Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Дроздовский, Пример периферически счетного локально связного континуума, не являющегося линейно связным, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 659–666

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:17:22

УДК 515.124.552

ПРИМЕР ПЕРИФЕРИЧЕСКИ СЧЕТНОГО ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОГО КONTИНУУМА, НЕ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫМ

С. А. Дроздовский

Построен пример периферически счетного локально связного континуума, не являющегося линейно связным, имеющий значение для классификации локально связных континуумов. Результат интересен тем, что метризуемых локально связных континуумов, обладающих такими свойствами, не существует.

Библиография: 1 название.

Изложенный в статье результат касается классификации локально связных континуумов по свойствам типа связности, в частности, по периферическим свойствам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство X обладает периферическим свойством $\mathcal{P}$, если существует база открытых множеств пространства X , границы всех элементов которой обладают свойством $\mathcal{P}$.

В [1] дается подробная информация о соотношениях между классами локально связных континуумов. Там же ставится проблема: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}'$? Здесь $\mathcal{R}$ – класс всех периферически счетных локально связных континуумов, $\mathcal{A}'$ – класс всех линейно связных локально связных континуумов. Для метризуемых локально связных континуумов, которые достаточно хорошо изучены, постановка такого вопроса не имеет смысла.

Построенный ниже пример решает данную проблему отрицательно.

Описание конструкции. Построим по индукции множество, являющееся объединением счетного семейства $\{[a_{i_n}, b_{i_n}) : i_n = j_0 j_1 \dots j_n, j_0 = 0, 1 \leq j_k < \omega, 1 \leq k < \omega, n < \omega\}$ прямолинейных полуинтервалов, лежащих в плоскости $\mathbb{R}^2$. Сначала определим множество $L^1 = \bigcup \{[a_{i_n}, b_{i_n}) : n \leq 1\}$ (рис. 1). Длина отрезка $a_0 b_0$ равна 1. Множество $\{a_{0j} : 1 \leq j < \omega\} \subset [a_0, b_0]$ является последовательностью, сходящейся к точке b_0 . Для каждого j расстояние $\rho(a_{0j}, b_0) = 1/2^j$, а расстояние $\rho(a_{0j}, b_{0j}) = 1/4^j$. Все полуинтервалы $[a_{0j}, b_{0j})$ перпендикулярны $a_0 b_0$ и направлены в одну сторону. Пусть построено множество $L^m = \bigcup \{[a_{i_n}, b_{i_n}) : n \leq m\}$, $m \geq 1$. Для каждого i_m однозначно определяется отображение геометрического подобия θ_{i_m} , отображающее L^1 в $\mathbb{R}^2$, такое, что $\theta_{i_m} a_0 = a_{i_m}$, $\theta_{i_m} b_0 = b_{i_m}$, и каждый полуинтервал $[a_{i_m j}, b_{i_m j})$, $a_{i_m j} = \theta_{i_m} a_{0j}$, $b_{i_m j} = \theta_{i_m} b_{0j}$, сонаправлен с полуинтервалом $[a_{i_{m-1}}, b_{i_{m-1}})$, $i_m = i_{m-1} j_m$; L^{m+1} по определению есть $\bigcup_{i_m} \theta_{i_m} L^1 \cup L^m$. Осуществив последовательно построение

Рис. 1

всех множеств L^m для $m < \omega$, мы получим линейно связное локально связное периферически конечное множество $L = \bigcup_m L^m$.

Замыкание множества L в плоскости представляет собой компакт $M = L \cup Q$, где $Q = \bigcup_i \{q_i\}$ состоит из счетного множества “рациональных” точек $q_i = b_{i_n}$, $i = i_n$, и множества “иррациональных” точек q_i , $i = j_0 j_1 \dots j_k \dots$, мощности c . Каждая “рациональная” точка q_{i_n} , $i_n = j_0 j_1 \dots j_n$, возникает при замыкании в $\mathbb{R}^2$ ломаной $P_{i_n} = a_{j_0} a_{j_0 1} a_{j_0 2} \dots a_{j_0 j_1} \dots a_{i_n} a_{i_n 1} a_{i_n 2} a_{i_n 3} \dots$, состоящей из счетного числа звеньев, которые все за исключением конечного подмножества лежат на одной прямой. Каждая “иррациональная” точка q_i , $i = j_0 j_1 j_2 \dots$, получается при замыкании ломаной счетного числа звеньев $P_i = a_{j_0} a_{j_0 1} a_{j_0 2} \dots a_{j_0 j_1} \dots a_{j_0 j_1 j_2} \dots$. В дальнейшем принципиальных различий между “рациональными” и “иррациональными” точками возникать не будет. M является, очевидно, континуумом, обладающим перечисленными выше свойствами множества L .

Пусть $\mathcal{A} = \{A_{i_n}^j : b_{i_n} \in Q, 0 \leq j < \omega\}$ – счетное покрытие множества M замкнутыми квадратами $A_{i_n}^j$ с центрами в точках b_{i_n} и со сторонами длины $4\rho(b_{i_n}, a_{i_n j})$, $a_{i_n 0} = a_{i_n}$, параллельными отрезкам, принадлежащим M (рис. 2). В каждый квадрат $A_{i_n}^j$ впишем ортогональную сетку $B_{i_n}^j$, состоящую из включающего стороны квадрата конечного семейства отрезков, параллельных сторонам квадрата, не пересекающихся с множеством Q . Мы имеем множество $B = \bigcup \{B_{i_n}^j : A_{i_n}^j \in \mathcal{A}\}$. Ячейкой сетки мы будем называть какую-либо замкнутую ломаную, содержащуюся в B , а мелкостью $\delta(y)$ сетки в точке $y \in \mathbb{R}^2$ – точную нижнюю грань диаметров ячеек, содержащих y в своей внутренней области, т.е. в той из двух связных множеств плоскости, на которые разбивает ячейка плоскость согласно теореме Жордана, которая ограничена. Если точка y не содержится во внутренней области никакой из ячеек, будем считать, что $\delta(y) = \infty$. Мелкость $\delta(E)$ сетки B на каком-либо множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ по определению равна $\sup_{y \in E} \delta(y)$. Мелкости сеток $B_{i_n}^j$, т.е. величины $\delta(A_{i_n}^j)$, мы выберем позднее. Расположение семейств

ва $\mathcal{A}$ на плоскости таково, что $[B]_{\mathbb{R}^2} \setminus B = Q$. Компакт $N = [L \cup B]_{\mathbb{R}^2} = L \cup B \cup Q$, очевидно, обладает всеми перечисленными свойствами компакта M .

Рис. 2

Построим теперь более сложные чем M и N компактификации Y и Z множеств L и $L \cup B$ соответственно с общим наростом. По определению $Y = f^{-1}M$, $Z = f^{-1}N$, где $f: Z \rightarrow N$ есть такое отображение, что $f|_{L \cup B} = \text{id}$, а для каждого i $f^{-1}q_i = I_i$, где $I_i = [0, 1]_i$ — единичный прямолинейный отрезок; L и B мы определим как открытые подмножества пространства Z . Для того чтобы ввести топологию на множестве Z , осталось только определить базы окрестностей точек нароста $\bigcup_i I_i$. Топологическое пространство Y определяется как подпространство Z .

Для каждого i мы выберем специальную гомеоморфную копию $\eta_i(\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\})$ пространства $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ и с ее помощью построим базу окрестностей точек элемента I_i .

Для каждого $i_n = i_{n-1}j_n$ обозначим символом $M_{i_n}^+$ множество $[\bigcup\{[a_{i_m}, b_{i_m}] : i_m = i_n j_{n+1} \dots j_m, n \leq m < \omega\}]_{\mathbb{R}^2}$, а символом $M_{i_n}^-$ для $n \geq 1$ множество $[[a_{i_n}, b_{i_{n-1}}] \cup \bigcup\{M_{i_m}^+ : i_m = i_{n-1}j_m, j_n < j_m < \omega\}]_{\mathbb{R}^2}$. Эти множества являются “поддеревьями” “деревя” M с началом в точке a_{i_n} . Поскольку при дальнейшем рассмотрении множества $M_{i_n}^+$ и $M_{i_n}^-$ не будут принципиально отличаться друг от друга, мы будем обозначать их общим символом M_{i_n} . Каждому M_{i_n} поставим в соответствие содержащий его замкнутый прямоугольник T_{i_n} со сторонами, параллельными отрезкам из M , удовлетворяющий условию: если $M_{i_n} = M_{i_n}^+$, $i_n = i_{n-1}j_n$, то $(T_{i_n} \cap M) \setminus M_{i_n} \subset (a_{i_{n-1}(j_n-1)}, a_{i_{n-1}(j_n+1)})$; если $M_{i_n} = M_{i_n}^-$, то $(T_{i_n} \cap M) \setminus M_{i_n} \subset [a_{i_n}, a_{i_{n-1}}]$. Для каждого T_{i_n} определим гомеоморфизм $\varphi_{i_n}: T_{i_n} \rightarrow T_{i_n}$, такой, что $\varphi_{i_n}|_{\partial T_{i_n}} = \text{id}$, $\text{diam}(\varphi_{i_n} M_{i_n}) \leq \alpha_{i_n}$, где α_{i_n} — константа, которую мы выберем позднее. Помимо этого, функция

$$\frac{\rho(\varphi_{i_n} x, \varphi_{i_n} y)}{\rho(x, y)}, \quad x \neq y, \quad x, y \in T_{i_n},$$

ограничена. Описание конкретной конструкции такого отображения мы рассматривать не будем.

Пусть для данного i $P_i = p_0^i p_1^i p_2^i \dots$ — однозначно определенная выше ломаная, соответствующая точке $q_i \in Q$ (рис. 3). От каждой вершины p_j^i этой ломаной ответвляется

один элемент M_{i_n} , который мы обозначим M_j^i . Учитывая дизъюнктность семейства $\mathcal{T}_i = \{T_{i_n} : M_{i_n} = M_j^i, j < \omega\}$, определим гомеоморфизм $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ через его сужения: $\varphi_i|_{\mathbb{R}^2 \setminus (\cup \mathcal{T}_i \cup \{q_i\})} = \text{id}$, $\varphi_i|_{T_{i_n}} = \varphi_{i_n}$ для каждого $T_{i_n} \in \mathcal{T}_i$. Очевидно, что $\varphi_i|_{P_i} = \text{id}$.

Рис. 3

Построим гомеоморфизм $\psi_i : \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$, “выпрямляющий” ломаную P_i . Пусть l — та из двух прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через точку q_i и составляющих угол $\pi/4$ с $a_0 b_0$, которая пересекает отрезок $a_0 b_0$ ближе к точке a_0 . Присоединим к ломаной P_i дополнительное звено $p^i p_0^i$, перпендикулярное $p_0^i p_1^i$, где $p \in l$. Получим ломаную P'_i . По определению $\psi_i|_{P'_i}$ есть ортогональное плоское проектирование P'_i на прямую l . Продолжим гомеоморфизм $\psi_i|_{P'_i}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ как “сдвиг”. Через каждую точку $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ проведем прямую l_y , перпендикулярную l . Если l_y пересекает P'_i в некоторой точке z ,

то $\psi_i y$ принадлежит прямой zy , $\rho(\psi_i y, \psi_i z) = \rho(y, z)$, $\psi_i y$ лежит по ту же сторону от $\psi_i P'_i$, что и y от P'_i . Если $l_y \cap P'_i = \emptyset$, то $\psi_i y = y$.

Построим гомеоморфизм $\gamma_i: \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$. Выберем из последовательности $\{\psi_i p^i_j : j < \omega\}$ такую подпоследовательность $\{\psi_i p^i_{j_k}\}$, что $j_{k+1} - j_k = k$ для каждого $k < \omega$. Для всех j, k , $j_{k-1} \leq j < j_k$, сужения $\gamma_i|_{[\psi_i p^i_j, \psi_i p^i_{j_{k+1}}]}$ определим как геометрическое подобие с такими коэффициентами, что $\rho(\gamma_i \psi_i p^i_j, \gamma_i \psi_i p^i_{j_{k+1}}) = \rho(\gamma_i \psi_i p^i_{j_{k-1}}, \gamma_i \psi_i p^i_{j_k}) = \rho(\psi_i p^i_{j_{k-1}}, \psi_i p^i_{j_k})$. Кроме того, $\gamma_i \psi_i P_i \subset l$, $[\gamma_i \psi_i P_i] = \gamma_i \psi_i P_i \cup \{q_i\}$, отображение γ_i сохраняет линейный порядок узлов ломаной P_i . Разобьем $\mathbb{R}^2$ на полосы, разграниченные прямыми l_j , проходящими через узлы $\psi_i p^i_j$ ломаной $\psi_i P_i$ и перпендикулярными ей. Сначала продолжим $\gamma_i|_{\psi_i P_i}$ на каждую прямую l_j как параллельный перенос. Пусть $[y_1, y_2]$ – какой-либо отрезок, параллельный l с концами, принадлежащими соседним разграничивающим прямым. Продолжим $\gamma_i|_{\{y_1, y_2\}}$ до подобия $\gamma_i|_{[y_1, y_2]}$. Сужение γ_i на две крайние полосы, являющиеся полуплоскостями, определим как изометрию. Гомеоморфизм γ_i построен.

Определим гомеоморфизм μ_i , действующий на $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$, оставляющий неподвижными все точки множества $\gamma_i \psi_i P_i$. Пусть F есть объединение двух замкнутых в $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ острых углов без общей вершины, находящейся в точке q_i , симметричных относительно l . Причем величины этих углов таковы, что семейство $\{A^j_{i_n} : a_{i_n} = p^i_j, j < \omega\}$ покрывает F . Сужение μ_i на каждый из лучей, составляющих границу F в $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$, есть параллельный перенос в направлении, перпендикулярном прямой l , причем множество $\mu_i F$ так же симметрично относительно l , как и F , $\rho(\mu_i \partial F, l) = 1/2$; $\mu_i|_{\partial F}$ продолжается на $\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}$ подобно тому, как было продолжено отображение γ_i . На каждый отрезок $[y_1, y_2]$, $\{y_1, y_2\} \subset \partial F$, перпендикулярный l , $\mu_i|_{\{y_1, y_2\}}$ продолжается как подобие, на каждую компоненту связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus (\{q_i\} \cup F)$ $\mu_i|_{\partial F}$ продолжается как изометрия. Заметим, что $\mu_i(\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\})$ является плоскостью без единичного отрезка I_i .

Определим последний гомеоморфизм $\xi_i: \mathbb{R}^2 \setminus I_i \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus I_i$. Отображение, обратное к $\xi_i|_{\gamma_i \psi_i P_i}$, представляет собой ортогональное проектирование на прямую l . Для каждого $k < \omega$ образ $\xi_i(\gamma_i \psi_i [p^i_{j_k}, p^i_{j_{k+1}}])$ является отрезком, $\xi_i|_{\gamma_i \psi_i p^i_{j_{2k}}} = \text{id}$, все точки $\xi_i \gamma_i \psi_i p^i_{j_{(4k+1)}}$ лежат по одну сторону, а все точки $\xi_i \gamma_i \psi_i p^i_{j_{(4k+3)}}$ лежат по другую сторону от прямой l на расстоянии от l равном $1/2$. Гомеоморфизм $\xi_i|_{\gamma_i \psi_i P_i}$ продолжается на всю область определения аналогично тому, как это делалось в предыдущих двух случаях. На перпендикулярные прямой l отрезки $[y_1, y_2]$, $y_1 \in \gamma_i \psi_i P_i$, $y_2 \in \mu_i \partial F$, $\xi_i|_{\{y_1, y_2\}}$ продолжается как подобие, $\xi_i|_{\mathbb{R}^2 \setminus (I_i \cup \mu_i F)} = \text{id}$.

Мы построили гомеоморфизм $\eta_i = \xi_i \mu_i \gamma_i \psi_i \varphi_i$. Произведя замыкание в $\mathbb{R}^2$, получим континуумы $[\eta_i(M \setminus \{q_i\})]_{\mathbb{R}^2} = \eta_i M \cup I_i$, $I_i = [0, 1]_i$, $[\eta_i(N \setminus \{q_i\})]_{\mathbb{R}^2} = \eta_i N \cup I_i$.

Определим базу окрестностей в Z произвольной точки $x \in I_i$. Элементами базы будем считать множества вида $(U \cap I_i) \cup f^{-1} \eta_i^{-1}(U \cap \eta_i(N \setminus \{q_i\}))$, где U – какая-нибудь окрестность точки x в $\mathbb{R}^2$. Топология в Y и Z введена. Нетрудно проверить, что f – совершенное и монотонное непрерывное отображение. Поэтому $Z = f^{-1}N$ и $Y = f^{-1}M$ являются континуумами.

Подберем теперь постоянные α_{i_n} отображений φ_{i_n} и мелкости сеток B_{i_n} для всех $i_n = j_0 j_1 \dots j_n$. Назовем коэффициентом искажения $\varepsilon_h(E)$ непрерывного отображе-

ния $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^2$ величину

$$\sup_{\{y_1, y_2\} \subseteq E} \frac{|\rho(h(y_2), h(y_1)) - \rho(y_2, y_1)|}{\rho(y_2, y_1)}, \quad y_1 \neq y_2,$$

которая может принимать бесконечное значение. Конструкция описанных выше гомеоморфизмов такова, что если h_i — одно из отображений $\varphi_i, \psi_i, \gamma_i, \mu_i, \xi_i$, то для каждого множества $E \subset \mathbb{R}^2 \setminus Q$ такого, что $\rho(E, Q) > 0$, выполняются соотношения $\varepsilon_{h_i}(E) < \varepsilon(E) < \infty$ и $\rho(h_i(E), I_i) > \rho(E) > 0$, где $\varepsilon(E)$ и $\rho(E)$ — не зависящие от i величины. Кроме того, каждое E содержит конечное число вершин ломаных P_i . Конкретное доказательство этих свойств мы проводить не будем. Пользуясь этими фактами, подберем для каждого i_n такую константу α_{i_n} отображения φ_{i_n} , чтобы для всех i и j таких, что $p_j^i = a_{i_n}$, выполнялись свойства:

$$\text{diam}(\eta_i M_j^i) < \rho^2(\eta_i p_j^i, \eta_i p_k^i) \quad \text{для всех } k \neq j; \quad (1)$$

$$\text{diam}(\eta_i M_j^i) < \rho^2(\eta_i p_j^i, [\eta_i p_k^i, \eta_i p_{k+1}^i]) \quad \text{для всех } p_k^i \neq p_j^i \neq p_{k+1}^i. \quad (2)$$

Ячейкой сетки $\eta_i B$ мы считаем образ какой-либо ячейки сетки B . Мелкость δ определяется аналогично тому, как это было сделано для сетки B . Так как для каждого i_n и j множество $D_{i_n}^j = A_{i_n}^j \setminus (\bigcup_{m > n, k, i_m} A_{i_m}^k \cup A_{i_n}^{j+1})$ находится на положительном расстоянии от Q , пользуясь вышеупомянутыми свойствами гомеоморфизмов η_i , для каждого заданных i_n и j мы выберем сетку $B_{i_n}^j$ настолько мелкой, чтобы для всех i были верны следующие неравенства:

$$\delta(\eta_i D_{i_n}^j) < \text{diam}^2(\eta_i M_k^i) \quad \text{для всех таких } k, \text{ что } M_k^i \cap D_{i_n}^j \neq \emptyset;$$

$$\delta(\eta_i D_{i_n}^j) < \rho^2(\eta_i p_m^i, \eta_i p_k^i) \quad \text{для всех } k \neq m \text{ и таких } m, \text{ что } \eta_i p_m^i - \text{ближайшая вершина ломаной } \eta_i P^i \text{ к какой-либо точке из } \eta_i D_{i_n}^j;$$

$$\delta(\eta_i D_{i_n}^j) < \rho^2([\eta_i p_m^i, \eta_i p_{m+1}^i], [\eta_i p_k^i, \eta_i p_{k+1}^i]) \quad \text{для всех таких } m \text{ и } k, \text{ что } [\eta_i p_m^i, \eta_i p_{m+1}^i] - \text{ближайшее звено ломаной } \eta_i P^i \text{ к какой-либо точке из } \eta_i D_{i_n}^j, \text{ а } [p_k^i, p_{k+1}^i] \cap [p_m^i, p_{m+1}^i] = \emptyset. \text{ Поскольку } \bigcup \mathcal{A} \setminus Q = \bigcup_{i_n, j} D_{i_n}^j, \text{ мы добились того, что для любой точки } x \in \bigcup \mathcal{A} \setminus Q \text{ и каждого } i \text{ выполняются следующие свойства:}$$

$$\delta(\eta_i x) < \text{diam}^2(\eta_i M_j^i) \quad (3)$$

для всех j таких, что $M_j^i \ni x$;

$$\delta(\eta_i x) < \rho^2([\eta_i p_m^i, \eta_i p_{m+1}^i], [\eta_i p_k^i, \eta_i p_{k+1}^i]), \quad (4)$$

где $[\eta_i p_m^i, \eta_i p_{m+1}^i]$ — ближайшее к x звено ломаной $\eta_i P^i$, для всех таких k , что $[p_k^i, p_{k+1}^i] \cap [p_m^i, p_{m+1}^i] = \emptyset$.

Множества Y и Z построены. Пусть $g: Y \rightarrow gY$ — какой-нибудь гомеоморфизм, обладающий свойством: $g|_{\bigcup_i I_i} = \text{id}$, $gL \cap (L \cup B) = \emptyset$. Окончательную конструкцию — пространство X определим как множество $Z \cup gY$ с топологией прямой суммы топологических пространств Z и gY . Так как Z и Y — континуумы и $Z \cap gY \neq \emptyset$, X тоже является континуумом.

Доказательство. Докажем, что пространство X локально связно и периферически счетно. Поскольку $X = L \cup B \cup gL \cup \bigcup_i I_i$, а локально связное и периферически конечное подмножество $L \cup B \cup gL$ открыто в X , достаточно доказать эти свойства для точек множества $\bigcup_i I_i$.

Свойства (1)–(4), а также тот факт, что $\rho(\eta_i p_k^i, \eta_i p_{k+1}^i) \rightarrow 0$ при $\rho(\eta_i p_k^i, I_i) \rightarrow 0$ или $k \rightarrow \infty$, позволяют построить произвольно малую окрестность V точки $\eta_i x = x$ в $\eta_i(N \setminus \{q_i\}) \cup I_i$, связную и со счетной границей. Детальное доказательство возможности такого построения мы здесь рассматривать не будем. Окрестность V строится следующим образом.

Пусть H – открытый в $\mathbb{R}^2 = \eta_i(\mathbb{R}^2 \setminus \{q_i\}) \cup I_i$ прямоугольник, содержащий точку x , симметричный относительно прямой, содержащей I_i . Выберем горизонтальный и вертикальный размеры прямоугольника H не превосходящими заданной произвольно малой величины, достаточно малыми и соотносящимися таким образом, чтобы результаты дальнейших построений обладали соответствующими свойствами.

Каждая компонента связности множества $\eta_i P_i \cap H$ в силу выбора H содержит хотя бы одну вершину $\eta_i p_j^i$. Для каждого такого j , что $\rho(\eta_i p_j^i, H) < 2 \operatorname{diam}(\eta_i M_j^i)$, определим открытый прямоугольник $S_j^i \supset \eta_i M_j^i$, пересекающий H , со сторонами, параллельными сторонам H , для которого $\operatorname{diam}(S_j^i) < 3 \operatorname{diam}(\eta_i M_j^i)$. Присоединим к H все такие квадраты. Получим открытое множество G , которое представляет собой сцепленную систему связанных множеств и потому связно. Прямоугольники S мы подберем таким образом, чтобы каждая компонента связности множества $\eta_i P_i \cap G$ содержала компоненту связности множества $\eta_i P_i \cap H$. Кроме того, $\rho(\eta_i M_j^i, G) > \operatorname{diam}(\eta_i M_j^i)$ для каждого $\eta_i M_j^i \not\subseteq G$. Все это достигается за счет малости размеров H и за счет быстрого уменьшения $\operatorname{diam}(\eta_i M_j^i)$ при $\rho(\eta_i p_j^i, I_i) \rightarrow 0$.

Ячейкой сетки $\eta_i B$ мы будем называть образ какой-либо ячейки сетки B под действием гомеоморфизма η_i . Мелкость для $\eta_i B$ определяется точно так же, как это было сделано для B . Для каждой ячейки C сетки $\eta_i B$ определим открытый многоугольник $S(C) \supset C$, удовлетворяющий условиям: множество $S(C) \cap \eta_i(B \cup P_i)$ связно, множество $\partial S(C) \cap \eta_i(N \setminus \{q_i\})$ конечно, $\partial S(C) \cap \eta_i(Q \setminus \{q_i\}) = \emptyset$, $\operatorname{diam}(S(C)) < 2 \operatorname{diam}(C)$. Обозначим через G_1 и G_2 пересечения G соответственно с левой и правой открытыми полуплоскостями, на которые разбивает плоскость прямая, содержащая отрезок I_i . Мы имеем $G = G_1 \cup (H \cap I_i) \cup G_2$. Построим счетные покрытия $S_1 = \{S(C) : C \in \mathcal{C}_1\}$ и $S_2 = \{S(C) : C \in \mathcal{C}_2\}$ множеств G_1 и G_2 соответственно. Покрытия S_1 и S_2 обладают следующими свойствами. Для каждой ячейки $C \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ $\operatorname{diam}(C) \leq \rho^2(y, I_i)$ для некоторой точки $y \in C \cap G \neq \emptyset$. Множества $\cup S_k \cap \eta_i(B \cup P_i)$, $k = 1, 2$, связны. Каждая компонента связности множества $\cup S_1 \cap \eta_i P_i$ содержит компоненту связности множества $G \cap \eta_i P_i$. Каждое $\eta_i M_j^i$ либо является подмножеством множества G , либо не пересекает $\cup S_1$. Эти свойства достигаются выбором прямоугольника H за счет быстрого уменьшения $\delta(y)$ при $\rho(y, I_i) \rightarrow 0$.

Докажем, что окрестность $V = (\cup S_1 \cup \cup S_2 \cup H) \cap (\eta_i(N \setminus \{q_i\}) \cup I_i)$ связна. Как уже известно, множество $V_2 = V \cap (\cup S_2) = (\cup S_2) \cap \eta_i(B \cup P_i)$ связно; $V_1 = V \cap (\cup S_1) = (\cup S_1) \cap (\eta_i(B \cup P_i) \cup \{M_j^i : j < \omega\})$, но каждое M_j^i либо не пересекает V_1 , либо является подмножеством V и пересекает $\eta_i(B \cup P_i)$. Следовательно, V_1 связно. Поскольку $[V_1]_{R^2} \cap [V_2]_{R^2} \cap H \cap I_i \neq \emptyset$, V тоже связно.

Докажем, что множество ∂V счетно. Поскольку семейства S_1 и S_2 счетны, а каждое

множество $\partial S(C)$ конечно, множество $\partial V \setminus I_i$ счетно. Из свойств $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ следует, что $\sup_{y \in A(\rho_0)} \rho(y, H) \rightarrow 0$ при $\rho_0 \rightarrow 0$, где $A(\rho_0) = \{y \in V \setminus H : \rho(y, I_i) < \rho_0\}$. Поэтому, очевидно, что $\partial V \cap I_i = \partial H \cap I_i$ состоит из двух точек. Счетность ∂V доказана.

Вполне очевидно, что открытое множество $f^{-1}\eta_i^{-1}V = W$, так же как и V , связно и имеет счетную границу в Z , а также то, что окрестность $U = W \cup g(W \cap Y)$ имеет счетную границу в X . Каждая компонента связности множества $V \cap \eta_i(M \setminus \{q_i\})$ содержит хотя бы одну точку множества $\eta_i Q$. Следовательно, каждая компонента связности множества $W \cap Y = f^{-1}\eta_i^{-1}V \cap f^{-1}M$ и соответственно множества $g(W \cap Y)$ содержит хотя бы один элемент I_i , принадлежащий связному множеству W . Поэтому окрестность U связна.

Такие множества как U составляют базу окрестностей точки x в пространстве X . Периферическая счетность и локальная связность X доказаны.

Докажем, что пространство X не является линейно связным. Пусть l – линия в X , соединяющая точку $x \in gY \setminus \bigcup_i I_i$ с точкой $y \in Z$. Поскольку подмножества $Z \setminus \bigcup_i I_i$ и $gY \setminus \bigcup_i I_i$ открыты, $X = \bigcup_i I_i \cup Z \setminus \bigcup_i I_i \cup gY \setminus \bigcup_i I_i$ и $Z \cap gY \setminus \bigcup_i I_i = \emptyset$, то $l \cap (\bigcup_i I_i) \neq \emptyset$, так как X связно. Пусть $z \in I_j$ – “ближайшая по линии l ” к точке x точка множества $l \cap (\bigcup_i I_i)$. Отсюда следует, что gY , а следовательно, и Y содержит линию l' , $l' \cap (\bigcup_i I_i) = \{z\}$, соединяющую точку $x \notin I_j$ с точкой $z \in I_j$, что очевидно невозможно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nikiel J., Tunçali H. M., Tymchatyn E. D. A locally connected rim-countable continuum which is the continuous image of no arc // Top. Appl. 1991. V. 42. P. 83–93.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

25.12.1995

Исправленный вариант

01.10.1998