq r \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log r - \frac{1}{2r^2} (r^2 - |z|^2) & \text{при } |z| \leq r, \\ \log |z| & \text{при } |z| \geq r, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда получаем (2.9).

Рассмотрим логарифмический потенциал меры $\nu \in \mathcal{M}_c^+(\mathbb{C})$ [2; определение 3.1.1]

$$p_\nu: z \mapsto \int_{\mathbb{C}} \log |z - z'| d\nu(z'), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [2; теорема 3.1.2]. Для $\nu \in \mathcal{M}_c^+(\mathbb{C})$ ее логарифмический потенциал $p_\nu \in \text{sbh}(\mathbb{C})$ обладает свойствами

$$p_\nu|_{\mathbb{C} \setminus \text{supp } \nu} \in \text{har}(\mathbb{C} \setminus \text{supp } \nu), \quad p_\nu(z) = \nu(\mathbb{C}) \log |z| + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Из предложения 2.4 в силу непрерывности гармонической функции из (2.11) имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для любой области $D \subset \mathbb{C}$ при $\text{supp } \nu \subset D$

$$B_{p_\nu}(z) \geq p_\nu(z) \geq \nu(\mathbb{C}) \log(1 + |z|) + \text{const}_{\nu, D} \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C} \setminus D. \quad (2.12)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Для любого числа $r > 0$ и при всех $z \in \mathbb{C}$

$$B_{p_\nu}(z, r) = \nu(\mathbb{C}) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt + \int_r^{+\infty} \frac{\nu(\mathbb{C}) - \nu(z, t)}{t} dt \geq \nu(\mathbb{C}) \log \frac{r}{\sqrt{e}}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему Фубини о повторных интегралах, предложение 2.3 и интегрирование по частям, проведем вычисления

$$\begin{aligned} B_{p_\nu}(z, r) &= \int_{\mathbb{C}} B_{\log|\cdot|}(z' - z) d\nu(z') \\ &\stackrel{(2.10)}{=} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{array}{ll} \log r - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|z - z'|^2}{r^2} \right) & \text{при } |z - z'| < r \\ \log |z - z'| & \text{при } |z - z'| \geq r \end{array} \right\} d\nu(z') \\ &= \int_0^r \left(\log r - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{r^2} \right) d\nu(z, t) + \int_r^{+\infty} \log t d\nu(z, t) \\ &= \nu(z, r) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt + \int_r^{+\infty} \log t d(\nu(z, t) - \nu(\mathbb{C})) \\ &= \nu(z, r) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt - (\nu(z, r) - \nu(\mathbb{C})) \log r + \int_r^{+\infty} \frac{\nu(\mathbb{C}) - \nu(z, t)}{t} dt, \end{aligned} \quad (2.14)$$

что дает равенство в (2.13). Неравенство в (2.13) следует из положительности последнего интеграла и неравенства $\nu(z, t) \leq \nu(\mathbb{C})$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и чисел $t > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, $\nu(\mathbb{C}) < +\infty$, и для $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\int_{D(z_0, r_0)} \log |z - z_0| d\nu(z) > -\infty \quad \text{при малом } r_0 > 0 \quad (2.15)$$

– множество точек $z_0 \in \mathbb{C}$, для которых не выполнено (2.15), полярное в $\mathbb{C}$ и лебеговой меры нуль [2; 3.2]. Тогда логарифмический потенциал рода 0 меры ν

$$p_{\nu, 0}(z) := \int_D \log \left| 1 - \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| d\nu(z') \quad (2.16)$$

– субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция $\neq -\infty$ с мерой Рисса ν , для усреднений которой при любом $r > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ справедлива оценка снизу

$$B_{p_{\nu,0}}(z, r) \geq -\frac{1}{2} \nu(\mathbb{C}) - \nu(\mathbb{C}) \log \left(1 + \frac{|z - z_0|}{r} \right). \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность определения в (2.16) логарифмического потенциала рода 0 и его субгармоничность с мерой Рисса ν следуют из представлений

$$p_{\nu,0}(z) = \int_{\mathbb{C}} \log \frac{|z' - z|}{|z' - z_0|} d\nu(z') \quad (2.18)$$

и конечности интеграла из (2.15). Далее, не умаляя общности, можно считать, что $z_0 = 0$, т.е. ввиду (2.15) имеем

$$\int_{D(0,r_0)} \log |z| d\nu(z) > -\infty \quad \text{при малом } r_0 > 0, \quad (2.19)$$

откуда в силу (2.2) имеем

$$\lim_{0 < r \rightarrow 0} \nu(0, r) \log r = 0.$$

Так же, как и при доказательстве предложения 2.6 в части (2.14), используя теорему Фубини об интегралах, предложение 2.3 и интегрирование по частям, проведем оценки снизу

$$\begin{aligned} B_{p_{\nu,0}}(z, r) &= \int_{\mathbb{C}} (B_{\log |\cdot|}(z' - z) - \log |z'|) d\nu(z') \\ &= \int_0^r \left(\log r - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{r^2} \right) d\nu(z, t) - \int_{D(z,r)} \log |z'| d\nu(z') \\ &\quad + \int_{\mathbb{C} \setminus D(z,r)} (\log |z' - z| - \log |z'|) d\nu(z') \\ &\stackrel{(2.19)}{\geq} \nu(z, r) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt - \int_{D(z,r)} \log(|z' - z| + |z|) d\nu(z') \\ &\quad + \int_{\mathbb{C} \setminus D(z,r)} (\log |z' - z| - \log(|z' - z| + |z|)) d\nu(z') \\ &= \nu(z, r) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt - \int_0^r \log(t + |z|) d\nu(z, t) \\ &\quad - \int_r^{+\infty} \log \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) d\nu(z, t) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \nu(z, r) \log r - \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt - \nu(z, r) \log(t + |z|) + \int_0^r \frac{\nu(z, t)}{t + |z|} dt \\ &\quad + \nu(z, r) \log \left(1 + \frac{|z|}{t} \right) - \int_r^{+\infty} \nu(z, t) \frac{|z|}{t(t + |z|)} dt \\ &= -\frac{1}{r^2} \int_0^r \nu(z, t) t dt - \int_r^{+\infty} \nu(z, t) \frac{|z|}{t(t + |z|)} dt + \int_0^r \frac{\nu(z, t)}{t + |z|} dt. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду положительности последнего интеграла и неравенства $\nu(z, t) \leq \nu(\mathbb{C})$

$$B_{p_{\nu,0}}(z, r) \geq -\frac{1}{2}\nu(\mathbb{C}) - \nu(\mathbb{C}) \log\left(1 + \frac{|z|}{r}\right)$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ и $r > 0$, что и дает (2.17).

2.4. Различные усиления теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – область в $\mathbb{C}$, $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_u . Тогда для любых числа $\varepsilon > 0$ и меры $\nu_0 \in \mathcal{M}_c^+(D_0)$, мажорируемой мерой ν_u , т.е.

$$\nu_u - \nu_0 \in \mathcal{M}^+(D), \quad \text{supp } \nu_0 \subset D_0 \Subset D, \quad D_0 \text{ – область,} \quad (2.20)$$

найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой при всех $z \in D$ и r из (1.4)

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + \log \frac{1}{r} + \begin{cases} (1 + \varepsilon - \nu_0(\mathbb{C})) \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_0(\mathbb{C}) \log \frac{1}{r} & \text{при всех } z \in D_0. \end{cases} \quad (2.21)$$

В условиях и обозначениях теоремы 4 справедливы

СЛЕДСТВИЕ 4. При $\nu_u(D) > 1$ для любого числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать ненулевую функцию $f \in \text{Hol}(D)$ так, что при $z \in D$ выполнены неравенства

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log^+ \frac{1}{r} \quad \text{для любых } r \text{ из (1.4).} \quad (2.22)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. При $\nu_u(D) = +\infty$ для любого $b \geq 0$ можно подобрать область $D_0 \Subset D$ так, что для некоторой ненулевой функции $f \in \text{Hol}(D)$ для любых точек $z \in D$ и значений r из (1.4) выполнены неравенства

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + \log \frac{1}{r} + \begin{cases} -b \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_0(\mathbb{C}) \log \frac{1}{r} & \text{при всех } z \in D_0. \end{cases} \quad (2.23)$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Для любой локально отделенной от нуля функции $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями (1.5d) и (1.10) при $\nu(D) = +\infty$ для любого числа $b \geq 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \log \frac{1}{d(z)} - b \log(1 + |z|) \quad \text{при всех } z \in D, \quad (2.24)$$

а при $\nu_u(D) > 1$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$ с оценкой (2.24) с $b = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 И СЛЕДСТВИЙ 4–6. С логарифмическим потенциалом p_{ν_0} из (2.10) ввиду (2.20) существует вариант представления Рисса $u_0 := u - p_{\nu_0} \in \text{sbh}(D)$ [2; теорема 3.7.9, лемма 3.7.10]. По предложению 3 для функции u_0 найдется ненулевая функция $f_0 \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$\log |f_0(z)| \stackrel{(2.6q)}{\leq} B_{u_0}(z, r) + q_\varepsilon(|z|, r) = B_u(z, r) - B_{p_{\nu_0}}(z, r) + q_\varepsilon(|z|, r)$$

для всех $z \in D$ и r из (1.4). Из нижних оценок логарифмического потенциала (2.12)–(2.13) предложений 2.5–2.6 и 2.1 получаем требуемое (2.21), поскольку

$$(1 + \varepsilon) \log(1 + |z|) + \nu_0(\mathbb{C}) \log \frac{1}{r} \leq \nu_0(\mathbb{C}) \log \frac{1}{r} + \text{const}_{D_0, \varepsilon} \quad \text{при всех } z \in D_0 \Subset D.$$

В условиях следствия 4 при $\nu_u(D) > 1$ для любого $0 < \varepsilon < \nu_u(D) - 1$ по мере ν_u можно выбрать меру $\nu_0 \leq \nu_u$ с компактным носителем в D , для которой $\nu_0(\mathbb{C}) = 1 + \varepsilon$, затем подобласть $D_0 \Subset D$ так, что $\text{supp } \nu_0 \subset D_0$. Тогда (2.22) следует из (2.21).

В условиях следствия 5 можно подобрать меру $\nu_0 \leq \nu_u$ с компактным носителем в области $D_0 \Subset D$ так, что $\nu_0(\mathbb{C}) > 1 + b$ и оценка (2.21) дает (2.23).

Для доказательства следствия 6 и еще дважды далее потребуется

ЛЕММА 2.1. *Для функции d из следствия 5 и любых области $D_0 \Subset D$ и чисел $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ найдется постоянная $C := \text{const}_{d, D_0, a_0, a_1} \geq 0$, с которой*

$$a_0 \log \frac{1}{d(z)} \leq a_1 \log(1 + |z|) + C \quad \text{при всех } z \in D_0. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ввиду локальной отделенности от нуля функция из левой части (2.25) ограничена сверху на компакте $\text{clos } D_0 \subset D$, а непрерывная на нем функция из правой части (2.25) ограничена снизу, что и позволяет подобрать C в (2.25).

Выбираем в следствии 5 для каждой точки $z \in D$ значение $r = d(z)$. При $\nu_u(D) = +\infty$, применяя лемму 2.1 к последнему двухвариантному слагаемому в правой части оценки (2.23) с $a_0 := \nu_0(D)$ и $a_1 := -b$, получим (2.24) с помощью предложения 2.1. Аналогично, при $\nu_u(D) > 1$ для любого $0 < \varepsilon < \nu_u(D) - 1$ по мере ν_u можно выбрать меру $\nu_0 \leq \nu_u$ с компактным носителем в D , для которой $\nu_0(\mathbb{C}) \geq 1 + \varepsilon$, затем подобласть $D_0 \Subset D$ так, что $\text{supp } \nu_0 \subset D_0$. Применяя лемму 2.1 к последнему слагаемому в правой части оценки (2.21) с $a_0 := \nu_0(\mathbb{C})$ и $a_1 := 1 + \varepsilon - \nu_0(\mathbb{C}) \leq 0$ получим с помощью предложения 2.1 требуемое неравенство (2.24) с $b = 0$.

Далее исследуется случай функции $u \in \text{sbn}(D)$ с мерой Рисса $\nu_u(D) < +\infty$.

ЛЕММА 2.2 [19; лемма 2.1]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{C}$ – n -связная область на сфере Римана $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $h \in \text{har}(D)$. Тогда для некоторого числа $b < n - 1$ найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой*

$$\log |f(z)| \leq h(z) + b^+ \log^+ |z| \quad \text{для всех } z \in D. \quad (2.26)$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $D \subset \mathbb{C}$ – n -связная область на $\mathbb{C}_\infty$, $-\infty \neq u \in \text{sbn}(D)$ и для ее меры Рисса ν_u для некоторой области $D_0 \Subset D$ имеем $\text{supp } \nu_u \subset D_0$, $0 < \nu_u(D) < +\infty$. Тогда при некотором $b < n - 1$ найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой*

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, r) + b^+ \log(1 + |z|) + \begin{cases} -\nu_u(\mathbb{C}) \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_u(\mathbb{C}) \log \frac{1}{r} & \text{при } z \in D_0 \end{cases} \quad (2.27)$$

для всех r из (1.4). Так, для односвязной в $\mathbb{C}_\infty$ области D здесь $b^+ = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 7. В условиях теоремы 5 для любой локально отделенной от нуля функции $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями (1.5d) и (1.10) при некотором $b < n - 1$ найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, dz) + b^+ \log(1 + |z|) - \nu_u(\mathbb{C}) \log(1 + |z|) \quad \text{при всех } z \in D. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 И СЛЕДСТВИЯ 7. Рассмотрим функцию

$$h := u - p_{\nu_u} \in \text{har}(D).$$

По лемме 2.2 найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой выполнено (2.26). Применяя интегральные усреднения по кругам к обеим частям (2.26), получаем

$$\log |f(z)| = B_{\log |f|}(z, r) \leq B_u(z, r) - B_{p_{\nu_u}}(z, r) + b^+ \log(1 + |z| + r). \quad (2.29)$$

Из оценок логарифмического потенциала (2.12), (2.13) предложений 2.5, 2.6 и условия (1.4) следует (2.27) и теорема 5 доказана. Неравенство (2.28) следствия 7 вытекает из (2.27) с помощью леммы 2.1 и предложения 2.1.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $D \subset \mathbb{C} - n$ -связная область на $\mathbb{C}_\infty$, $-\infty \neq u \in \text{sbn}(D)$ и для ее меры Рисса ν_u имеем

$$0 < \nu_u(D) < +\infty. \quad (2.30)$$

Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0, \nu(D))$ при некотором $b < n - 1$ найдутся область $D_0 \Subset D$ и функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которых

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &\leq B_u(z, r) + b^+ \log(1 + |z|) + \varepsilon \log \frac{1}{r} \\ &+ \begin{cases} (2\varepsilon - \nu_u(D)) \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_u(D) \log \frac{1}{r} & \text{при } z \in D_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.31)$$

для всех r из (1.4). Так, для односвязной в $\mathbb{C}_\infty$ области D здесь $b^+ = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 8. В условиях теоремы 6 для любых $\varepsilon \in (0, \nu(D))$ и локально отделенной от нуля функции $d: D \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями (1.5d) и (1.10) при некотором $b < n - 1$ найдется функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой при всех $z \in D$

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + b^+ \log(1 + |z|) + \varepsilon \log \frac{1}{d(z)} + (2\varepsilon - \nu_u(D)) \log(1 + |z|). \quad (2.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 И СЛЕДСТВИЯ 8. При фиксированном значении $\varepsilon \in (0, \nu(D))$ в силу условия (2.30) можно построить меру $\nu_0 \in \mathcal{M}_c^+(D)$, а затем и выбрать область D_0 так, что

$$\nu_0 \leq \nu_u, \quad \nu_0(D) \geq \nu_u(D) - \varepsilon, \quad \text{supp } \nu_0 \subset D_0 \Subset D, \quad (2.33_0)$$

$$\nu_\infty := \nu_u - \nu_0 \in \mathcal{M}^+(D), \quad \nu_\infty(D) \leq \varepsilon. \quad (2.33_\infty)$$

Кроме того, в силу (2.30) меру ν_u можно рассматривать как меру из $\mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ и выбрать точку $z_0 \in \mathbb{C}$ так, что (см. формулировку предложения 2.7)

$$|z_0| \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_{D(z_0, r_0)} \log |z - z_0| d\nu_\infty(z) > -\infty \quad \text{при некотором } r_0 > 0. \quad (2.34)$$

Рассмотрим теперь функцию $h := u - p_{\nu_0} - p_{\nu_\infty, 0} \in \text{har}(D)$, где p_{ν_0} и $p_{\nu_\infty, 0}$ — соответственно логарифмический потенциал (2.10) меры ν_0 и логарифмический потенциал (2.16) рода 0 меры ν_∞ . По лемме 2.2 найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$ без нулей в D , для которой выполнено (2.26). Тогда, применяя усреднения по кругам к обеим частям (2.26), получаем

$$\begin{aligned} \log |f(z)| &= B_{\log |f|}(z, r) \leq B_u(z, r) - B_{p_{\nu_0}}(z, r) - B_{p_{\nu_\infty, 0}}(z, r) + b^+ \log(1 + |z| + r) \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} B_u(z, r) - B_{p_{\nu_0}}(z, r) - B_{p_{\nu_\infty, 0}}(z, r) + b^+ \log(1 + |z|) + b^+ \log 2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из оценок снизу (2.12), (2.13) логарифмического потенциала в предложениях 2.5, 2.6

$$\begin{aligned} -B_{p_{\nu_0}}(z, r) &\leq \begin{cases} -\nu_0(\mathbb{C}) \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_0(\mathbb{C}) \log \frac{\sqrt{e}}{r} & \text{при } z \in D, \end{cases} \\ &\stackrel{(2.33)}{\leq} \begin{cases} (\varepsilon - \nu_u(D)) \log(1 + |z|) & \text{при } z \in D \setminus D_0, \\ \nu_u(D) \log \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \nu_u(D) & \text{при } z \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из оценки снизу (2.17) логарифмического потенциала рода 0 в предложении 2.7

$$\begin{aligned} -B_{p_{\nu_\infty, 0}}(z) &\leq \frac{1}{2} \nu_\infty(\mathbb{C}) + \nu_\infty(\mathbb{C}) \log \left(1 + \frac{|z - z_0|}{r} \right) \stackrel{(2.33\infty)}{\leq} \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon \log \left(1 + \frac{|z - z_0|}{r} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon \log \frac{1}{r} + \varepsilon \log(r + |z| + |z_0|) \\ &\stackrel{(1.4), (2.34)}{\leq} \varepsilon \log \frac{1}{r} + \varepsilon \log(1 + |z|) + \frac{1}{2} \varepsilon + \varepsilon \log 2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Используя (2.36) и (2.37) в (2.35), получаем требуемое (2.31). Для вывода отсюда следствия 8 с оценкой (2.32) достаточно воспользоваться леммой 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Для числа $c \geq 0$ выберем функцию

$$d(z) := \frac{1}{(1 + |z|)^c}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.38)$$

Пусть сначала для меры Рисса ν_u функции $u \in \text{sbh}(\mathbb{C})$ выполнено условие $\nu_u(\mathbb{C}) = +\infty$. Тогда по следствию 6 для любого числа $b \geq 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, для которой

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \log(1 + |z|)^c - b \log(1 + |z|) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}.$$

Выберем $b \geq c$ и получим

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}. \quad (2.39)$$

Пусть теперь для ν_u выполнено условие (2.30). Тогда по следствию 8 для любого $\varepsilon > 0$ найдется целая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ без нулей в $\mathbb{C}$, для которой при всех $z \in \mathbb{C}$

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \varepsilon c \log(1 + |z|) + (2\varepsilon - \nu_u(\mathbb{C})) \log(1 + |z|).$$

Выбрав здесь $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon c + 2\varepsilon - \nu_u(\mathbb{C}) \leq 0$, также получим (2.39).

Наконец, в тривиальном случае $\nu_0 = 0$, т.е. при $u \in \text{har}(\mathbb{C})$, по лемме 2.2 найдется функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ без нулей в $\mathbb{C}$, для которой $\log |f| \leq u$ на $\mathbb{C}$ и, тем более, выполнено (2.39). Таким образом, в силу свойства (p2) интегральных средних $B_u \leq C_u$ из (2.39) следует (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3. В случае $\text{clos } D \neq \mathbb{C}$, т.е. в случае (i), из предложения 2.2 при $b = 0$ при выборе для каждой точки $z \in D$ значения $r = d(z)$ следует (1.11).

При $\nu_u(D) > 1$, т.е. в случае (ii), по заключительной части следствия 6 с $b = 0$ найдется ненулевая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$, для которой вновь выполнено (1.11).

В случае (iii) односвязной области D в тривиальной ситуации $\nu_0 = 0$, т.е. при $u \in \text{har}(\mathbb{C})$, можно выбрать $f = e^g$, где $\text{Re } g = u$, $g \in \text{Hol}(D)$ [2; теорема 1.1.2(b)].

Таким образом, для (iii) теперь осталось рассмотреть только случай $0 < \nu_u(D) \leq 1$, т.е. выполнено условие (2.30). Тогда по следствию 8 для любого $\varepsilon > 0$ найдется целая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ без нулей в $\mathbb{C}$, для которой при всех $z \in D$

$$\log |f(z)| \leq B_u(z, d(z)) + \varepsilon \log \frac{1}{d(z)} + (2\varepsilon - \nu_u(\mathbb{C})) \log(1 + |z|).$$

Выбрав здесь $\varepsilon \in (0, 1]$ столь малым, что $2\varepsilon - \nu_u(\mathbb{C}) \leq 0$, также получим (1.11).

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные здесь результаты позволяют уточнить и усилить некоторые наши схемы описания нетривиальных весовых пространств, множеств (не-) единственности и нулевых множеств в таких пространствах, частью изложенные в [6], [9], [10], [19] и др. Эти приложения намечается изложить в ином месте.

Авторы глубоко признательны рецензенту за ряд ценных замечаний по содержанию статьи и полезные исправления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [2] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Math. Soc. Stud. Texts, **28**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [3] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progr. Math., **127**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.
- [4] E. Bombieri, “Algebraic values of meromorphic maps”, *Invent. Math.*, **10**:4 (1970), 267–287.
- [5] П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989.
- [6] Б. Н. Хабибуллин, “Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190.
- [7] О. В. Епифанов, “Разрешимость уравнения Коши–Римана с ограничениями роста функций и весовая аппроксимация аналитических функций”, *Изв. вузов. Матем.*, 1990, № 2, 49–52.

- [8] О. В. Епифанов, “О разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов”, *Матем. заметки*, **51**:1 (1992), 83–92.
- [9] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова, “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 146–189.
- [10] Б. Н. Хабибуллин, “Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 1101–1123.
- [11] Р. С. Юлмухаметов, “Аппроксимация субгармонических функций”, *Anal. Math.*, **11**:3 (1985), 257–282.
- [12] M. Christ, “On the $\bar{\partial}$ equation in weighted L^2 norms in $\mathbb{C}^1$ ”, *J. Geom. Anal.*, **1**:3 (1991), 193–230.
- [13] B. Berndtsson, J. Ortega Cerdà, “On interpolation and sampling in Hilbert spaces of analytic functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **464** (1995), 109–128.
- [14] K. Seip, “On Korenblum’s density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$ ”, *J. Anal. Math.*, **67** (1995), 307–322.
- [15] B. Berndtsson, “Uniform estimates with weights for the $\bar{\partial}$ -equation”, *J. Geom. Anal.*, **7**:2 (1997), 195–215.
- [16] Yu. Lyubarskii, Eu. Malinnikova, “On approximation of subharmonic functions”, *J. Anal. Math.*, **83** (2001), 121–149.
- [17] J. Ortega-Cerdà, “Multipliers and weighted $\bar{\partial}$ -estimates”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **18**:2 (2002), 355–377.
- [18] D. H. Luecking, “Interpolation Schemes in Weighted Bergman Spaces”, 2014, [arXiv: math.CV/1412.0716](https://arxiv.org/abs/math.CV/1412.0716).
- [19] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 121–160.

Б. Н. Хабибуллин

Башкирский государственный университет, г. Уфа

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступило

16.04.2015

Исправленный вариант

15.09.2015

Т. Ю. Байгускаров

Башкирский государственный университет, г. Уфа

E-mail: t.bayguskarov@gmail.com