Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов, Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 832–841

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10976>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 06:26:37

Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами

В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов

Получены асимптотические представления при $\lambda \rightarrow \infty$ в верхней и нижней полуплоскостях для решений уравнения Штурма–Лиувилля

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R},$$

при условии, что q – распределение первого порядка сингулярности, ρ – положительная абсолютно непрерывная функция, а p принадлежит пространству $L_2[a, b]$.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10976

Представления для асимптотических решений дифференциальных уравнений по спектральному параметру в секторах комплексной плоскости хорошо известны и часто используются начиная с работ Биркгофа [1], [2]. Конечно, впоследствии появились многочисленные работы, где результаты Биркгофа развивались и обобщались. Отметим, в частности, монографии Тамаркина [3], Рапопорта [4] и Наймарка [5] (в последней монографии имеется достаточно подробная библиография). Однако вплоть до недавнего времени все результаты на эту тему относились только к уравнениям, в которых коэффициенты при младших членах являются классическими функциями (непрерывными или суммируемыми по Лебегу). Нам известна только одна работа, в которой ограничения такого рода не предполагались. Это работа Савчука и Шкаликова [6], в которой были предприняты различные подходы для определения оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением первого порядка сингулярности. В частности, в [6] были получены асимптотические представления решения уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \tag{1}$$

при условии, что потенциал q является обобщенной функцией, принадлежащей пространству $W_2^{-1}[a, b]$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Последнее означает, что понимаемая в смысле распределений первообразная $\int q dt$ принадлежит пространству $L_2[a, b]$. Конечно, полученные асимптотические представления существенно использовались для представления функции Грина соответствующего оператора и изучения его спектральных

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00754).

свойств. Они использовались также и при изучении обратных задач (см., например, [7]).

Напомним в упрощенной формулировке результат [6] об асимптотическом представлении для фундаментальной системы решений уравнения (1).

ТЕОРЕМА [6]. При условии $q \in W_2^{-1}[a, b]$ уравнение (1) имеет пару линейно независимых решений вида

$$y_s(x, \lambda) = \sin \lambda x + \varphi(x, \lambda), \quad y_c(x, \lambda) = \cos \lambda x + \psi(x, \lambda), \quad (2)$$

где $|\varphi(x, \lambda)| + |\psi(x, \lambda)| = o(1)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq r$ равномерно по $x \in [a, b]$. В качестве r можно взять произвольное положительное число. Асимптотические представления (2), вообще говоря, нельзя почленно дифференцировать, но если ввести квазипроизводную $y^{[1]} = y' - u(x)y$, где $u = \int q dt$, то

$$y_s^{[1]}(x, \lambda) = \lambda(\cos \lambda x + \varphi_1(x, \lambda)), \quad y_c^{[1]}(x, \lambda) = -\lambda(\sin \lambda x + \psi_1(x, \lambda))$$

с сохранением свойства $|\varphi_1(x, \lambda)| + |\psi_1(x, \lambda)| = o(1)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq r$ равномерно по $x \in [a, b]$.

Упрощение приведенной здесь формулировки состоит в том, что в отличие от [6] мы не детализируем специфические свойства функций φ и ψ , ограничиваясь лишь их основным свойством: стремлением к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в полосе произвольной фиксированной ширины. Отметим, что доказательство сформулированной теоремы потребовало в [6] весьма сложной технической работы.

Цель настоящей работы – получить асимптотические представления для решений уравнения более общего вида

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (3)$$

при следующих условиях на коэффициенты:

$$p(x) \in L_2[a, b], \quad q \in W_2^{-1}[a, b], \quad \rho \in W_1^1[a, b], \quad \rho(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [a, b]. \quad (4)$$

Здесь $W_1^1[a, b]$ – пространство функций, для которых $y' \in L_1[a, b]$ (в силу теоремы Лебега это пространство совпадает с пространством $AC[a, b]$ абсолютно непрерывных функций). Условие $q \in W_2^{-1}[a, b]$ означает, как уже отмечалось, что первообразная $u(x) = \int q(t) dt$, понимаемая в смысле теории распределений, принадлежит пространству $L_2[a, b]$. Функции p и q предполагаются комплекснозначными. Кроме того, будем предполагать выполненным также условие

$$\rho'(x)u(x) \in L_1[a, b], \quad \text{где} \quad u(x) = \int q(x) dx. \quad (5)$$

Помимо того, что мы в сравнении с [6] рассматриваем более общее уравнение, мы имеем еще и другую цель. Мы намерены получить асимптотические представления для решений не только в полосе, но и в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} \lambda \geq -r$ и $\operatorname{Im} \lambda \leq r$, где $r \geq 0$ – произвольное фиксированное число. Это существенное добавление. Наличие асимптотических представлений в областях, которые покрывают всю комплексную плоскость, является фактом, который, несомненно, полезен для

дальнейших исследований. Отметим также, что в настоящей работе мы предлагаем другой метод получения асимптотических представлений, нежели в [6]. Этот метод, по-видимому, имеет более широкие возможности.

Сформулируем и докажем основной результат работы.

ТЕОРЕМА. При выполнении условий (4) и (5) уравнение (3) имеет на отрезке $[a, b]$ фундаментальную систему решений вида

$$y_{\pm}(x, \lambda) = [\rho(x)]^{-1/4} \exp\left(\frac{1}{2}P(x) \pm i\lambda \int_a^x \sqrt{\rho(\tau)} d\tau\right) (1 + \varphi_{\pm}(x, \lambda)). \quad (6)$$

Здесь

$$P(x) = \int_a^x p(\tau) d\tau,$$

а функции $\varphi_{\pm}$ таковы, что

$$|\varphi_+(x, \lambda)| + |\varphi_-(x, \lambda)| = o(1) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \operatorname{Im} \lambda \geq -r,$$

равномерно по $x \in [a, b]$, причем число r можно взять произвольно большим. Асимптотики (6) можно почленно дифференцировать, если вместо производной рассматривать квазипроизводную $y^{[1]} = y' - u(x)y$, где $u = \int q dt$. А именно,

$$y_{\pm}^{[1]}(x, \lambda) = \pm i\lambda [\rho(x)]^{-1/4} \exp\left(\frac{1}{2}P(x) \pm i\lambda \int_a^x \sqrt{\rho(\tau)} d\tau\right) (1 + \psi_{\pm}(x, \lambda)), \quad (7)$$

где функции $\psi_{\pm}$ обладают таким же свойством, как функции $\varphi_{\pm}$. Утверждение теоремы сохраняется, если вместо полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq -r$ рассматривать полуплоскость $\operatorname{Im} \lambda \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Проведем стандартную замену

$$t = \int_a^x \sqrt{\rho(\xi)} dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t t'_x = y'_t \sqrt{\rho(x)}, \\ y''_{xx} &= (y'_t \sqrt{\rho(x)})'_x = (y'_t)'_x \sqrt{\rho(x)} + y'_t \frac{\rho'_x}{2\sqrt{\rho(x)}} = y''_{tt} \rho + \frac{1}{2} y'_t \rho'_t. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение (3) и разделим на ρ . Получим

$$-y'' + \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho}\right) y' + \frac{q}{\rho} y = \lambda^2 y. \quad (8)$$

Здесь все производные берутся по переменной $t \in [0, h]$, где $h = \int_a^b \sqrt{\rho(\xi)} d\xi$. Заметим, что по условию функции p и ρ' от переменной x принадлежат пространствам $L_2[a, b]$ и $L_1[a, b]$. В силу равенства $dt = \sqrt{\rho(x)} dx$ эти свойства сохраняются, если их рассматривать как функции от переменной $t \in [0, h]$. Отметим здесь же, что из абсолютной непрерывности функции ρ и условия $\rho(x) > 0$ при $x \in [a, b]$ следует ограниченность функции ρ и ее равномерная отделенность от нуля.

Шаг 2. Положим

$$\sigma(t) = \int \frac{q(t)}{\rho(t)} dt,$$

где первообразная берется по переменной t в смысле теории распределений. Заметим, что $\sigma \in L_2[0, h]$. Действительно, по условию $u = \int q(x) dx \in L_2[a, b]$. Тогда

$$\left(\frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)'_t = \left(\frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)'_x \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \left(\frac{u'_x}{\sqrt{\rho}} - \frac{\rho'_x u}{2\rho^{3/2}}\right) \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{q}{\rho} - \frac{\rho'_x u}{2\rho^2}.$$

Функция $u/\sqrt{\rho} \in L_2[0, h]$, поэтому левая часть последнего равенства принадлежит $W_2^{-1}[0, h]$. Так как по условию $\rho'_x u/2\rho^2 \in L_1[0, h] \subset W_2^{-1}[0, h]$, то $q/\rho \in W_2^{-1}[0, h]$, а тогда $\sigma \in L_2[0, h]$.

Далее воспользуемся приемом из работы [8]. Введем квазипроизводную

$$y^{[1]} = y' - \sigma y \quad (9)$$

и перепишем уравнение (8) в виде

$$-(y^{[1]})' + \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho} - \sigma\right) y^{[1]} + \left(-\sigma^2 + \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho}\right) \sigma\right) y = \lambda^2 y. \quad (10)$$

Обозначим

$$f = \frac{p}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho}, \quad g = \left(\frac{p}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho}\right) \sigma - \sigma^2.$$

Отметим, что в силу условий (4), (5) обе функции f и g принадлежат пространству $L_1[0, h]$. Уравнения (9) и (10) эквивалентны системе уравнений

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Lambda = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ -\lambda^2 + g & f - \sigma \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Известно (см., например, [5; § 18]), что такая система уравнений (при условии, что все элементы матрицы суммируемые функции) имеет два линейно независимых решения, причем обе компоненты y и $y^{[1]}$ этих решений абсолютно непрерывны. Далее под решениями исходного уравнения (3) мы будем понимать функции $y = y(t(x))$, где $y(t)$ – решение задачи (11).

Шаг 3. Положим $y = y_1$, $y^{[1]} = y_2$ и перепишем систему (11) в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \Lambda_0 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \Lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ g & f - \sigma \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Решение системы $\mathbf{y} = \Lambda_0 \mathbf{y}$ находим явно

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & e^{-\mu t} \\ \mu e^{\mu t} & -\mu e^{-\mu t} \end{pmatrix}, \quad \mu = -i\lambda,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Далее воспользуемся методом вариации постоянных. Найдем функции $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$, которые являются решениями системы

$$M \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}' = \Lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ g & f - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \mu e^{-\mu t} & e^{-\mu t} \\ \mu e^{\mu t} & -e^{\mu t} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}' = M^{-1} \Lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\mu t}(\sigma + \mu^{-1}g) & \mu^{-1}e^{-\mu t}(f - \sigma) \\ e^{\mu t}(\sigma - \mu^{-1}g) & -\mu^{-1}e^{\mu t}(f - \sigma) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} + M(t) \int_0^t K(\xi) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} d\xi, \quad (13)$$

где C_1^0, C_2^0 – произвольные постоянные.

Положим $C_1^0 = 1, C_2^0 = 0$ и сделаем замену $y_1 = e^\mu z_1, y_2 = \mu e^\mu z_2$. Тогда уравнение (13) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = M_0^{-1}(t)M(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_0^{-1}(t)M(t) \int_0^t K(\xi)M_0(\xi) \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Здесь

$$M_0 = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix}, \quad M_0^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\mu t} \\ 1 & -e^{-2\mu t} \end{pmatrix},$$

$$KM_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\sigma + \mu^{-1}g) & (f - \sigma) \\ e^{2\mu\xi}(\sigma - \mu^{-1}g) & -e^{2\mu\xi}(f - \sigma) \end{pmatrix}.$$

Теперь последнее уравнение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{B} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} \sigma + \mu^{-1}g & f - \sigma \\ \sigma + \mu^{-1}g & f - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad (15)$$

$$\mathcal{B} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\mu(t-\xi)}(\sigma - \mu^{-1}g) & -e^{-2\mu(t-\xi)}(f - \sigma) \\ -e^{-2\mu(t-\xi)}(\sigma - \mu^{-1}g) & e^{-2\mu(t-\xi)}(f - \sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi. \quad (16)$$

Шаг 4. Далее нам потребуются вспомогательные предложения. Разные варианты этих предложений известны, но для нужных нам версий мы не нашли подходящей ссылки, поэтому для полноты изложения приведем доказательства.

ЛЕММА 1. Пусть $B[0, h]$ – это пространство ограниченных функций с нормой $\|z(x)\| = \sup_{x \in [0, h]} |z(x)|$. Пусть функция $K(x, \xi)$ при всех $x \in [0, h]$ суммируема по ξ на отрезке $[0, h]$ и подчинена оценке

$$|K(x, \xi)| \leq Cf(\xi), \quad \text{где } f \in L_1[0, h],$$

с постоянной C , не зависящей от x и ξ . Тогда оператор

$$(Tz)(x) = \int_0^x K(x, \xi)z(\xi) d\xi$$

ограничен в пространстве $B[0, h]$ и его спектральный радиус равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность оператора вытекает из оценки

$$|(Tz)(x)| \leq CF(x)\|z(x)\|, \quad \text{где} \quad F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Далее, используем метод индукции. Предположим, что уже доказана оценка

$$|(T^{n-1}z)(x)| \leq \frac{C^{n-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x)\|z(x)\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(T^n z)(x)| &\leq \frac{C^n}{(n-1)!} \int_0^x f(\xi) F^{n-1}(\xi) d\xi \|z(x)\| \\ &= \frac{C^n}{(n-1)!} \int_0^x F^{n-1}(\xi) dF(\xi) \|z(x)\| = \frac{C^n}{n!} F^n(x) \|z(x)\|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|T^n\| \leq C^n F^n(h)/n!$. Так как спектральный радиус оператора определяется равенством $r(T) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$, то получаем $r(T) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$$

– оператор в пространстве $B[0, h] \oplus B[0, h]$, где

$$(T_j z)(x) = \int_0^x K_j(x, \xi) z(\xi) d\xi,$$

причем ядра K_j подчинены условию леммы 1, т.е.

$$|K_j(x, \xi)| \leq C_j f_j(\xi), \quad \text{где} \quad f_j \in L_1[0; h], \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда оператор $\mathcal{T}$ ограничен и его спектральный радиус равен 0. Более того,

$$\|\mathcal{T}^n\| \leq \frac{2(2C)^n F^n(h)}{n!},$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad f(x) = \max_{1 \leq j \leq 4} f_j(x), \quad C = \max_{1 \leq j \leq 4} C_j.$$

Здесь норму вектора $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ в пространстве $B[0, h] \oplus B[0, h]$ мы определяем равенством $\|z\| = \max(\|z_1\|, \|z_2\|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\mathcal{T}^n = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

где каждый из операторов U_j , $j = 1, 2, 3, 4$, есть сумма 2^{n-1} слагаемых, а эти слагаемые есть произведения вида $T_{m_1} T_{m_2} \cdots T_{m_n}$ с индексами $1 \leq m_k \leq 4$ (конечно, среди

индексов могут быть одинаковые). Тогда

$$\begin{aligned}
 & |(T_{m_1} T_{m_2} \cdots T_{m_n} z)(x)| \\
 & \leq \int_0^x |K_{m_1}(x, \xi) \int_0^\xi K_{m_2}(\xi, t) \cdots \int_0^\tau K_{m_n}(\tau, s) z(s) ds d\tau \cdots dt| d\xi \|z\| \\
 & \leq C_{m_1} C_{m_2} \cdots C_{m_n} \int_0^x f_{m_1}(\xi) \int_0^\xi f_{m_2}(t) \cdots \int_0^\tau f_{m_n}(s) ds d\tau \cdots dt d\xi \|z\| \\
 & \leq C^n \int_0^x f(\xi) \int_0^\xi f(t) \cdots \int_0^\tau f(s) ds d\tau \cdots dt d\xi \|z\| \leq \frac{C^n F^n(h)}{n!} \|z\|.
 \end{aligned}$$

Очевидно, норма оператора T^n допускает оценку $\|T^n\| \leq \|U_1\| + \|U_2\| + \|U_3\| + \|U_4\|$. Но тогда $\|T^n\| \leq 4 \cdot 2^{n-1} C^n F^n(h)/n!$, что доказывает лемму.

Заметим, что если ядра интегральных операторов непрерывны по x как функции со значениями в пространстве $L_1[0, h]$, то соответствующие операторы корректно определены в пространстве непрерывных функций $C[0, h]$. Оценки для норм в этом пространстве, конечно, сохраняются.

Шаг 5. Далее будем работать в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu \geq -r$, где получим асимптотические представления для решений. Вернемся к представлению (14) и заметим, что интегральные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, определенные интегральными формулами (15) и (16), таковы, что элементы их матричных ядер допускают оценку

$$\leq e^{2rh} v(\xi), \quad \text{где } v(\xi) = |f(\xi)| + |g(\xi)| + |\sigma(\xi)|,$$

равномерно по $0 \leq \xi \leq x \leq h$ при $\operatorname{Re} \mu \geq -r$, $|\mu| \geq 1$.

Решение уравнения (14) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (1 - \mathcal{A})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{T} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = (1 - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B}. \quad (17)$$

Заметим, что интегральный оператор $\mathcal{A} + \zeta \mathcal{B}$ вольтерров, т.е. его спектральный радиус равен нулю при любом $\zeta \in \mathbb{C}$. Поэтому оператор

$$(1 - \mathcal{A} - \zeta \mathcal{B}) = (1 - \mathcal{A})(1 - \zeta \mathcal{T})$$

обратим при любом $\zeta \in \mathbb{C}$. Но тогда $(1 - \zeta \mathcal{T})$ обратим при любом $\zeta \in \mathbb{C}$, т.е. спектральный радиус оператора $\mathcal{T}$ равен нулю. Следовательно, при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем $\|T^n\| < \varepsilon^n$, если $n \geq N = N(\varepsilon)$. Решение уравнения (17) теперь запишем в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{T}^k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \mathcal{T}^N (1 - \mathcal{T})^{-1} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = (1 - \mathcal{A})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Согласно (15) имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} \sigma + \mu^{-1} g & f - \sigma \\ \sigma + \mu^{-1} g & f - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} F(t) \\ F(t) \end{pmatrix} + O(\mu^{-1}), \quad F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n n!} \begin{pmatrix} F^n(t) \\ F^n(t) \end{pmatrix} + O(\mu^{-1}) \frac{C^n}{n!}, \quad (1 - \mathcal{A})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)F(t)} \\ e^{(1/2)F(t)} \end{pmatrix} + O(\mu^{-1}). \quad (19)$$

Поясним, как получаются эти соотношения. Легко видеть, что

$$\mathcal{A}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} (V_1 + \mu^{-1}V_2)^n \\ (V_1 + \mu^{-1}V_2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$V_1 z = \int_0^t f(\xi) z(\xi) d\xi, \quad V_2 z = \int_0^t g(\xi) z(\xi) d\xi.$$

Имеем

$$(V_1 + \mu^{-1}V_2)^n = V_1^n + \mu^{-1}U_n,$$

где U_n есть сумма $2^n - 1$ слагаемых вида $\mu^{-j}V_{k_1}V_{k_2} \cdots V_{k_n}$. Здесь $j \geq 0$, а индексы k_j принимают значения 1 и 2. Повторяя рассуждения леммы 2, получаем при $|\mu| \geq 1$ оценки $\|U_n\| \leq C^n/n!$. Из этих оценок следуют соотношения (19).

Согласно введенным обозначениям получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F(\xi) &= \frac{1}{2} \int_0^\xi \frac{p(x(t))}{\sqrt{\rho(x(t))}} dt - \frac{1}{4} \int_0^\xi \frac{\rho'_t}{\rho} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\xi \frac{p(x(t))}{\sqrt{\rho(x(t))}} t'_x dx(t) - \frac{1}{4} \int_0^\xi \frac{\rho'_x}{t'_x \rho} t'_x dx = \frac{1}{2}P(\xi) + \ln \frac{1}{\sqrt[4]{\rho(\xi)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что для любой фиксированной функции $\psi(\xi) \in L_1(0, h)$ выполняется соотношение

$$\left| \int_0^t e^{2\mu(t-\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow \infty \quad (21)$$

равномерно по $t \in [0, h]$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu \geq -r$. Доказательство этого факта стандартно. Сначала с помощью интегрирования получаем, что для гладкой функции ψ этот интеграл есть $O(\mu^{-1})$ при $|\mu| \rightarrow \infty$, а тогда утверждение (21) получается из того, что суммируемую функцию можно с произвольной точностью в метрике пространства L_1 приблизить функцией гладкой.

Обратимся к представлению (18). Фиксируем произвольное число ε и выберем число N так, чтобы

$$\|\mathcal{T}^N(1 - \mathcal{T})^{-1}(1 - \mathcal{A})^{-1}\| < \varepsilon.$$

Тогда норма в пространстве $C[0, h] \oplus C[0, h]$ последнего слагаемого в (18) оценивается числом ε . В силу (16) и (21) имеем (здесь $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mu)$)

$$\left\| \mathcal{B} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow \infty \quad \text{в полуплоскости} \quad \operatorname{Re} \mu \geq -r.$$

Но тогда при любом фиксированном $k \geq 1$ получаем

$$\left\| \mathcal{T}^k \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| = o(1) \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \mu \geq -r.$$

Следовательно, нормы всех слагаемых, начиная со второго, в правой части (18) оцениваются числом ε/N при условии, что $|\mu| > r_0$, а r_0 достаточно большое число. Тогда из (18) и (20) получаем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1/2)F(t)} \\ e^{(1/2)F(t)} \end{pmatrix} (1 + o(1)) \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} \mu \geq -r, \quad (22)$$

где функция F определена в (20). Теперь утверждение теоремы для решения $y_+(x, \lambda)$ получается из равенств

$$\begin{pmatrix} y(x, \lambda) \\ y^{[1]}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = i\mu.$$

Шаг 6. Докажем существование решения $y_-(x, \lambda)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \geq -r$. Систему (11) мы представили ранее в виде интегрального уравнения (13). Заменив в (13) постоянные C_1^0, C_2^0 мы запишем интегральное уравнение в другой форме:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_2^0 \end{pmatrix} - M(t) \int_t^h K(\xi) \begin{pmatrix} y_1(\xi) \\ y_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Здесь C_1^0, C_2^0 – снова произвольные постоянные, но уже другие, нежели в (13). Положим $C_1^0 = 0, C_2^0 = 1$ и сделаем замену $y_1 = e^{-\mu t} z_1, y_2 = -\mu e^{-\mu t} z_2$. Тогда уравнение перепишется в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = M_1^{-1}(t) M(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - M_1^{-1}(t) M(t) \int_t^h K(\xi) M_1(\xi) \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad (23)$$

Здесь

$$M = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & e^{-\mu t} \\ \mu e^{\mu t} & -\mu e^{-\mu t} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & -\mu e^{-\mu t} \end{pmatrix}, \quad M_1^{-1} M = \begin{pmatrix} e^{2\mu t} & 1 \\ -e^{2\mu t} & 1 \end{pmatrix},$$

$$K M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2\mu \xi} (\sigma + \mu^{-1} g) & -e^{-2\mu \xi} (f - \sigma) \\ \sigma - \mu^{-1} g & f - \sigma \end{pmatrix}.$$

Теперь уравнение (23) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \int_t^h \begin{pmatrix} \sigma - \mu^{-1} g & f - \sigma \\ \sigma - \mu^{-1} g & f - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi,$$

$$\mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \int_t^h \begin{pmatrix} e^{2\mu(t-\xi)} (\sigma + \mu^{-1} g) & -e^{2\mu(t-\xi)} (f - \sigma) \\ -e^{2\mu(t-\xi)} (\sigma + \mu^{-1} g) & e^{2\mu(t-\xi)} (f - \sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\xi) \\ z_2(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Очевидно, операторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_1$ также вольтерровы в пространстве $C[0, h] \oplus C[0, h]$. Кроме того,

$$|e^{2\mu(t-\xi)}| \leq e^{2rh} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \mu \geq -r \quad \text{и} \quad \xi \in [t, h], \quad t \in [0, h].$$

Поэтому все прежние рассуждения сохраняются и мы получаем, что решение уравнения (23) представимо в виде (22). Тогда утверждение теоремы для решения $y_-(x, \lambda)$ получается из равенств

$$\begin{pmatrix} y_-(x, \lambda) \\ y_-^{[1]}(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & -\mu e^{-\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = i\mu.$$

Асимптотические представления решений в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda \leq r$ получаются аналогично. Этим завершается доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. D. Birkhoff, “On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219–231.
- [2] G. D. Birkhoff, “Boundary value and expansion problem of ordinary linear differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 373–395.
- [3] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Типография М. П. Фроловой, Петроград, 1917.
- [4] И. М. Рапопорт, *О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений*, Изд-во АН УССР, Киев, 1954.
- [5] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Классика и современность, Физматлит, М., 2010.
- [6] А. М. Савчук, А. А. Шкалик, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, *Тр. ММО*, **64**, 2003, 159–212.
- [7] А. М. Савчук, А. А. Шкалик, “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость”, *Функци. анализ и его прил.*, **44:4** (2010), 34–53.
- [8] А. М. Савчук, А. А. Шкалик, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912.

В. Е. Владыкина

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: vika-chan@mail.ru

Поступило

06.10.2015

А. А. Шкалик

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: shkalikov@mi.ras.ru