Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, Критические множества и двумерные топологически перемешивающие аттракторы пары сцепленных “tent maps”, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 654–658

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:41:54

УДК 517.9

КРИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И ДВУМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИ ПЕРЕМЕШИВАЮЩИЕ АТТРАКТОРЫ ПАРЫ СЦЕПЛЕННЫХ “TENT MAPS”

В. А. Добрынский

Доказано существование двумерных топологически перемешивающих аттракторов у эндоморфизмов плоскости, образованных путем сцепления двух одинаковых одномерных унимодальных кусочно-линейных отображений.

Библиография: 4 названия.

Одним из наиболее изученных классов одномерных систем является семейство кусочно-линейных отображений вида $\tau \rightarrow 1 - a(\tau)$. Это связано с тем, что, обладая по сути дела столь же сложной динамикой, как и гладкие отображения, кусочно-линейные намного проще и легче поддаются изучению аналитическими методами. Сказанное в еще большей мере справедливо для многомерных динамических систем. А учитывая, как мало известно о свойствах даже двумерных кусочно-линейных отображений, вполне понятен тот интерес, который они вызывают.

В последнее время в литературе широко обсуждаются эффекты, возникающие при сцеплении ряда идентичных одномерных отображений.

Пусть $f_a: \tau \rightarrow f_a(\tau)$ – однопараметрическое семейство отображений прямой $\mathbb{R}^1$ в себя. Сцепление пары таких отображений может быть произведено различными способами. Чаще всего рассматриваются отображения вида

$$(x, y) \rightarrow (f_a(x) + \zeta(f_a(y) - f_a(x)), f_a(y) + \zeta(f_a(x) - f_a(y))), \quad (1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ [1], [2]. Очевидно, они обладают свойством симметрии (относительно замен $x \rightarrow y, y \rightarrow x$), вследствие чего при любых значениях параметров a и ζ имеют одномерное инвариантное многообразие в виде главной диагонали $x = y$, на которой они совпадают с f_a . Ниже исследуются отображения (1) с $f_a(\tau) = 1 - a|\tau|$, т.е. рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-линейных эндоморфизмов плоскости вида

$$\Phi: (x, y) \rightarrow (1 - a(1 - \zeta)|x| - a\zeta|y|, 1 - a(1 - \zeta)|y| - a\zeta|x|), \quad (2)$$

где a и ζ – параметры такие, что $0 < a < 2$ и $0 < \zeta < 1$. Толчком для изучения свойств этого класса отображений послужили статьи [1], [2], в которых представлен ряд результатов численного анализа свойств двух семейств кусочно-линейных отображений (из которых семейство, рассматриваемое в [1], такое же, как (2), а рассматриваемое в [2] совпадает с Φ после соответствующей линейной замены координат). В частности, в обеих работах выдвинуто предположение о существовании значений параметров таких, что соответствующие им отображения имеют двумерные хаотические аттракторы. Кроме того, в [1] сформулирована дополнительно гипотеза о топологической транзитивности аттракторов и плотности периодических точек на них.

Основной наш результат составляет следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для произвольных $a \in ((1 + \sqrt{5})/2, 2)$ и $\zeta \in (0, (a - 1)/(2a))$ отображение Φ имеет хаотический странный аттрактор Λ , представляющий собой четырехугольник (ромбoid, стороны которого образованы парами отрезков двух первых образов критического множества отображения Φ), на котором Φ является топологически перемешивающим отображением.

Другими словами, в пространстве параметров существует область такая, что для каждого набора параметров из этой области для отображения Φ в фазовом пространстве существует область U такая, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$, $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(U) = \Lambda$, и для любого конечного покрытия Λ окрестностями V_i , $i = 1, \dots, N$, открытыми в Λ , найдется натуральное M такое, что $\Phi^p(V_i) \cap V_j \neq \emptyset$ для произвольных $i, j \in \{1, \dots, N\}$ и $p \geq M$. Здесь и далее $\text{Cl } U$ и $\text{Int } U$ обозначают замыкание и внутренность множества U соответственно.

СЛЕДСТВИЕ. Если $a \in ((1 + \sqrt{5})/2, 2)$ и $\zeta \in (0, (a - 1)/(2a))$, то Λ – топологически транзитивное множество, на котором плотны периодические точки.

В дальнейшем мы ограничимся изучением Φ , соответствующим значениям a и ζ из указанных выше интервалов $(1, 2)$ и $(0, (a - 1)/(2a))$. При таких a и ζ оба собственных числа дифференциала $D\Phi$ (там, где он существует) по модулю больше 1, а отображение Φ имеет пару неподвижных точек $(1/(1 + a), 1/(1 + a))$, $(1/(1 - a), 1/(1 - a))$ и пару периодических точек периода 2

$$\left(\frac{1 + a(1 - 2\zeta)}{1 + aa(1 - 2\zeta)}, \frac{1 - a(1 - 2\zeta)}{1 + aa(1 - 2\zeta)} \right), \quad \left(\frac{1 - a(1 - 2\zeta)}{1 + aa(1 - 2\zeta)}, \frac{1 + a(1 - 2\zeta)}{1 + aa(1 - 2\zeta)} \right).$$

Обозначим $K_\Phi = \{(x, y) : x = 0\} \cup \{(x, y) : y = 0\}$ критическое множество отображения Φ . (Напомним, что критическим для отображения Ψ называется множество точек, в которых якобиан $D\Psi$ обращается в нуль или же вообще не существует [3], [4].) Поскольку $\Phi : (t, 0) \rightarrow (1 - a(1 - \zeta)|t|, 1 - a\zeta|t|)$ и $\Phi : (0, t) \rightarrow (1 - a\zeta|t|, 1 - a(1 - \zeta)|t|)$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\{(x, y) : y = 0\}) &= \left\{ (x, y) : y = 1 + \frac{\zeta}{1 - \zeta}(x - 1), x \leq 1 \right\}, \\ \Phi(\{(x, y) : x = 0\}) &= \left\{ (x, y) : y = 1 + \frac{1 - \zeta}{\zeta}(x - 1), x \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Объединение этих множеств дает $\Phi(K_\Phi)$. Нетрудно показать, что

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = \left\{ (x, y) : 1 + \frac{1 - \zeta}{\zeta}(x - 1) \leq y \leq 1 + \frac{\zeta}{1 - \zeta}(x - 1), x \leq 1 \right\}.$$

Обозначим $O = (0, 0)$ начало координат и рассмотрим ромб $BDEF$, где $B = (1, 1)$, $D = (1 - 2\zeta, -1 + 2\zeta)$, $E = (-1, -1)$, $F = (-1 + 2\zeta, 1 - 2\zeta)$. Оси координат делят ромб на четыре части. Обозначим $A = (0, 1 - \zeta/(1 - \zeta))$, $C = (1 - \zeta/(1 - \zeta), 0)$, $H = (0, -1 + \zeta/(1 - \zeta))$, $G = (-1 + \zeta/(1 - \zeta), 0)$ точки пересечения осей координат со сторонами ромба и рассмотрим образы четырехугольников $OABC$, $OC DH$, $OH EG$ и $AO GF$. Так как Φ – диффеоморфизм каждого из четырехугольников на его образ, достаточно найти координаты образов их вершин. Вычисляя, находим, что $\Phi(0) = B = (1, 1)$, $\Phi(A) = \Phi(H) = (1 - a\zeta + a\zeta^2/(1 - \zeta), 1 - a + 2a\zeta)$, $\Phi(B) = \Phi(E) = (1 - a, 1 - a)$, $\Phi(C) = \Phi(G) = (1 - a + 2a\zeta, 1 - a\zeta + a\zeta^2/(1 - \zeta))$, $\Phi(D) = \Phi(F) = (1 - a(1 - 2\zeta), 1 - a(1 - 2\zeta))$. Таким образом,

$\Phi(OABC) = \Phi(OHEG) \supset \Phi(OC DH) = \Phi(AOGF)$. Как следствие получается, что $\Phi(BDEF) = \Phi(OABC)$. При этом, поскольку $A, C \in K_\Phi$, то $\Phi(A), \Phi(C) \in \Phi(K_\Phi)$. А так как $-1 + 2\zeta < 1 - a + 2a\zeta < 1$ при $1 < a < 2, 0 < \zeta < (a-1)/(2a)$, то $\Phi(A) \in BD$, а $\Phi(C) \in BF$. Следовательно, $\Phi(OABC) \subset BDEF$. Причем при достаточно малых ζ точки $\Phi(A)$ и $\Phi(C)$ находятся в малых окрестностях точек D и F соответственно.

Обратим внимание на то, что ромбоид $\Phi(OABC)$ образован парами отрезков, принадлежащих $\Phi(K_\Phi)$ и $\Phi^2(K_\Phi)$. Ниже мы покажем, что $\Phi(OABC)$ и есть то самое множество Λ , о котором упоминается в формулировке теоремы.

ЛЕММА 1. Для произвольных $a \in (1, 2)$ и $\zeta \in (0, (a-1)/(2a))$ существует область $U \subset \mathbb{R}^2$ такая, что $U \supset BDEF$, $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$ и $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(\text{Cl } U) \subset BDEF$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая U в качестве γ -окрестности ромба $BDEF$, где $\gamma = \gamma(a, \zeta) > 0$ — достаточно малая величина, нетрудно убедиться в том, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$. Это означает также, что $\Phi^j(\text{Cl } U) \subset \Phi^{j-1}(\text{Cl } U)$ для любого натурального j . Более того, вычисление нескольких последовательных итераций $\text{Cl } U$ показывает, что существует натуральное N такое, что $\Phi^N(\text{Cl } U) \subset BDEF$.

Рассмотрим отображения, обратные к Φ . Имеется четыре таких отображения, а именно:

$$\begin{aligned}\Phi_{(1)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta y}{a(1-2\zeta)}, \frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta x}{a(1-2\zeta)} \right), \\ \Phi_{(2)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta y}{a(1-2\zeta)}, -\frac{1}{a} + \frac{(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)} - \frac{\zeta x}{a(1-2\zeta)} \right), \\ \Phi_{(3)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow \left(-\frac{1}{a} + \frac{(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)} - \frac{\zeta y}{a(1-2\zeta)}, -\frac{1}{a} + \frac{(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)} - \frac{\zeta x}{a(1-2\zeta)} \right), \\ \Phi_{(4)}^{-1}: (x, y) &\rightarrow \left(-\frac{1}{a} + \frac{(1-\zeta)x}{a(1-2\zeta)} - \frac{\zeta y}{a(1-2\zeta)}, \frac{1}{a} - \frac{(1-\zeta)y}{a(1-2\zeta)} + \frac{\zeta x}{a(1-2\zeta)} \right).\end{aligned}$$

Все это линейные сжатия. Определены они на $\Phi(\mathbb{R}^2)$ и отображают его на разные квадранты $\mathbb{R}^2$. Точнее, $\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) = Q_1$, $\Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) = Q_2$, $\Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) = Q_3$, $\Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(\mathbb{R}^2)) = Q_4$, где $Q_1 := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, $Q_2 := \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 0\}$, $Q_3 := \{(x, y) : x \leq 0, y \leq 0\}$, $Q_4 := \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0\}$. Очевидно также, что $\Phi_{(1)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OABC$, $\Phi_{(2)}^{-1}(\Phi(OC DH)) = OC DH$, $\Phi_{(3)}^{-1}(\Phi(OABC)) = OHEG$ и $\Phi_{(4)}^{-1}(\Phi(OC DH)) = AOGF$. Введем обозначение $\tilde{K}_\Phi = K_\Phi \cap \Phi(BDEF)$. Действие $\Phi_{(j)}^{-1}$, $j = 1, \dots, 4$, преобразует разбиение ромбоида $\Phi(BDEF)$ на части множеством $\tilde{K}_\Phi$ в разбиение на части четырехугольников $OABC$, $OC DH$, $OHEG$, $AOGF$ множествами $\Phi_{(j)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$, $j = 1, \dots, 4$, — прообразами множества $\tilde{K}_\Phi$. (Заметим, кстати, что $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$ — не что иное, как подмножество множества точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют одному из соотношений $1 - a(1-\zeta)|x| - a\zeta|y| = 0$ или $1 - a(1-\zeta)|y| - a\zeta|x| = 0$.) В результате получается новое разбиение ромбоида $\Phi(BDEF)$ множествами $\tilde{K}_\Phi$, $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$. Это разбиение является измельчением предыдущего в том смысле, что каждый его элемент получается делением на части некоторого элемента разбиения, предшествующего рассматриваемому. Повторяя указанную операцию еще раз, мы построим измельчение ромбоида $\Phi(BDEF)$ уже множествами $\tilde{K}_\Phi$, $\bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi)$ и $\bigcup_{j=1}^4 \bigcup_{i=1}^4 \Phi_{(j)}^{-1}(\Phi_{(i)}^{-1}(\tilde{K}_\Phi))$, и т.д. Согласно описанной выше процедуре построенное на m -шаге разбиение является измельчением разбиения, построенного на $(m-1)$ -шаге. При этом множествами-делителями всякий раз являются

подмножества m -х прообразов критического множества. Разбиения, получаемые таким образом, являются согласованными в том смысле, что под действием Φ границы их элементов переходят друг в друга, а сами элементы разбиения m -го порядка действием $\Phi_{(i)}^{-1}$ преобразуются в один или несколько (до четырех) элементов разбиения $(m+1)$ -го порядка. Обозначим $\{\xi_m\}$ разбиение m -го порядка, а ξ_m и $\text{diam}(\xi_m)$ – произвольный элемент разбиения и его диаметр. Так как $\Phi_{(i)}^{-1}$ – сжатия, то $\text{diam}(\xi_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2. Для произвольных $a \in (1, 2)$ и $\zeta \in (0, (a-1)/(2a))$ соотношение

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi^{-j}((0, 0)) \right) \cap \xi_m \neq \emptyset,$$

где $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi^{-j}((0, 0))$ – множество всех прообразов точки $(0, 0)$, выполняется для любого натурального m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $d(\xi_m)$ минимальный диаметр элемента ξ_m , т.е. диаметр наибольшего диска, который может быть вписан в этот элемент. Как уже отмечалось, разбиение k -го порядка $\{\xi_k\}$ получается из разбиения $\{\xi_{k-1}\}$ делением его элементов, а $\Phi_{(j_1)}^{-1} \Phi_{(j_2)}^{-1} \dots \Phi_{(j_k)}^{-1}(\tilde{K}_{\Phi})$ – их множества-делители. Так как $\Phi_{(j)}^{-1}$, $j = 1, \dots, 4$, – сжатия, то

$$\text{diam}(\Phi_{j_1}^{-1} \Phi_{j_2}^{-1} \dots \Phi_{j_k}^{-1}(\tilde{K}_{\Phi})) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Следовательно, можно указать $k = k(m)$ такое, что для произвольного $\xi_m \in \{\xi_m\}$

$$\text{diam}(\Phi_{(j_1)}^{-1} \Phi_{(j_2)}^{-1} \dots \Phi_{(j_k)}^{-1}(\tilde{K}_{\Phi})) < d(\xi_m).$$

Но это значит, что для каждого ξ_m найдутся $k = k(\xi_m)$ и $j_1, j_2, \dots, j_k$ такие, что $\Phi_{(j_1)}^{-1} \Phi_{(j_2)}^{-1} \dots \Phi_{(j_k)}^{-1}(\tilde{K}_{\Phi}) \subset \xi_m$. Поскольку $(0, 0) \in \tilde{K}_{\Phi}$, утверждение становится очевидным.

ЛЕММА 3. Для любых $a \in ((1 + \sqrt{5})/2, 2)$ и $\zeta \in (0, (a-1)/(2a))$ разбиения $\{\xi_m\}$ ромбоида $\Phi(OABC)$ на части таковы, что для каждого натурального m найдется другое натуральное число $M = M(m)$ такое, что для любого $\xi_m \in \{\xi_m\}$ выполняется соотношение $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое m и рассмотрим разбиение $\{\xi_m\}$ множества $\Phi(OABC)$. В силу леммы 2 для произвольного $\xi_m \in \{\xi_m\}$ существует $k = k(\xi_m)$ такое, что $(0, 0) \in \text{Int}(\Phi^k(\xi_m))$. Но $\Phi: (0, 0) \rightarrow (1, 1)$ и $\tilde{K}_{\Phi} \rightarrow \Phi(\tilde{K}_{\Phi})$, а потому найдется $\gamma > 0$ такое, что множество $\Delta := U_{\gamma}((1, 1)) \cap OABC$, где $U_{\gamma}((1, 1))$ – γ -окрестность точки $(1, 1)$ в $\mathbb{R}^2$, принадлежит $\Phi^{k+1}(\xi_m)$. Посмотрим, как с ростом j изменяются размеры $\Phi^j(\Delta)$. Обозначим $L = OB \cap \Delta$, и пусть $s(L)$ – длина L . Покажем, что существует натуральное J такое, что $\Phi^J(L) = B\Phi(B)$.

Очевидно, $\Phi^j(L) \subset BE$ для любого $j = 1, 2, \dots$. При этом на каждом шаге возникает следующая альтернатива:

- а) либо $(0, 0) \cap \text{Int}(\Phi^{j-1}(L)) = \emptyset$;
- б) либо $(0, 0) \cap \text{Int}(\Phi^{j-1}(L)) \neq \emptyset$ и точка $(0, 0)$ делит $\Phi^{j-1}(L)$ на две части.

Если имеет место а), то $s(\Phi^j(L)) = as(\Phi^{j-1}(L))$, т.е. при каждой итерации длина отрезка увеличивается в a раз. Рассмотрим б). Пусть $\tilde{L}$ – большая (любая, если они одинаковые) часть отрезка $\Phi^{j-1}(L)$. Рассмотрим $\Phi(\tilde{L})$. Так как $\Phi(0) = B$, B является одним из концов отрезка $\Phi(\tilde{L})$. Если $(0, 0) \in \Phi(\tilde{L})$, то $\Phi^2(\tilde{L}) = B\Phi(B)$. Предположим обратное,

т.е. что $(0, 0) \cap \Phi(\tilde{L}) = \emptyset$ и для $\Phi(\tilde{L})$ выполняется а). Тогда $s(\Phi^2(\tilde{L})) = as(\Phi(\tilde{L})) = a^2s(L) > a^2s(\Phi^{j-1}(L))/2$. При этом одним из концов отрезка $\Phi^2(\tilde{L})$ является точка $\Phi(B)$. Допустим, что $\Phi(B)$ лежит левее и ниже точек $\Phi^{-1}(0)$, т.е. $\Phi^2(B) \in O\Phi(B)$. Это действительно так, когда a такие, что $1 - a \leq -1/a$ и, в частности, при $a \geq (1 + \sqrt{5})/2$. Тогда если $(0, 0) \in \Phi^2(\tilde{L})$, то $\Phi^3(\tilde{L}) = OB$ и $\Phi^4(\tilde{L}) = B\Phi(B)$. Если же все-таки $(0, 0) \cap \Phi^2(\tilde{L}) = \emptyset$, то для $\Phi^2(\tilde{L})$ выполняется а) и $s(\Phi^3(\tilde{L})) = a^3s(\tilde{L}) > a^3s(\Phi^{j-1}(L))/2$. Если $a^3 > 2$, то $s(\Phi^3(\tilde{L})) > 2s(\tilde{L})$, а $s(\Phi^{j+2}(L)) > 2s(\Phi^{j-1}(L))$. Как следствие, получается, что если для $\Phi^{j+2}(L)$ выполняется условие б) и $\tilde{L}$ – большая часть его, то $s(\tilde{L}) > a^3s(\tilde{L})/2 > s(\tilde{L})$ при $a > \sqrt[3]{2}$. А поскольку $(1 + \sqrt{5})/2 > \sqrt[3]{2}$, то каждая итерация отображения Φ^3 либо увеличивает длины отрезков не менее, чем в $((1 + \sqrt{5})/2)^3/2$ раз, либо же порождает отрезок, который покрывает $B\Phi(B)$. Если выбрать i так, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{3i} s(\tilde{L}) > s(B\Phi(B)),$$

то тогда отрезок $\Phi^{3i}(\tilde{L})$, очевидно, покрывает отрезок $B\Phi(B)$. Полагая $J = 3i + j$, получаем, $\Phi^J(L) = B\Phi(B)$.

Из симметрии $\Phi^J(\Delta)$ относительно $B\Phi(B)$ вытекает существование $\omega > 0$ такого, что $\Phi(OABC) \cap U_\omega(B\Phi(B)) \subset \Phi^J(\Delta)$ ($U_\omega(B\Phi(B))$ – ω -окрестность отрезка $B\Phi(B)$ в $\mathbb{R}^2$). Покажем, что существует натуральное число M такое, что $\Phi^M(\Phi(OABC) \cap U_\omega(B\Phi(B))) \supset \Phi(OABC)$. Рассмотрим прообразы $\Phi_{(1)}^{-p}(OABC)$. Так как $\Phi_{(1)}^{-p}((0, 0)) \in \text{Int}(OB)$ и $\Phi_{(1)}^{-1}$ – сжатие, существует точка $S \in \text{Int}(OB)$, к которой при $p \rightarrow \infty$ стягиваются множества $\Phi_{(1)}^{-p}(OABC)$. А потому найдется натуральное число P такое, что $\Phi_{(1)}^{-P}(OABC) \subset U_\omega(B\Phi(B))$. Отсюда вытекает, что $\Phi^P(U_\omega(B\Phi(B))) \supset OABC$ и $\Phi^{P+1}(U_\omega(B\Phi(B))) \supset \Phi(OABC)$. Полагая $M = J + P + 1$, имеем $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Так как $\Phi(BDEF) = \Phi(OABC)$, из леммы 1 вытекает, что существует окрестность U такая, что $\Phi(\text{Cl } U) \subset \text{Int } U$ и $\bigcap_{j=0}^{\infty} \Phi^j(U) = \Phi(OABC)$. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^N$ – произвольное покрытие $\Phi(OABC)$ открытыми в $\mathbb{R}^2$ дисками и r_i – диаметр i -го диска. Обозначим $r = \min\{r_i\}$ и выберем натуральное $m = m(r)$ так, чтобы $\text{diam}(\xi_m) < r/10$. Согласно лемме 3 существует $M = M(m)$ такое, что $\Phi^M(\xi_m) = \Phi(OABC)$. Следовательно, $\Phi^M(V_i) = \Phi(OABC)$ для каждого i . Последнее означает, что $\Phi^p(V_i) \cap V_j \neq \emptyset$ для любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$ и $p \geq M$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pikovsry A.S., Grassberger P. Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors // J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 4587–4597.
- [2] Losson J., Mackey M. Coupling induced statistical cycling in two diffusively coupled maps // Phys. D. 1994. V. 72. P. 324–342.
- [3] Добрынский В.А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 442–445.
- [4] Добрынский В.А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 669–680.