Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Производная Шварца и покрытие дуг пучка окружностей голоморфными функциями, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 865–871

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:20:09

Производная Шварца и покрытие дуг пучка окружностей голоморфными функциями

В. Н. Дубинин

Пусть функция f голоморфна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, $|f(z)| < 1$ в U , $f(\pm 1) = \pm 1$ в смысле угловых пределов, и пусть существуют угловые производные Шварца $S_f(\pm 1)$, причем

$$\operatorname{Re} f''(1) + f'(1)(1 - f'(1)) = -\operatorname{Re} f''(-1) + f'(-1)(1 - f'(-1)) = 0.$$

При условии, что образ $f(U)$ не содержит открытых дуг пучка окружностей $\arg[(1+w)/(1-w)] = \theta$, $-\pi/2 < \theta < \varphi$, с концами в точках $w = \pm 1$, устанавливается верхняя оценка суммы $S_f(-1) + S_f(1)$, зависящая от φ и $f'(\pm 1)$.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10975

1. Введение и формулировка результата. Пусть f – голоморфная в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функция, $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, и пусть в окрестности точки $z = 1$ справедливо разложение

$$f(z) = 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \angle o((z-1)^3), \quad z \rightarrow 1,$$

где $a_1 > 0$ и $\angle o((z-1)^3)$ означает бесконечно малую по сравнению с функцией $(z-1)^3$ при $z \rightarrow 1$ в каждом угле Штольца с вершиной в точке $z = 1$, лежащем в круге U . Известно, что при условии

$$2 \operatorname{Re} a_2 + a_1(1 - a_1) = 0 \tag{1.1}$$

выполняются соотношения

$$\operatorname{Im} S_f(1) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} S_f(1) \leq 0 \tag{1.2}$$

(см. [1]–[3]). Здесь $S_f(1)$ означает “угловую” производную Шварца функции f в точке $z = 1$. Принадлежность образа круга $f(U)$ некоторому орициклу также влечет за собой соотношения вида (1.2) (см., например, [2]–[4]). Можно показать, что указанное включение влечет за собой выполнение условия (1.1) для суперпозиции f

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00022).

и подходящего дробно-линейного отображения. Таким образом, ситуация сводится к каноническому случаю (см. [3; § 3]). Условие (1.1) является необходимым условием для получения оценок производной Шварца на границе и его геометрический смысл показан, например, в работах [2] и [3]. Неравенства для шварциана при более тонких (чем принадлежность орициклу) геометрических ограничениях на область $f(U)$ представлены в работах [3] и [5]. Эти неравенства тесно связаны с оценками так называемой half-plane емкости [6]. В данной заметке устанавливается геометрическая двуточечная оценка производной Шварца на границе круга U . Впервые подобного рода оценка была рассмотрена в [7]. Обозначим через $B(-1, 1)$ класс голоморфных отображений¹ круга U в себя с двумя фиксированными граничными точками $z = \pm 1$. Здесь граничные значения $f(\pm 1) = \pm 1$ понимаются в смысле угловых пределов [9]. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f принадлежит классу $B(-1, 1)$, и пусть в окрестностях точек $z = \pm 1$ выполняются разложения

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \mathcal{O}((z-1)^3), & z \rightarrow 1, \\ f(z) &= -1 + b_1(z+1) + b_2(z+1)^2 + b_3(z+1)^3 + \mathcal{O}((z+1)^3), & z \rightarrow -1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $a_1 b_1 \neq 0$,

$$2 \operatorname{Re} a_2 + a_1(1 - a_1) = -2 \operatorname{Re} b_2 + b_1(1 - b_1) = 0. \quad (1.4)$$

Предположим, что область $f(U)$ не содержит открытых дуг пучка окружностей $\arg[(1+w)/(1-w)] = \theta$, $-\pi/2 < \theta < \varphi$, с концами в точках $w = \pm 1$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Тогда

$$S_f(1) + S_f(-1) \leq 3 \left[a_1 b_1 \left(2 \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right) - 1 \right]. \quad (1.5)$$

Здесь

$$S_f(1) = 6 \left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \quad \text{и} \quad S_f(-1) = 6 \left(\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1^2} \right).$$

Равенство в (1.5) достигается для суперпозиций вида $g \circ f^*$, где g есть дробно-линейный автоморфизм круга $|w| < 1$ с неподвижными точками $w = \pm 1$, а функция f^* конформно и однолистно отображает круг U на круг с разрезом $\{w : |w| < 1\} \setminus [-i, i \operatorname{tg}(\varphi/2)]$ так, что $f^*(\pm 1) = \pm 1$ и $f^*(i) = i$.

С помощью дробно-линейного автоморфизма круга U_w теорему 1 можно распространить на случай любых двух неподвижных граничных точек функции f . Ранее [7] было показано, что если множество $f(U \setminus [-i, i])$ не содержит ни одной дуги окружности $\arg[(1+w)/(1-w)] = \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, то

$$S_f(1) + S_f(-1) \leq 3(1 - a_1 b_1)$$

с равенством для любого дробно-линейного автоморфизма круга U с неподвижными точками $z = \pm 1$.

¹Интересные свойства голоморфных отображений круга U в себя с неподвижными граничными точками представлены в недавней работе Горяйнова [8]

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что для функции f класса $B(-1, 1)$ выполняются соотношения (1.3), (1.4), и пусть дополнение $\{w : |w| < 1\} \setminus f(U)$ содержит континуум, соединяющий некоторую точку ω с дугой окружности $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w < 0\}$. Тогда справедливо неравенство*

$$S_f(1) + S_f(-1) \leq 3 \left[a_1 b_1 \left(\frac{(1-y)^4}{2(1+y^2)^2} - 1 \right) - 1 \right], \quad (1.6)$$

где

$$y = i \frac{(1-\omega)|1-\omega| - (1+\omega)|1+\omega|}{(1-\omega)|1-\omega| + (1+\omega)|1+\omega|}.$$

Равенство достигается для суперпозиций вида $g \circ f^*$ из теоремы 1, где $\operatorname{tg}(\varphi/2) = y$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если для однолистной функции f класса $B(-1, 1)$ выполняются соотношения (1.3), (1.4) и образ круга $f(U)$ отделяет в $|w| < 1$ некоторую точку ω , $|\omega| < 1$, от дуги окружности $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w > 0\}$, то выполняется неравенство (1.6) с утверждением о знаке равенства как в предыдущем следствии.*

Понятно, что если образ круга U при отображении однолистной функцией f класса $B(-1, 1)$ не содержит точку ω , $|\omega| < 1$, то он отделяет ω от дуги $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ либо от дуги $\{w : |w| = 1, \operatorname{Im} w < 0\}$. В обоих случаях можно применить следствие 2. Было бы интересно найти оценку вида (1.5), у которой правая часть стремится к нулю при $\varphi \rightarrow -\pi/2$.

2. Доказательство теоремы 1. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию

$$H_\varepsilon(z) = \sqrt{\frac{h_\varepsilon(z^2) - \varepsilon}{1 - \varepsilon h_\varepsilon(z^2)}}, \quad \sqrt{1} = 1,$$

где $h_\varepsilon(z) = z - \varepsilon(z-1)^3$, $z \in \bar{U}$. В работе [7; лемма 3] показано, что функция $H_\varepsilon(z)$ голоморфна и однолистка в круге U и выполняется включение

$$\overline{H_\varepsilon(U)} \setminus \{-1, 1\} \subset U. \quad (2.1)$$

Так как в круге $\bar{U}$ функция H_ε и все ее производные стремятся к тождественной функции и соответствующим ее производным при $\varepsilon \rightarrow 0$, то неравенство (1.5) достаточно получить для суперпозиции

$$F = F_\varepsilon := f \circ H_\varepsilon.$$

Всюду ниже для простоты записи в обозначениях функций и множеств будем опускать зависимость их от ε . Справедливы разложения

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + c_1(z-1) + c_2(z-1)^2 + c_3(z-1)^3 + \mathcal{O}((z-1)^3), & z \rightarrow 1, \\ F(z) &= -1 + d_1(z+1) + d_2(z+1)^2 + d_3(z+1)^3 + \mathcal{O}((z+1)^3), & z \rightarrow -1, \end{aligned}$$

причем

$$2 \operatorname{Re} c_2 + c_1(1 - c_1) = -2 \operatorname{Re} d_2 + d_1(1 - d_1) = 0 \quad (2.2)$$

(см. [7; § 3]). Фиксируем число ρ , $0 < \rho < 1$. Обозначим через Ψ_ρ дробно-линейный автоморфизм круга U , удовлетворяющий условию $\Psi_\rho(F(\rho)) = -\Psi_\rho(F(-\rho)) =: t > 0$. Введем функцию

$$\zeta = \Phi_\rho(w) = \sqrt{\frac{w(1+t^2) + t(1+w^2)}{t(1+w^2) - w(1+t^2)}},$$

заданную в $U(\rho) := U \setminus ([-1, -t] \cup [t, 1])$, $\Phi_\rho(0) = 1$ и доопределенную на границе $U(\rho)$ в смысле граничного соответствия. Нетрудно видеть, что функция $\Phi_\rho(w)$ конформно и однолистно отображает область $U(\rho)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ так, что $\Phi_\rho(-t) = 0$, $\Phi_\rho(t) = \infty$. Для любого $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ определим кривую

$$\gamma_\rho(\theta) = \{w : \arg \Phi_\rho(w) = \theta\}.$$

Заметим, что при $\rho \rightarrow 1$ функция $\Phi_\rho(w) \rightarrow (1+w)/(1-w)$, $w \in U$, а кривая $\gamma_\rho(\theta)$ стремится к дуге окружности в U , соединяющей точки $w = \pm 1$ и составляющей с отрезком $[-1, 1]$ угол в точке $w = -1$ величины θ (при $\theta > 0$ дуга лежит в верхней полуплоскости, а при $\theta < 0$ – в нижней). Заметим, что при некотором ρ_0 , $0 < \rho_0 < 1$, для всех ρ , $\rho_0 < \rho < 1$, и всех θ , $-\pi/2 \leq \theta \leq \varphi$, кривая $\gamma_\rho(\theta) \not\subset \Psi_\rho \circ F(U)$ (или, что то же самое, $\Psi_\rho^{-1}(\gamma_\rho(\theta)) \not\subset F(U)$). Действительно, в противном случае существовали бы последовательность $\rho_n \rightarrow 1$ и последовательность $\theta_n \rightarrow \theta_0$, $-\pi/2 \leq \theta_0 \leq \varphi$, такие, что $\Psi_{\rho_n}^{-1}(\gamma_{\rho_n}(\theta_n)) \subset F(U)$. Последовательность кривых $\Psi_{\rho_n}^{-1}(\gamma_{\rho_n}(\theta_n))$ сходится к открытой дуге γ некоторой окружности с концами в точках $w = \pm 1$. Включение (2.1) дает $F(U_z) \subset U_w \cup \{-1, 1\}$. Поэтому дуга γ не может лежать на границе U_w , $\theta_0 \neq -\pi/2$. Кроме того, γ не содержит внешних точек множества $F(U)$ и, следовательно, принадлежит замыканию этого множества. Однако в этом случае $\gamma \subset f(U)$, что противоречит условию теоремы 1. Введем обозначение

$$E(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$$

и рассмотрим при достаточно малом $r > 0$ следующие конденсаторы [10]:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= (U, \{\partial U, E(\rho, r) \cup E(-\rho, r)\}, \{0, 1\}), \\ C_2(r) &= (\Psi_\rho \circ F(U), \{\partial \Psi_\rho \circ F(U), \Psi_\rho \circ F(E(\rho, r) \cup E(-\rho, r))\}, \{0, 1\}), \\ C_3(r) &= ((\Phi_\rho \circ \Psi_\rho \circ F(U))^*, \{\partial(\Phi_\rho \circ \Psi_\rho \circ F(U))^*, \\ &\quad (\Phi_\rho \circ \Psi_\rho \circ F(E(\rho, r) \cup E(-\rho, r)))^*\}, \{0, 1\}), \end{aligned}$$

$RC_3(r) \equiv (B_\rho, \{\partial B_\rho, E_\rho\}, \{0, 1\})$ – результат симметризации конденсатора $C_3(r)$ относительно окружности $|\zeta| = 1$ [10; § 4.1]. Здесь A^* означает объединение множества A с его отражением относительно мнимой оси. Из принципа мажорации [10; теорема 8.6] следует, что

$$\operatorname{cap} C_1(r) \geq \operatorname{cap} C_2(r).$$

Привлекая дополнительно монотонность емкости и принцип симметрии [10; теорема 1.20], получаем

$$\operatorname{cap} C_2(r) \geq \frac{1}{2} \operatorname{cap} C_3(r).$$

По теореме 4.3 из [10]

$$\operatorname{cap} C_3(r) \geq \operatorname{cap} RC_3(r).$$

Как было замечено выше, любая кривая $\gamma_\rho(\theta)$, $\rho_0 < \rho < 1$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \varphi$, не принадлежит области $\Psi_\rho \circ F(U)$. Поэтому множество B_ρ конденсатора $RC_3(r)$ не содержит дуги

$$\Gamma := \{\zeta : |\zeta| = 1, -\pi - \varphi \leq \arg \zeta \leq \varphi\}.$$

По построению это множество не содержит также два симметричных отрезка на мнимой оси $I_\rho := \{\zeta : \zeta = \Phi_\rho(w), |w| = 1\}$. Введем конденсатор

$$C_4(r) = (\overline{\mathbb{C}}_\zeta, \{\Gamma \cup I_\rho, E_\rho\}, \{0, 1\}).$$

Монотонность емкости приводит к неравенству

$$\text{cap } RC_3(r) \geq \text{cap } C_4(r).$$

Вновь по принципу симметрии и конформной инвариантности емкости получаем

$$\text{cap } C_4(r) = 2 \text{cap } C_5(r),$$

где

$$C_5(r) = (U, \{(\partial U) \cup [-i, iy_\rho], \Phi_\rho^{-1}(\{\zeta \in E_\rho : \text{Re } \zeta \geq 0\})\}, \{0, 1\}), \quad iy_\rho = \Phi_\rho^{-1}(e^{i\varphi}).$$

Заметим, что $y_\rho \rightarrow \text{tg}(\varphi/2)$ при $\rho \rightarrow 1$. Суммируя выписанные соотношения, приходим к заключению

$$\text{cap } C_1(r) \geq \text{cap } C_5(r). \quad (2.3)$$

По формуле (2.10) из [10]

$$\text{cap } C_1(r) = -\frac{4\pi}{\log r} - 4\pi \left[\log(1 - \rho^2) + \log \frac{1 + \rho^2}{2\rho} \right] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0.$$

Пластина $\Phi_\rho^{-1}(\{\zeta \in E_\rho : \text{Re } \zeta \geq 0\})$ конденсатора $C_5(r)$ состоит из двух “почти кругов” с центрами в точках $-t, t$ и радиусов

$$r \sqrt{|F'(-\rho)F'(\rho)\Psi'_\rho(F(-\rho))\Psi'_\rho(F(\rho))|} =: r\mu(\rho).$$

Вновь по формуле (2.10) из [10] получаем

$$\text{cap } C_5(r) = -\frac{4\pi}{\log r} - 4\pi \left[\log \frac{r(G_\rho, t)}{\mu(\rho)} + g_{G_\rho}(-t, t) \right] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0,$$

где $G_\rho = U \setminus [-i, iy_\rho]$, $r(G_\rho, t)$ – внутренний радиус области G_ρ относительно точки t , а $g_{G_\rho}(-t, t)$ – функция Грина области G_ρ . Асимптотические формулы и неравенство (2.3) дают

$$\log \frac{\mu(\rho)(1 - \rho^4)}{2\rho} \leq \log r(G_\rho, t) + g_{G_\rho}(-t, t).$$

Нетрудно видеть, что

$$|\Psi'_\rho(F(-\rho))\Psi'_\rho(F(\rho))| = \frac{(1 - t^2)(1 - t^2)}{(1 - |F(-\rho)|^2)(1 - |F(\rho)|^2)}$$

и

$$g_{G_\rho}(-t, t) = \log \left| \frac{c}{\operatorname{Im} c} \right|, \quad \text{где} \quad c = \sqrt{\frac{it}{(1-it)^2} - \frac{y_\rho}{(1-y_\rho)^2}}.$$

Кроме того, из теоремы П6 книги [10] следует

$$\log r(G_\rho, t) - g_{G_\rho}(-t, t) = \log r(U, t) - g_U(-t, t).$$

Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{|F'(-\rho)|(1-\rho^2)|F'(\rho)|(1-\rho^2)}{(1-|F(-\rho)|^2)(1-|F(\rho)|^2)} \leq \left[\frac{2\rho}{1+\rho^2} \right]^2 \left[\frac{2t}{1+t^2} \right]^2 \left| \frac{c}{\operatorname{Im} c} \right|^4. \quad (2.4)$$

Вывод следующих двух асимптотических равенств с использованием (2.2) приводится по существу в работе [11; с. 71–72]

$$\begin{aligned} \frac{|F'(-\rho)|(1-\rho^2)}{1-|F(-\rho)|^2} &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{d_3}{d_1} - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right] (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), & \rho \rightarrow 1, \\ \frac{|F'(\rho)|(1-\rho^2)}{1-|F(\rho)|^2} &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right] (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), & \rho \rightarrow 1, \end{aligned}$$

Элементарные вычисления дают также

$$\left[\frac{2\rho}{1+\rho^2} \right]^2 = 1 - (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1.$$

Из свойств дробно-линейных отображений

$$\frac{(1-t^2)^2}{(2t)^2} = \frac{(1-|F(-\rho)|^2)(1-|F(\rho)|^2)}{|F(-\rho) - F(\rho)|^2}.$$

Отсюда

$$1-t = \sqrt{c_1 d_1} (1-\rho) + o((1-\rho)), \quad \rho \rightarrow 1.$$

Поэтому

$$\left[\frac{2t}{1+t^2} \right]^2 = 1 - c_1 d_1 (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1.$$

Наконец, последний сомножитель в правой части (2.4) после простых выкладок принимает вид

$$\left| \frac{c}{\operatorname{Im} c} \right|^4 = 1 + c_1 d_1 \frac{(1-y_\rho)^4}{2(1+y_\rho^2)^2} (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \quad \rho \rightarrow 1.$$

Подставляя выписанные асимптотические равенства в (2.4), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \operatorname{Re}[S_F(-1) + S_F(1)](1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2) \\ \leq 1 + \left[c_1 d_1 \left(\frac{(1-y_\rho)^4}{2(1+y_\rho^2)^2} - 1 \right) - 1 \right] (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство (1.5) для функции F и, следовательно, для функции f . Поскольку для функции f^* в емкостном неравенстве (2.3) достигается знак равенства, то равенство для нее имеет место также в (1.5). Этот факт можно проверить и непосредственно, так как f^* представима в виде суперпозиции элементарных функций. Для функции $f = g \circ f^*$ вновь имеем равенство в (1.5), поскольку добавление автоморфизма g не меняет значения шварцианов, произведения первых производных в точках $z = \pm 1$ и сохраняет рассматриваемый пучок окружностей. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. S. Bourdon, J. H. Shapiro, “Cyclic phenomena for composition operators”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **125**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [2] R. Tauraso, F. Vlacci, “Rigidity at the boundary for holomorphic self-maps of the unit disk”, *Complex Variables Theory Appl.*, **45**:2 (2001), 151–165.
- [3] В. Н. Дубинин, “О граничных значениях производной Шварца регулярной функции”, *Матем. сб.*, **202**:5 (2011), 29–44.
- [4] D. Shoikhet, “Another look at the Burns–Krantz theorem”, *J. Anal. Math.*, **105**:1 (2008), 19–42.
- [5] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “Ahlfors–Beurling conformal invariant and relative capacity of compact sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **142**:11 (2014), 3865–3879.
- [6] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, Math. Surveys Monogr., **114**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2005.
- [7] В. Н. Дубинин, “Двухточечная граничная оценка производной Шварца голоморфной функции”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 191–199.
- [8] В. В. Горяйнов, “Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях”, *УМН*, **67**:6 (2012), 5–52.
- [9] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [10] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [11] В. Н. Дубинин, “Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 53–74.

В. Н. Дубинин

Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Институт прикладной математики

Дальневосточного отделения

Российской академии наук, г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

06.07.2015