Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Возникновение собственных значений для $\mathcal{PT}$ -симметричного оператора в тонкой полосе, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 809–823

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:43:51

Возникновение собственных значений для $\mathcal{PT}$ -симметричного оператора в тонкой полосе

Д. И. Борисов

В работе рассматривается оператор Шрёдингера в тонкой бесконечной полосе с $\mathcal{PT}$ -симметричными краевыми условиями и локализованным потенциалом. Рассматривается случай, когда на краю существенного спектра эффективного одномерного оператора присутствует виртуальный уровень. Получены достаточные условия, гарантирующие трансформацию этого уровня в изолированное собственное значение, для которого вычислены первые члены асимптотического разложения. Также получены достаточные условия отсутствия такого собственного значения.

Библиография: 38 названий.

DOI: 10.4213/mzm10974

1. Введение

В настоящей работе исследуется модель эллиптического оператора в тонкой бесконечной полосе с $\mathcal{PT}$ -симметричными краевыми условиями. Такая модель ранее была предложена в [1] и изучалась далее в [2]. Мотивация рассмотрения такой модели связана с бурным развитием в последние 15 лет теории $\mathcal{PT}$ -симметричных операторов; см., например, работы [3]–[17], а также обзоры литературы в этих статьях. Само понятие $\mathcal{PT}$ -симметричности вводится как коммутирование исследуемого оператора с заданной композицией $\mathcal{PT}$, где T – оператор комплексного сопряжения: $(Tu)(x) = \overline{u(x)}$, а P – некоторый заданный оператор, как правило, со свойством $P^2 = I$, где I – единичный оператор. Такое свойство является в определенном смысле обобщением понятия самосопряженности, так как нередко для рассматриваемых операторов выполнено $H^* = PHP$, а также для ряда $\mathcal{PT}$ -симметричных операторов было обнаружено, что они имеют вещественный спектр, хотя и не являются ни самосопряженными, ни симметричными операторами. Отметим еще, что в подавляющем большинстве работ по $\mathcal{PT}$ -симметричным дифференциальным операторам $\mathcal{PT}$ -симметричность обусловлена особой структурой коэффициентов оператора.

В [18] была предложена модель оператора, в которой $\mathcal{PT}$ -симметричность определялась краевыми условиями, а не коэффициентами уравнения. В качестве области

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-97009), гранта Президента РФ для молодых ученых-докторов наук (МД-183.2014.1)

выбиралась плоская бесконечная полоса, в которой рассматривался лапласиан с краевыми условиями третьего типа. При этом коэффициент в этих краевых условиях был чисто мнимым, что и обеспечивало $\mathcal{PT}$ -симметричность рассматриваемого оператора. Для такого оператора был доказан ряд свойств общего характера. Отдельно было проведено исследование эффекта возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра при малых локализованных возмущениях коэффициента в граничном условии. Схожие результаты были получены в [19], где в качестве возмущения брался малый $\mathcal{PT}$ -симметричный потенциал, и в [20], где возмущением была пара малых отверстий с краевым условием Неймана.

В работе [1] модель из [18] рассматривалась в предположении, что ширина полосы мала, т.е. речь шла о тонкой области. Мотивацией для такого исследования был, с одной стороны, устойчивый интерес к задачам в тонких областях. Не имея возможности перечислить огромное число работ, отметим лишь монографии [21], [22] и статьи [23]–[31]; см. также библиографию в этих работах. С другой стороны, задачи в тонких областях возникают при моделировании наноструктур (см., например, [27], [29], [30]). Поэтому вопрос об исследовании $\mathcal{PT}$ -симметричных операторов в тонких областях представляется достаточно интересным. Основной результат статьи [1] – описание эффективного оператора и доказательство сходимости резольвенты исходного оператора к резольвенте эффективного в операторной норме. Помимо сходимости резольвент также были установлены оценки скорости сходимости. Схожие результаты, но уже для общего эллиптического оператора с переменными коэффициентами были получены в [2]. Кроме того, в последней статье была доказана сходимость спектра исходного оператора к спектру эффективного. В частности, было показано, что к изолированному собственному значению эффективного оператора сходятся изолированные собственные значения исходного оператора с сохранением совокупной кратности, хотя исходный оператор не является даже симметричным. Для таких собственных значений исходного оператора и для соответствующих собственных функций были построены полные асимптотические разложения.

В настоящей работе мы рассматриваем оператор Шрёдингера с локализованным потенциалом в тонкой полосе с $\mathcal{PT}$ -симметричными краевыми условиями. Эффективный оператор здесь описывается результатами [2]. Рассматривается поведение изолированных собственных значений в окрестности края существенного спектра. А именно, предполагается, что на краю существенного спектра эффективного оператора присутствует виртуальный уровень. Тогда при переходе к исходному оператору этот виртуальный уровень может превращаться в изолированное собственное значение. Основной полученный нами результат – достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений у исходного оператора и первые члены их асимптотических разложений в случае существования. Асимптотическое разложение выписывается в терминах малого параметра – ширины полосы. Автору настоящей статьи не известны работы, где подобный эффект исследовался бы даже для самосопряженных операторов в тонких областях.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$, ε – малый положительный параметр, α – некоторая положительная константа, $\Omega_\varepsilon := \{x : 0 < x_2 < \varepsilon\}$ – тонкая бес-

конечная полоса. В области Ω_ε мы рассматриваем оператор Шрёдингера

$$\mathcal{H}_\varepsilon := -\Delta + V_\varepsilon$$

с $\mathcal{PT}$ -симметричными краевыми условиями

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha\right)u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon. \quad (2.1)$$

Здесь α – некоторая ненулевая константа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Потенциал V_ε задается в виде

$$V_\varepsilon(x) = V\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}\right),$$

где $V(x_1, \xi)$ – непрерывная в $\mathbb{R} \times [0, 1]$ комплекснозначная функция, удовлетворяющая равномерной оценке

$$|V(x_1, \xi)| \leq C e^{-a|x_1|} \quad \text{в } \mathbb{R} \times [0, 1], \quad (2.2)$$

где C , a – некоторые положительные константы, не зависящие от x и ξ . Также предполагается, что

$$V(x_1, 1 - \xi) = \overline{V(x_1, \xi)}. \quad (2.3)$$

Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ рассматривается как неограниченный в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ на области определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{H}_\varepsilon) := \{u \in W_2^2(\Omega_\varepsilon) : \text{выполнено условие (2.1)}\}.$$

Согласно [2; теорема 2.1] оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ m -секториален, $\mathcal{T}$ -самосопряжен и $\mathcal{P}$ -псевдоэрмитов, т.е.

$$\mathcal{H}_\varepsilon^* = \mathcal{T}\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{T}, \quad \mathcal{H}_\varepsilon^* = \mathcal{P}\mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{P}.$$

Здесь через $\mathcal{T}$ обозначаем оператор комплексного сопряжения: $(\mathcal{T}u)(x) = \overline{u(x)}$, а через $\mathcal{P}$ – оператор отражения: $(\mathcal{P}u)(x) = u(x_1, \varepsilon - x_2)$. Кроме того, оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ коммутирует с парой $\mathcal{PT}$:

$$\mathcal{PT}\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H}_\varepsilon\mathcal{PT}.$$

Аналогично [18] нетрудно проверить, что существенный спектр оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ дается равенством

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_\varepsilon) = [\alpha^2, +\infty).$$

Под *существенным спектром* мы понимаем здесь множество таких $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\mathcal{H} - \lambda$ не является фредгольмовым. Эквивалентным определением здесь также будет определение непрерывного спектра из книги [32; гл. I, § 1.1], данное в терминах характеристических последовательностей.

Согласно [2; теорема 2.2] оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ сходится в равномерной резольвентной норме к эффективному оператору

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + V_0 + \alpha^2, \quad V_0(x_1) := \int_0^1 V(x_1, \xi) d\xi. \quad (2.4)$$

Оператор $\mathcal{H}_0$ рассматривается в $L_2(\mathbb{R})$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Отметим, что в силу условия (2.3) потенциал V_0 вещественный, а потому оператор $\mathcal{H}_0$ самосопряжен.

Точная формулировка результата теоремы 2.2 из [2] в применении к нашему оператору выглядит следующим образом. Пусть $\mathcal{P}_\varepsilon$ – проектор из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\mathbb{R})$:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon f)(x_1) = \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon f(x_1, t) dt.$$

Положим $L_\varepsilon := \mathcal{P}_\varepsilon L_2(\Omega_\varepsilon)$, $L_\varepsilon^\perp$ – ортогональное дополнение к L_ε в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. В смысле этого разложения оператор $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{P}_\varepsilon$, действующий из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, можно естественным образом расширить до оператора $(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{P}_\varepsilon \oplus 0$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. Теорема 2.2 из [2] в применении к нашему случаю дает следующую оценку:

$$\|(\mathcal{H}_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{P}_\varepsilon \oplus 0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon,$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)}$ – норма оператора, действующего из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, а C – некоторая константа, не зависящая от ε . Кроме того, верна сходимость спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ к спектру оператора $\mathcal{H}_0$ [2; теорема 2.3]. А именно, часть спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, лежащая внутри некоторого компакта на комплексной плоскости, при достаточно малых ε оказывается в малой окрестности части спектра оператора $\mathcal{H}_0$, лежащей в том же компакте.

Так как функция V_0 стремится к нулю на бесконечности, существенный спектр оператора $\mathcal{H}_0$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$:

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_0) = [\alpha^2, +\infty) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_\varepsilon).$$

В настоящей работы рассматривается случай, когда на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ присутствует виртуальный уровень. Основная цель исследований – выяснить, что происходит с этим виртуальным уровнем при переходе от оператора $\mathcal{H}_0$ к оператору $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Напомним вначале, что понимается под виртуальным уровнем для оператора $\mathcal{H}_0$. Будем говорить, что на краю α^2 существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ присутствует *виртуальный уровень*, если существует нетривиальное ограниченное решение уравнения

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_0\right)\psi_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Так как данное уравнение одномерное, а функция V_0 экспоненциально убывает на бесконечности, условие нетривиальности и ограниченности для функции ψ_0 эквивалентно соотношениям

$$\psi_0(x) \rightarrow c_\pm^0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (c_+^0)^2 + (c_-^0)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Последнее равенство для констант $c_\pm^0$ является условием нормировки, так как описанное решение ψ_0 определено с точностью до умножения на ненулевую константу.

Наш основной результат выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ присутствует виртуальный уровень. Обозначим

$$k_1 := -\alpha \int_{\mathbb{R} \times [0,1]} \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \psi_0^2(x_1) \operatorname{Im} V(x_1, \xi) dx_1 d\xi. \quad (2.7)$$

Если $k_1 > 0$, то существует единственное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, сходящееся к α^2 при $\varepsilon \rightarrow +0$. Это собственное значение вещественное и простое. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \alpha^2 - \varepsilon^2 k_1^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.8)$$

Если либо $k_1 < 0$, либо на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ отсутствует виртуальный уровень, то оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ не имеет собственных значений, сходящихся к α^2 при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Кратко обсудим сформулированную теорему. Во-первых, наличие виртуального уровня является необходимым условием для возникновения изолированного собственного значения из края существенного спектра. Во-вторых, это условие не является достаточным. Достаточным условием является положительность константы k_1 из (2.7), которая затем определяет первые члены асимптотического разложения в (2.8). Отрицательность константы k_1 гарантирует отсутствие возникающих собственных значений. Подчеркнем еще, что из края существенного спектра может возникнуть не более одного собственного значения, которое необходимо будет вещественным и простым.

Теорема 1 оставляет открытым вопрос о том, что происходит если $k_1 = 0$. Наша техника позволяет на него ответить. А именно, в этом случае следует подсчитать константу k_2 , которая будет определять коэффициент перед ε^4 в асимптотике (2.8). Знак этой константы по аналогии с k_1 будет определять возникновение или отсутствие изолированных собственных значений возле края существенного спектра. Вместе с тем, данная константа вновь может быть как положительной, так и отрицательной. Поэтому в случае $k_1 = 0$ вновь возможно как возникновение, так и отсутствие собственных значений в окрестности края существенного спектра.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство удобно разбить на несколько этапов, каждому из которых далее мы посвящаем отдельный пункт. Вначале мы рассмотрим случай, когда на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ присутствует виртуальный уровень.

3.1. Модельное уравнение. В уравнении на собственные значения $\mathcal{H}_\varepsilon \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon$ положим $\lambda_\varepsilon = \alpha^2 - k_\varepsilon^2$ и перепишем его затем к краевой задаче для уравнения

$$(-\Delta - \alpha^2 + k_\varepsilon^2)\psi_\varepsilon = -V\psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (3.1)$$

с краевым условием (2.1). Так как мы рассматриваем собственные значения λ_ε вблизи края существенного спектра α^2 , параметр k_ε следует считать достаточно малой величиной.

Для исследования задачи (3.1) рассмотрим вначале модельную краевую задачу для уравнения

$$(-\Delta - \alpha^2 + k^2)u = f, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (3.2)$$

с краевым условием (2.1). Здесь k – малый комплексный параметр, $f \in L_2(\Omega_\varepsilon)$ – некоторая функция. Для однозначной разрешимости этой краевой задачи следует описать поведение решения на бесконечности. Данное поведение мы фиксируем,

явно решая краевую задачу (3.2), (2.1) с помощью разделения переменных [18; лемма 4.3]:

$$u(x) = \mathcal{B}_0^\varepsilon(k)f + \mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^\varepsilon(k)f &= \frac{A_0\phi_0(x_2)}{2k} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-k|x_1-y_1|} \phi_0(y_2) f(y) dy, \\ \mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j\phi_j(x_2)}{2\sqrt{\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2}} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-\sqrt{\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2}|x_1-y_1|} \phi_j(y_2) f(y) dy, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \phi_0(x_2) &:= e^{-i\alpha x_2}, & \phi_j(x_2) &:= \cos \mu_j x_2 - i \frac{\alpha}{\mu_j} \sin \mu_j x_2, \\ A_0 &:= \frac{2i\alpha}{1 - e^{-2i\alpha\varepsilon}}, & A_j &= \frac{2\mu_j^2}{(\mu_j^2 - \alpha^2)\varepsilon}, & \mu_j &= \frac{\pi j}{\varepsilon}, & j &\geq 1. \end{aligned}$$

Решение, описываемое приведенными выше формулами, экспоненциально убывает при $\operatorname{Re} k > 0$ и экспоненциально растет при $\operatorname{Re} k < 0$.

Отметим еще, что согласно лемме 4.1 в [18] любая функция $g \in L_2(\Omega_\varepsilon)$ представляется в виде ряда

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x_1)\phi_j(x_2), \quad g_j(x_1) := A_j \int_0^\varepsilon g(x)\phi_j(x_2) dx_2. \quad (3.4)$$

Более того, из неравенств (4.2)–(4.4) в доказательстве этой леммы немедленно вытекают оценки

$$C_1\varepsilon^{-2}\|g(x_1, \cdot)\|_{L_2(0,\varepsilon)}^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} |g_j(x_1)|^2 \leq C_2\varepsilon^{-2}\|g(x_1, \cdot)\|_{L_2(0,\varepsilon)}, \quad (3.5)$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные константы, не зависящие от g, ε, x_1 .

Через $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ будем обозначать норму ограниченного оператора, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y .

ЛЕММА 1. *Оператор $\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)$ действует из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и голоморфен по достаточно малым k . Верна оценка*

$$\|\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2,$$

где константа C не зависит от ε и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in L_2(\Omega_\varepsilon)$ формулу для $\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x_1, \varepsilon, k)\phi_j(x_2), \\ u_j(x_1, \varepsilon, k) &:= \frac{1}{2\sqrt{\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2}|x_1-y_1|} f_j(y_1) dy_1, \\ f_j(x_1) &:= A_j \int_0^\varepsilon f(x)\phi_j(x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} -u_j'' + (\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2)u_j &= f_j, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \|u_j'\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + (\mu_j^2 - \alpha^2 + k^2)\|u_j\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 &= (f_j, u_j)_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения μ_j вытекают оценки

$$\|u_j\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{C\varepsilon^2}{j^2} \|f_j\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где C – положительная константа, не зависящая от ε, j, f_j . Теперь воспользуемся неравенствами (3.5):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 &= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \|\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)f(x_1, \cdot)\|_{L_2(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)}^2 \leq C\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C\varepsilon^5 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-4} \|f_j\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq C\varepsilon^2 \|f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

где константа C не зависит от ε, k и f . Требуемая оценка для $\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)$ доказана. Голоморфность $\mathcal{B}_1^\varepsilon(k)$ по малым k следует из доказанной оценки и голоморфности по k отдельных членов ряда (3.6).

3.2. Сведение к одномерной задаче. Вернемся к краевой задаче (3.1), (2.1). Обозначим $f := -V\psi_\varepsilon$; тогда согласно (3.3)

$$\psi_\varepsilon = \mathcal{B}_0^\varepsilon(k_\varepsilon)f + \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)f$$

и краевая задача (3.1), (2.1) сводится к уравнению

$$f = -V\mathcal{B}_0^\varepsilon(k_\varepsilon)f - V\mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)f. \quad (3.7)$$

Через $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}^\perp$ обозначим операторы проектирования, сопоставляющие функции $g \in L_2(\Omega_\varepsilon)$ соответственно функции g_0 и $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x_1)\phi_j(x_2)$, где использованы обозначения из (3.4). Ясно, что оператор $\mathcal{P}_0$ действует из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\mathbb{R})$, а оператор $\mathcal{P}^\perp$ – из $L_2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon)$. В силу (3.5) справедливы оценки

$$\|\mathcal{P}^\perp\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C, \quad \|\mathcal{P}_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^{-1/2}, \quad (3.8)$$

где константа C не зависит от ε . Положим $f_0 := \mathcal{P}_0 f$, $f^\perp := \mathcal{P}^\perp f$. Через $V^0, V^\perp$ обозначим следующие функции:

$$V^0 := \mathcal{P}_0(V\phi_0), \quad V^\perp := \mathcal{P}^\perp(V\phi_0). \quad (3.9)$$

Тогда уравнение (3.7) эквивалентно следующей паре уравнений:

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{V^0}{2k} \int_{\mathbb{R}} e^{-k_\varepsilon|x_1-y_1|} f_0(y_1) dy_1 - \mathcal{P}_0 V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)(f_0\psi_0 + f^\perp), \\ f^\perp &= -\frac{V^\perp}{2k} \int_{\mathbb{R}} e^{-k_\varepsilon|x_1-y_1|} f_0(y_1) dy_1 - \mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)(f_0\psi_0 + f^\perp). \end{aligned}$$

Обозначим

$$h := \frac{1}{2k} \int_{\mathbb{R}} e^{-k_\varepsilon |x_1 - y_1|} f_0(y_1) dy_1$$

и учтем, что в силу определения

$$\mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)(f_0\psi_0 + f^\perp) = \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)f^\perp, \quad -h'' + k_\varepsilon^2 h = f_0.$$

Тогда полученные выше уравнения для f_0 переписываются в виде

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + V^0 + k_\varepsilon^2\right)h = -\mathcal{P}_0 V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)f^\perp, \quad (3.10)$$

$$(\mathcal{I} + \mathcal{P}^\perp \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon))f^\perp = -V^\perp h, \quad (3.11)$$

где $\mathcal{I}$ – единичный оператор. Из оценки (3.8) для $\mathcal{P}^\perp$, леммы 1 и ограниченности V следует, что оператор $\mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon): L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)$ мал по норме:

$$\|\mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2, \quad (3.12)$$

где константа C не зависит от ε и k . Следовательно, оператор в левой части уравнения (3.11) ограниченно обратим и

$$f^\perp = -(\mathcal{I} + \mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon))^{-1} V^\perp h.$$

Подставляя это соотношение в (3.10), получаем окончательное уравнение для h :

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + V^0 - k_\varepsilon^2\right)h = \mathcal{P}_0 V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon)(\mathcal{I} + \mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon))^{-1} V^\perp h \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

В силу приведенных выше рассуждений полученное уравнение эквивалентно исходной краевой задаче (3.1), (2.1). Наш следующий шаг посвящен исследованию этого уравнения.

3.3. Исследование одномерной задачи. Уточним вначале вид функции V^0 . Согласно (3.4), (3.9) она дается равенством

$$V^0(x_1, \varepsilon) = A_0 \int_0^\varepsilon V\left(x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}\right) e^{-2i\alpha x_2} dx_2 = \frac{2i\alpha\varepsilon}{1 - e^{-2i\alpha\varepsilon}} \int_0^1 V(x_1, \xi) e^{-2i\alpha\varepsilon\xi} d\xi.$$

Выписывая теперь формулу Тейлора по ε и используя определение потенциала V_0 из (2.4), получаем

$$V^0(x_1, \varepsilon) = V_0(x_1) + \varepsilon V_1(x_1) + \varepsilon^2 V_2(x_1, \varepsilon), \quad (3.14)$$

где потенциал V_1 определяется формулой

$$V_1(x_1) = -i\alpha \int_0^1 (2\xi - 1)V(x_1, \xi) d\xi.$$

Нетрудно проверить, что в силу (2.3) верны соотношения

$$\overline{V_1(x_1)} = i\alpha \int_0^1 (2\xi - 1)\overline{V(x_1, \xi)} d\xi = i\alpha \int_0^1 (2\xi - 1)V(x_1, 1 - \xi) d\xi = V(x_1),$$

а потому потенциал V_1 вещественный и

$$V_1(x_1) = \alpha \int_0^1 (2\xi - 1) \operatorname{Im} V(x_1, \xi) d\xi.$$

В силу (2.2) для всех потенциалов $V_0, V_1, V_2, V^\perp$ верны равномерные по x_1 и ε оценки

$$|V_i| \leq C e^{-a|x_1|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad |V^\perp| \leq C e^{-a|x_1|}. \quad (3.15)$$

Используя разложение (3.14), перепишем уравнение (3.13) в виде

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + V_0 + k_\varepsilon^2 + \mathcal{L}(k_\varepsilon, \varepsilon) \right) h = 0 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен оператор

$$\mathcal{L}(k, \varepsilon) := \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \mathcal{P}_0 V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k) (\mathcal{I} + \mathcal{P}^\perp V \mathcal{B}_1^\varepsilon(k_\varepsilon))^{-1} V^\perp, \quad (3.17)$$

действующий из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$. Отметим еще, что в силу леммы 1 и оценок (3.12), (3.8), (3.15) для нормы оператора $\mathcal{L}$ выполнено равномерное по ε и k неравенство

$$\|\mathcal{L}(k, \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon. \quad (3.18)$$

Для исследования уравнения (3.16) мы воспользуемся модификацией метода Бирмана–Швингера, предложенной в работе [33], см. также [34], [35]. Отметим, что в частном случае финитного (по x_1) потенциала V и нулевого потенциала V_0 возможно прямое использование результатов [33]. В нашем случае, в первую очередь из-за наличия потенциала V_0 , требуется определенное усложнение подхода работы [33].

Через $\chi = \chi(x_1)$ обозначим бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице при $|x_1| < 1$ и равную $e^{-(a/2)|x_1|}$ при $|x_1| > 2$. Константа a , напомним, была введена в (2.2).

Одним из ключевых шагов в данном пункте является следующая вспомогательная лемма.

ЛЕММА 2. Для произвольной функции $F \in L_2(\mathbb{R})$ уравнение

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + V_0 + k^2 \right) u = \chi F \quad \text{на } \mathbb{R} \quad (3.19)$$

имеет единственное решение из $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$, ведущее себя на бесконечности следующим образом:

$$u(x_1, k) = c_\pm(k) e^{\pm k x_1} + O(e^{-\beta|x_1|}), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad (3.20)$$

где $c_\pm(k)$ – некоторые константы, $\beta > 0$ – некоторая константа, не зависящая от k . Оператор $\mathcal{A}(k)$, сопоставляющий функции F произведение χu , где u – решение уравнения (3.19) с асимптотикой (3.20), мероморфен по k как оператор в $L_2(\mathbb{R})$, и справедливо равенство

$$\mathcal{A}(k)F = \frac{\chi\psi_0}{2k} (F, \chi\psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} + \mathcal{A}_1(k)F, \quad (3.21)$$

где оператор $\mathcal{A}_1(k): L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ограничен и голоморфен по малым комплексным k .

Доказательство этой леммы достаточно объемное, поэтому мы выносим его в отдельный пункт – п. 3.4.

Вернемся к уравнению (3.16). Отметим, что непосредственно из оценок (2.2), (3.18) и определения оператора $\mathcal{L}(k, \varepsilon)$ следует, что последний можно представить в виде

$$\mathcal{L}(k, \varepsilon) = \chi \mathcal{M}(k, \varepsilon) \chi, \quad (3.22)$$

где $\mathcal{M}$ – ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R})$, голоморфный по k и удовлетворяющий равномерной по ε и k оценке

$$\|\mathcal{M}(k, \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon. \quad (3.23)$$

Обозначим еще $F_\varepsilon := -\mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi h$; тогда в силу (3.22) и согласно лемме 2 мы можем переписать уравнение (3.16) в виде

$$h = \chi^{-1} \mathcal{A}(k_\varepsilon) F_\varepsilon.$$

Подставим это соотношение обратно в (3.16). Тогда получим

$$F_\varepsilon + \varepsilon \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \mathcal{A}(k_\varepsilon) F_\varepsilon = 0. \quad (3.24)$$

Воспользуемся теперь представлением (3.21):

$$F_\varepsilon + \frac{1}{2k_\varepsilon} (F_\varepsilon, \chi \psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi \psi_0 + \mathcal{M}(k, \varepsilon) \mathcal{A}_1(k, \varepsilon) F_\varepsilon = 0. \quad (3.25)$$

В силу свойств оператора $\mathcal{A}_1$, описанных в лемме 2, и оценки (3.23) оператор

$$\mathcal{I} + \mathcal{M}(k, \varepsilon) \mathcal{A}_1(k)$$

ограниченно обратим при малых ε и k . Обратный оператор

$$\mathcal{Q}(k, \varepsilon) := (\mathcal{I} + \mathcal{M}(k, \varepsilon) \mathcal{A}_1(k))^{-1}$$

ограничен равномерно по ε и k и голоморфен по k . Подействуем оператором $\mathcal{Q}$ на уравнение (3.25). Тогда получим

$$F_\varepsilon + \frac{1}{2k_\varepsilon} (F_\varepsilon, \chi \psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} \mathcal{Q}(k_\varepsilon, \varepsilon) \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi \psi_0 = 0.$$

Умножая теперь последнее уравнение на $\chi \psi_0$ скалярно в $L_2(\mathbb{R})$, приходим к следующему уравнению на k_ε :

$$k_\varepsilon + \frac{1}{2} (\mathcal{Q}(k_\varepsilon, \varepsilon) \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi \psi_0, \chi \psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} = 0. \quad (3.26)$$

Аналогично [38], [34] на основе теоремы Руше доказывается, что последнее уравнение имеет единственное решение, сходящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, а соответствующее решение уравнения (3.24) единственно с точностью до умножения на константу и дается формулой

$$F_\varepsilon = \mathcal{Q}(k_\varepsilon, \varepsilon) \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi \psi_0. \quad (3.27)$$

Это решение порождает соответствующее нетривиальное решение уравнения (3.16): данное нетривиальное решение одновременно удовлетворяет задаче (3.19), (3.20) с $F = F_\varepsilon$.

Выясним теперь асимптотику корня k_ε уравнения (3.26). Вначале отметим, что в силу оценки (3.23) выполнено равенство

$$\mathcal{Q}(k, \varepsilon) = \mathcal{I} + O(\varepsilon)$$

равномерно по малым k . Отсюда и из (3.23) следует, что уравнение (3.26) можно переписать в виде

$$k_\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \psi_0 \chi \mathcal{M}(k, \varepsilon) \chi \psi_0 dx_1 + O(\varepsilon^2).$$

Используя теперь равенства (3.22), (3.17), оценки (3.15), (3.12), (3.8) и лемму 1, заключаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0 \chi \mathcal{M}(k_\varepsilon, \varepsilon) \chi \psi_0 dx_1 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} V_1 \psi_0^2 dx_1 + O(\varepsilon^2).$$

Из последних двух соотношений вытекает асимптотика для k_ε :

$$k_\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} V_1 \psi_0^2 dx_1 + O(\varepsilon^2), \quad -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} V_1 \psi_0^2 dx_1 = k_1. \quad (3.28)$$

Возвращаясь теперь к формуле (3.27), нетривиальное решение h уравнения (3.16), соответствующее k_ε , находим как решение задачи (3.19), (3.20) с $F = F_\varepsilon$. Обращаясь при этом к доказательству леммы 2, несложно убедиться, что константы $c_\pm(k)$ из (3.20) не обращаются в нуль и, более того, $c_\pm(k_\varepsilon) \rightarrow c_\pm^0$ при $k_\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, функция h ведет себя на бесконечности как $\sim e^{-k_\varepsilon |x_1|}$. Она экспоненциально убывает при $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$ и экспоненциально растет при $\operatorname{Re} k_\varepsilon < 0$. Восстанавливая теперь по h решение краевой задачи (3.1), (2.1), заключаем, что аналогичные экспоненциальное убывание либо рост выполнены и для решения последней задачи. Отметим еще, что в силу наших построений существует единственное значение k_ε , сходящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$, при котором задача (3.1), (2.1) имеет нетривиальное решение, причем такое решение единственно с точностью до умножения на константу.

Остановимся теперь на случае, когда $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$. В этом случае соответствующее нетривиальное решение задачи (3.1), (2.1) экспоненциально убывает при $x_1 \rightarrow \pm\infty$, а потому оно попадает в область определения оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ и является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda_\varepsilon = \alpha^2 - k_\varepsilon^2$. Это собственное значение простое и сходится к α^2 при $\varepsilon \rightarrow +0$. В силу (3.28) его асимптотика имеет вид (2.8). Ввиду $\mathcal{PT}$ -симметричности оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$, его собственные значения расположены симметрично в комплексной плоскости относительно вещественной оси. И так как в окрестности края α^2 существенного спектра задача (3.1), (2.1) имеет нетривиальное решение лишь при одном значении k_ε , соответствующее собственное значение $\lambda_\varepsilon = \alpha^2 - k_\varepsilon^2$ обязательно вещественное.

3.4. Доказательство леммы 2. Вначале мы сведем уравнение (3.19) к операторному уравнению в $L_2(\mathbb{R})$. Это сведение будет основано на идеях [36], [37; гл. 16, § 4], см. также [35; § 3].

Пусть $g \in L_2(\mathbb{R})$ – некоторая функция. Рассмотрим краевую задачу

$$\left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + k^2\right)v = \chi g \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad v|_{x_1=0} = 0. \quad (3.29)$$

Решение этой задачи находится явно:

$$\begin{aligned} v(x_1, k) &= \frac{1}{2k} \int_0^{+\infty} (e^{-k|x_1-y_1|} - e^{-k(x_1+y_1)}) \chi(y_1) g(y_1) dy_1, \quad x_1 > 0, \\ v(x_1, k) &= \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^0 (e^{-k|x_1-y_1|} - e^{k(x_1+y_1)}) \chi(y_1) g(y_1) dy_1, \quad x_1 < 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отметим, что в силу определения χ и оценки (2.2) оператор $\mathcal{A}_2(k)$, сопоставляющий функции F функцию $\chi^{-1}V_0v$, ограничен и голоморфен по малым комплексным k как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $W_2^2(\mathbb{R})$. Кроме того, аналогично доказательству леммы 3.2 в [35] нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{A}_2(k)$ компактен как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $W_2^1(\mathbb{R})$. Для функции v , определенной формулами (3.30), выполнены асимптотики (3.20).

Рассмотрим еще одну краевую задачу:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dx_1^2} + V_0 - i\right)w &= \chi^{-1}V_0v \quad \text{на } \mathbb{R}, \\ w|_{x_1=+0} &= w|_{x_1=-0}, \quad \frac{dw}{dx_1}\Big|_{x_1=+0} - \frac{dw}{dx_1}\Big|_{x_1=-0} = \frac{dv}{dx_1}\Big|_{x_1=+0} - \frac{dv}{dx_1}\Big|_{x_1=-0}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ввиду наличия числа $-i$ в уравнении эта краевая задача однозначно разрешима для любого v . В силу определения χ и оценки (2.2) функция $\chi^{-1}V_0$ экспоненциально убывает на бесконечности. Аналогичное утверждение верно и для решения задачи (3.31). Для доказательства этого утверждения достаточно член V_0w перенести в правую часть уравнения и выписать затем явное решение уравнения, считая V_0w заданной функцией, экспоненциально убывающей в силу свойств V_0 .

В силу описанных выше свойств оператора $\mathcal{A}_2(k)$ оператор $\mathcal{A}_3(k)$, сопоставляющий функции g решение задачи (3.31), компактен как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $W_2^2(\mathbb{R})$ и голоморфен по малым k .

Решение уравнения (3.19) с асимптотикой (3.20) строим в виде

$$u = v - \chi w. \quad (3.32)$$

Эта функция принадлежит $W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$, так как скачок производной v в нуле компенсируется аналогичным скачком функции w . В силу экспоненциального убывания w и поведения функции v на бесконечности функция u , определенная равенством (3.32), удовлетворяет асимптотикам (3.20). Таким образом, остается проверить лишь уравнение (3.19). С учетом (3.29), (3.31) это приводит нас к соотношению

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} + \mathcal{A}_4(k))g &= F, \\ \mathcal{A}_4(k)g &= 2\frac{\chi'}{\chi} \frac{dw}{dx_1} + \left(\frac{\chi''}{\chi} - i + k^2\right)w. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Полученное соотношение является уравнением на функцию g . А именно, из вида оператора $\mathcal{A}_4(k)$ и описанных выше свойств операторов $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и определения функции χ вытекает следующее. Оператор $\mathcal{A}_4(k)$ действует из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, компактен

и голоморфен по малым комплексным k . Используя этот факт, аналогично лемме 3.1 из [35] доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Уравнение (3.33) эквивалентно задаче (3.19), (3.20). А именно, для любого решения и задачи (3.19), (3.20) существует единственное решение уравнения (3.33). И наоборот, для любого решения уравнения (3.33) существует единственное решение задачи (3.19), (3.20), задаваемое формулой (3.32).

Далее, дословно повторяя рассуждения в конце параграфа III.A работы [38], приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Обратный оператор $(\mathcal{I} + \mathcal{A}_4(k))^{-1}$ определен и ограничен при $k \neq 0$. Он является мероморфным по k и имеет простой полюс в нуле:

$$(\mathcal{I} + \mathcal{A}_4(k))^{-1} = \frac{(\cdot, \chi\psi_0)_{L_2(\mathbb{R})} \Phi_0}{k} + \mathcal{A}_5(k),$$

где оператор $\mathcal{A}_5(k): L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ограничен и голоморфен по малым k , а функция Φ_0 – решение уравнения (3.33) с $F = 0$, $k = 0$, соответствующее ψ_0 , а ψ_0 , напомним, вводилось как решение задачи (2.5), (2.6).

Последняя лемма является ключевой, так как она позволяет решить уравнение (3.33). Затем остается лишь восстановить соответствующее решение задачи (3.19), (3.20) по формуле (3.32). Это и приводит к представлению (3.21). Лемма 2 полностью доказана.

3.5. Отсутствие виртуального уровня. В данном заключительном пункте мы рассматриваем случай, когда на краю существенного спектра оператора $\mathcal{H}_0$ отсутствует виртуальный уровень. В этом случае доказательство в целом аналогично предыдущим четырем пунктам. А именно, все рассуждения леммы 2 остаются без изменений. В самой лемме 2 оператор $\mathcal{A}(k)$ вместо мероморфного оказывается голоморфным по k и из правой части формулы (3.21) исчезает первый член, содержащий ψ_0 . Доказательство леммы 2 в этом случае также остается в большей части прежним, лишь в лемме 4 в представлении для обратного оператора $(\mathcal{I} + \mathcal{A}_4(k))^{-1}$ исчезает полюс и остается фактически лишь голоморфный оператор $\mathcal{A}_5(k)$. Далее, в рассуждениях изменяется уравнение (3.25). В нем исчезает второй член и в итоге оно выглядит так:

$$F_\varepsilon + \mathcal{M}(k, \varepsilon) \mathcal{A}_1(k, \varepsilon) F_\varepsilon = 0.$$

И так как оператор $\mathcal{I} + \mathcal{M}(k, \varepsilon) \mathcal{A}_1(k, \varepsilon)$ ограниченно обратим, последнее уравнение имеет только тривиальное решение. Отсюда уже немедленно следует, что уравнение (3.16) и соответственно задача (3.1), (2.1) имеют только тривиальные решения при всех достаточно малых k и ε . Это доказывает отсутствие собственных значений у оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ в окрестности края существенного спектра, если на последней отсутствует виртуальный уровень.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Borisov, D. Krejčířík, “The effective Hamiltonian for thin layers with non-Hermitian Robin-type boundary conditions”, *Asymptot. Anal.*, **76**:1 (2012), 49–59.
- [2] Д. И. Борисов, “Дискретный спектр тонкого $\mathcal{PT}$ -симметричного волновода”, *Уфимск. матем. журн.*, **6**:1 (2014), 30–58.

- [3] C. M. Bender, S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246.
- [4] A. Mostafazadeh, “Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian”, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 205–214.
- [5] A. Mostafazadeh, “Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum”, *J. Math. Phys.*, **43**:5 (2002), 2814–2816.
- [6] A. Mostafazadeh, “Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry. III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries”, *J. Math. Phys.*, **43**:8 (2002), 3944–3951.
- [7] A. Mostafazadeh, “On the Pseudo-Hermiticity of a class of PT -symmetric Hamiltonians in one dimension”, *Mod. Phys. Lett. A*, **17**:30 (2002), 1973–1977.
- [8] M. Znojil, “Exact solution for Morse oscillator in PT -symmetric quantum mechanics”, *Phys. Lett. A*, **264**:2-3 (1999), 108–111.
- [9] M. Znojil, “Non-Hermitian matrix description of the $\mathcal{PT}$ -symmetric anharmonic oscillators”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:42 (1999), 7419–7428.
- [10] M. Znojil, “ $\mathcal{PT}$ -symmetric harmonic oscillators”, *Phys. Lett. A*, **259**:3-4 (1999), 220–223.
- [11] G. Lévai, M. Znojil, “Systematic search for $\mathcal{PT}$ -symmetric potentials with real energy spectra”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:40 (2000), 7165–7180.
- [12] C. M. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians”, *Rep. Prog. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018.
- [13] E. Caliceti, F. Cannata, S. Graffi, “Perturbation theory of $\mathcal{PT}$ -symmetric Hamiltonians”, *J. Phys. A*, **39**:32 (2006), 10019–10027.
- [14] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, “Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in $\mathcal{PT}$ -symmetric quantum mechanics”, *J. Phys. A*, **34**:28 (2001), 5679–5704.
- [15] H. Langer, Ch. Tretter, “A Krein space approach to PT -symmetry”, *Czechoslovak J. Phys.*, **54**:10 (2004), 1113–1120.
- [16] K. C. Shin, “On the reality of the eigenvalues for a class of $\mathcal{PT}$ -symmetric oscillators”, *Commun. Math. Phys.*, **229**:3 (2002), 543–564.
- [17] M. Znojil, “ $\mathcal{PT}$ -symmetric square well”, *Phys. Lett. A*, **285**:1-2 (2001), 7–10.
- [18] D. Borisov, D. Krejčířk, “ $\mathcal{PT}$ -symmetric waveguide”, *Integral Equations Operator Theory*, **62**:4 (2008), 489–515.
- [19] D. Borisov, “On a quantum waveguide with a small PT -symmetric perturbation”, *Acta Polytechnica*, **47**:2-3 (2007), 57–59.
- [20] Д. Борисов, “О $\mathcal{PT}$ -симметричном волноводе с парой малых отверстий”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **18**, 2012, 22–37.
- [21] С. А. Назаров, *Асимптотический анализ тонких пластин и стержней* Т. 1. *Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [22] G. Panasenko, *Multi-Scale Modelling for Structures and Composites*, Springer, Dordrecht, 2005.
- [23] D. Borisov, P. Freitas, “Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **26**:2 (2009), 547–560.
- [24] D. Borisov, G. Cardone, “Complete asymptotic expansions for the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in thin three-dimensional rods”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **17**:3 (2011), 887–908.
- [25] G. Cardone, A. Corbo Esposito, G. P. Panasenko, “Asymptotic partial decomposition for diffusion with sorption in thin structures”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **65**:1 (2006), 79–106.
- [26] G. P. Panasenko, E. Pérez, “Asymptotic partial decomposition of domain for spectral problems in rod structures”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **87**:1 (2007), 1–36.

- [27] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям”, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267–303.
- [28] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках”, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 687–701.
- [29] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Синицын, “Асимптотические решения уравнения Шредингера в тонких трубках”, *Асимптотические разложения. Теория приближений. Топология*, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН, **9**, 2003, 15–25.
- [30] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskii, “Quantum and classical dynamics of electron in thin curved tubes with spin and external electromagnetic fields taken into account”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 109–119.
- [31] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера в тонких замкнутых трубках”, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 503–519.
- [32] И. М. Глазман, *Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1963.
- [33] Р. Р. Гадыйшин, “О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси”, *ТМФ*, **132**:1 (2002), 97–104.
- [34] Д. И. Борисов, “Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 3–32.
- [35] Д. И. Борисов, “О спектре двумерного периодического оператора с малым локализованным возмущением”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 29–64.
- [36] A. Majda, “Outgoing solutions for perturbation of $-\Delta$ with applications to spectral and scattering theory”, *J. Differential Equations*, **16**:3 (1974), 515–547.
- [37] Э. Санчес-Паленсия, *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.
- [38] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl'shin, “Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip”, *J. Math. Phys.*, **43**:12 (2002), 6265–6278.

Д. И. Борисов

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра
Российской академии наук;
Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа;
University of Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступило

26.03.2014