Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юрова, О непрерывных сужениях измеримых полилинейных отображений, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 930–936

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:26:56

О непрерывных сужениях измеримых полилинейных отображений

Е. В. Юрова

В статье изучаются измеримые полилинейные функции на пространствах Фреше и аналоги следующих двух свойств для них, которые равносильны для измеримого линейного функционала относительно гауссовской меры: (i) существование последовательности непрерывных линейных функций, сходящейся к данному функционалу почти всюду; (ii) существование компактно вложенного банахова пространства полной меры, на котором данный функционал непрерывен. Показано, что для полилинейных функций на степени пространства X эти свойства не равносильны, но свойство (ii) равносильно формально более ограничительному условию, что компактно вложенное подпространство является степенью подпространства, вложенного в X .

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10977

Известно, что для измеримого линейного функционала A на сепарабельном пространстве Фреше X с центрированной гауссовской мерой γ верны следующие два утверждения (см. [1] и [2]):

- (i) A почти всюду является поточечным пределом последовательности непрерывных линейных функционалов;
- (ii) существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в X , и непрерывный линейный функционал $\tilde{A}: E \rightarrow \mathbb{R}$, почти всюду совпадающий с A .

Мы говорим, что банахово пространство E *компактно* вложено в локально выпуклое пространство X , если E является линейным подпространством в X , причем единичный шар E имеет компактное замыкание в X . Если E рефлексивно, то его замкнутый единичный шар будет компактен в X , так как он слабо компактен.

На самом деле свойство (ii) влечет свойство (i) для любой борелевской меры (см. [3; теорема 8.6.26] или [4; лемма 2]), так как известно, что для всякого банахова пространства E , компактно вложенного в X , всякий непрерывный линейный функционал на E является поточечным пределом последовательности сужений на E непрерывных функционалов на X .

Напомним, что центрированная гауссовская мера γ – такая радоновская вероятностная мера на борелевской σ -алгебре пространства X , что всякий непрерывный

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00196).

линейный функционал на X является центрированной гауссовской случайной величиной относительно γ (см. [1], [5]). Множество полной меры есть множество меры 1.

Возникает естественный вопрос, выполняются ли эти свойства или их аналоги для измеримых полилинейных функций. Можно рассматривать этот вопрос для более сильного условия (ii) или для более слабого условия (i).

Есть даже два естественных обобщения первой задачи (т.е. относящейся к свойству (ii)) для полилинейных форм

$$B(x_1, \dots, x_n): X \times X \times \dots \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

где предполагается, что X^n наделено произведением n копий меры γ :

- (а) существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X , и непрерывная полилинейная форма

$$\tilde{B}(x_1, \dots, x_n): L \times \dots \times L \rightarrow \mathbb{R},$$

что $\tilde{B}(x_1, \dots, x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \dots, x_n) \in L \times \dots \times L$;

- (б) существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \dots \times X$, и непрерывная билинейная форма

$$\tilde{B}(x_1, \dots, x_n): E \rightarrow \mathbb{R},$$

что $\tilde{B}(x_1, \dots, x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \dots, x_n) \in E$.

Цель этой статьи – показать, что для всех $n > 1$ свойства (а) и (б) равносильны, но даже для случая $n = 2$ они не равносильны естественному аналогу свойства (i), т.е. они не равносильны существованию последовательности непрерывных форм, сходящихся к B почти всюду относительно произведения мер.

Следующая теорема в действительности является результатом о банаховых пространствах полной меры, компактно вложенных в X^n ; наш основной результат – его прямое следствие для измеримых форм. Поэтому эта теорема верна для случая, когда B – полилинейный оператор из X^n в банахово пространство Y .

ТЕОРЕМА. *Если E – сепарабельное рефлексивное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в X^n , то существует такое сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X , что $L^n \subset E$ и вложение компактно.*

Следовательно, свойства (а) и (б) равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что (а) $\Rightarrow$ (б). Ясно, что в качестве E можно брать $L \times \dots \times L$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_L, \dots, \|x_n\|_L\}.$$

Разумеется, форма $\tilde{B}$ из условия (а) непрерывна на E .

Докажем, что (б) $\Rightarrow$ (а). Нам нужно найти сепарабельное рефлексивное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X , и билинейную форму, непрерывную на $L \times \dots \times L$, почти всюду равную исходной. Если мы найдем L , непрерывно вложенное в X , для которого $L \times \dots \times L \subset E$, то это вложение будет также непрерывно по теореме о замкнутом графике, а функция $\tilde{B}$, непрерывная

на E , будет также непрерывна на $L \times \cdots \times L$. Таким образом, остается только доказать первое утверждение теоремы, которое не привлекает форм.

Заметим, что о компактности вложения $L \subset X$ можно не беспокоиться, так как она также будет следовать автоматически из того, что $L \times \cdots \times L$ непрерывно вложено в E , а последнее компактно вложено.

Сначала докажем наше утверждение в случае, когда E – сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в $X \times \cdots \times X$, обладающее свойством, что оно и его норма симметричны относительно перестановки координат в $X \times \cdots \times X$. Рассмотрим множества

$$E_{x_2^0, \dots, x_n^0} = \{x \in X : (x, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E\}, \quad (x_2^0, \dots, x_n^0) \in X^{n-1}.$$

Каждое из них – аффинное подпространство полной меры для γ^{n-1} -почти всех фиксированных векторов $(x_2^0, \dots, x_n^0) \in X^{n-1}$. Возьмем такой вектор. Множество

$$L = E_{x_2^0, \dots, x_n^0}$$

есть линейное подпространство в X , потому что оно содержит нуль. В самом деле, иначе аффинное пространство $-L$ было бы дизъюнктно с L , что невозможно, так как $-L$ является подпространством полной меры ввиду симметричности меры γ .

Более того, заметим, что $L \times \cdots \times L \in E$. В самом деле, пусть $u_1, \dots, u_n \in L$. Нужно показать, что $(u_1, \dots, u_n) \in E$. Так как L – линейное подпространство, то $0 \in L$; значит,

$$(0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E, \quad (u_j, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $(u_j, 0, \dots, 0) \in E$ для всякого $j = 1, \dots, n$. Так как E симметрично относительно любых перестановок координат, то $(0, \dots, 0, u_j, 0, \dots, 0) \in E$, где u_j стоит на j -м месте, откуда мы получаем, что $(u_1, \dots, u_n) \in E$, что и требовалось.

Теперь введем норму на L : зададим ее формулой

$$\|y\|_L = \|(y, 0, \dots, 0)\|_E, \quad y \in L = E_{x_2^0, \dots, x_n^0}.$$

Заметим, что в силу указанного выше свойства $(y, 0, \dots, 0) \in E$.

Докажем, что пространство L полно. Пусть $\{y_m\}$ – фундаментальная последовательность в L . Тогда из определения нормы на L следует, что последовательность $\{(y_m, 0, \dots, 0)\}$ фундаментальна в E ; так как E полно, то у нее есть предел $(a_1, \dots, a_n)$ в E . Далее, так как E непрерывно вложено в X^n , то $a_2 = \cdots = a_n = 0$; тогда $(a_1, 0, \dots, 0) \in E$. Поскольку $(0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$, то $(a_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \in E$; значит, $a_1 \in L$ и это предел последовательности $\{y_m\}$, при этом он лежит в L . Таким образом, L полно.

Далее, пространство $L \times \cdots \times L$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{\|x_k\|_L : k = 1, \dots, n\}$$

непрерывно вложено в E . В самом деле, если $\|(x_1, \dots, x_n)\| \leq 1$, то $\|x_k\| \leq 1$ для всех $k \leq n$, тогда $\|(x_k, 0, \dots, 0)\|_E \leq 1$. Поэтому из симметрии пространства E и его нормы относительно перестановок координат следует, что

$$\|(0, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\|_E \leq 1,$$

где x_k стоит на k -м месте. Значит, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_E \leq n$. Таким образом, мы доказали непрерывность вложения $L \times \dots \times L$ в E , откуда следует, что вложение $L \times \dots \times L$ в $X \times \dots \times X$ компактно. Следовательно, вложение L в X компактно.

Известно (см. [6; теорема 7.12.4]), что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство $\tilde{L}$ полной меры, компактно вложенное в L . Тогда $\tilde{L} \times \dots \times \tilde{L}$ компактно вложено в $L \times \dots \times L$, а $L \times \dots \times L$ непрерывно вложено в E ; значит, $\tilde{L} \times \dots \times \tilde{L}$ компактно вложено в E ; следовательно, $\tilde{L} \subset X$ — компактное вложение, а в качестве искомого пространства L мы можем взять $\tilde{L}$.

Таким образом, осталось доказать, что можно взять E симметричным с симметричной нормой. Симметрия меры γ^n относительно всех перестановок координат здесь существенна. Для всякой перестановки координат $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ множество

$$E_\sigma = \{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in X \times \dots \times X : (x_1, \dots, x_n) \in E\}$$

является линейным пространством полной γ^n -меры в $X \times \dots \times X$. Поэтому множество

$$\tilde{E} = \bigcap_{\sigma} E_\sigma,$$

где пересечение берется по всем перестановкам координат σ , также является линейным подпространством полной меры в $X \times \dots \times X$. Введем теперь следующую норму:

$$\| (x_1, \dots, x_n) \| = \sum_{\sigma} \| (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \|_E,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам координат $\{1, \dots, n\}$. Легко проверить, что пространство $\tilde{E}$ с этой нормой полно. Пространство $\tilde{E}$ и норма $\| \cdot \|$ очевидным образом симметричны относительно всех перестановок координат. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что эта теорема с таким же доказательством остается верной для всякой радоновской вероятностной меры на X , которая инвариантна относительно замены $x \mapsto -x$ (такие меры называются *симметричными*).

Теперь приведем пример, показывающий, что свойства (i) и (ii), равносильные в случае $n = 1$, не равносильны при $n \geq 2$. В качестве γ возьмем счетную степень стандартной гауссовской меры на прямой $\mathbb{R}$ и будем рассматривать эту меру на пространстве X всех последовательностей или на гильбертовом подпространстве последовательностей с конечной весовой нормой

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n^2 \right)^{1/2}.$$

Пример, приведенный ниже, очень прост, однако мы не смогли придумать элементарного доказательства (приводимое ниже доказательство коротко, но оно использует весьма нетривиальный факт из недавней работы [7], где была решена долгое время остававшаяся открытой проблема о существовании алгебраически полиномиальных версий измеримых полиномов).

ПРИМЕР. Существует билинейная форма на $X \times X$, которая почти всюду является поточечным пределом последовательности непрерывных билинейных форм, но при этом для нее нет сепарабельного рефлексивного банахова пространства L полной меры, компактно вложенного в X , и такой непрерывной билинейной формы $\tilde{B}(x, y): X \times X \rightarrow R$, что $\tilde{B}(x, y) = B(x, y)$ для почти всех $(x, y) \in X \times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n y_n,$$

заданную этим выражением там, где ряд сходится. Это пока еще не билинейная форма (так как область определения не является линейным пространством). Заметим, что ряд сходится для γ^2 -почти всех (x, y) . В самом деле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n^2$ сходится для γ -почти всех x по теореме о монотонной сходимости, потому что интеграл от x_n^2 равен 1. Далее, по той же теореме, для каждого фиксированного x с указанным свойством имеет место сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n y_n$$

по y для γ -почти всех y . Согласно [7] функция B может быть доопределена с ее естественной области определения до билинейной формы на всем пространстве $X \times X$ (в обычном алгебраическом смысле). Этот факт, верный для измеримых форм общего вида, отнюдь не является тривиальным даже в этом частном случае.

Докажем наше утверждение от противного. Пусть существуют пространство $L \subset X$ с нужными свойствами и такая непрерывная билинейная форма $\tilde{B}$ на $L \times L$, что

$$\tilde{B}(x, y) = B(x, y)$$

для γ^2 -почти всех (x, y) . Из этого следует, что равенство выполняется на пространстве ℓ^2 (оно является подпространством Камерона–Мартин для меры γ), благодаря следующему свойству γ -измеримых линейных (в обычном смысле) функционалов: две такие функции совпадают почти всюду в точности тогда, когда они совпадают на пространстве Камерона–Мартин меры γ (см. [1]). Следовательно, для почти всякого фиксированного x верно равенство

$$\tilde{B}(x, y) = B(x, y) \quad \text{для почти всех } y.$$

Тогда

$$\tilde{B}(x, y) = B(x, y) \quad \text{для всех } y \in \ell^2.$$

Значит,

$$\tilde{B}(x, y) = B(x, y) \quad \text{для всех } x \in \ell^2, \quad y \in \ell^2.$$

Рассмотрим операторы

$$P_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots).$$

Так как $P_n x \in l_2$, то

$$\tilde{B}(P_n x, P_n y) = B(P_n x, P_n y) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{i}.$$

Последовательность $\{P_n x\}$ сходится почти всюду в L по теореме Ито–Нисию (или по более общему результату, принадлежащему Цирельсону, см. [1]), причем ее покоординатный предел есть x . Значит, она сходится к x почти всюду по норме L . Так как функция $\tilde{B}$ непрерывна, то для почти всех x имеем

$$\tilde{B}(P_n x, P_n x) \rightarrow \tilde{B}(x, x),$$

откуда

$$\tilde{B}(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i} \quad \text{для всех } x,$$

а это невозможно в силу того, что этот ряд расходится почти всюду на X из-за расходимости рядов интегралов его членов (здесь можно применить теорему Колмогорова о трех рядах для независимых случайных величин x_i^2/i или известный факт, состоящий в том, что если ряд из полиномов фиксированной степени сходится γ -почти всюду, то он сходится в $L^2(\gamma)$).

Таким образом, естественные обобщения свойств (i) и (ii) не равносильны даже для билинейных функций и гауссовских мер. Заметим, что форма, рассматриваемая в примере, относится к классу измеримых билинейных функций, введенных в [8] (где требуется, чтобы такая функция была измеримым линейным функционалом одной переменной при почти всяком фиксированном значении другой переменной).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть γ – центрированная гауссовская мера на сепарабельном банаховом пространстве X и $L \subset X$ – выпуклое множество положительной меры (скажем, линейное подпространство полной меры). Долгое время остается открытой проблема, существует ли выпуклое компактное множество $K \subset L$ положительной меры. Некоторые достаточные условия для этого приведены в работе [9]. Однако для негауссовских мер существует контрпример, построенный Вайцтеккером [10], см. также [6; упражнение 7.14.140]. Такие выпуклые компактные множества могут быть полезны для построения непрерывных версий линейных измеримых операторов. Например, в гауссовском случае, если A – такое измеримое отображение из X со значениями в сепарабельном банаховом пространстве Y , что A линейно на линейном подпространстве L полной меры, то это гипотетическое свойство обеспечивало бы существование уравновешенного компактного множества K , на котором A ограничено. Тогда A непрерывно на линейной оболочке K относительно нормы, заданной функционалом Минковского множества K . Впрочем, доказательство, приведенное в [2], основано на другой идее.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Упомянем одно наблюдение, сделанное А. Н. Пличко в частном сообщении в связи со статьей [2]. Пусть E – такое сепарабельное рефлексивное банахово пространство, что единичный оператор в E не является поточечным пределом последовательности компактных операторов (известно, что такие пространства существуют). Существует компактный инъективный оператор $j: E \rightarrow \ell^2$, поэтому

мы можем считать, что E – линейное подпространство в ℓ^2 , наделенное более сильной нормой. Рассмотрим единичный оператор $A: E \rightarrow E$. Тогда не существуют непрерывные операторы $A_n: \ell^2 \rightarrow E$, поточечно сходящиеся к A на E . В самом деле, операторы $A_n|_E$ компактны, так как вложение $E \rightarrow \ell^2$ компактно. Следовательно, вышеупомянутый факт о поточечном приближении линейных функционалов не распространяется на операторы. Однако мы не знаем, изменится ли положение, если разрешить брать меньшее компактно вложенное банахово пространство полной меры для заданной меры (для некоторых мер это помогает).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. I. Bogachev, *Gaussian Measures*, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [2] Е. В. Юрова, “О непрерывных сужениях линейных измеримых операторов”, *Докл. РАН*, **443**:3 (2012), 300–303.
- [3] В. И. Богачев, О. Г. Смолянов, *Действительный и функциональный анализ: университетский курс*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.–Ижевск, 2009.
- [4] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [5] V. I. Bogachev, “Gaussian measures on infinite-dimensional spaces”, *Real and Stochastic Analysis*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014, 1–83.
- [6] V. I. Bogachev, *Measure Theory*, Vol. II, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [7] Л. М. Арутюнян, И. С. Ярославцев, “Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах”, *Докл. РАН*, **449**:6 (2013), 627–631.
- [8] О. Г. Смолянов, “Измеримые полилинейные и степенные функционалы в некоторых линейных пространствах с мерой”, *Докл. АН СССР*, **170**:3 (1966), 526–529.
- [9] L. M. Arutyunyan, E. D. Kosov, I. S. Yaroslavl'tsev, “On convex compact sets of positive measure in linear spaces”, *Math. Notes*, **96**:3 (2014), 448–450.
- [10] H. von Weizsäcker, “A note on infinite dimensional convex sets”, *Math. Scand.*, **38**:2 (1976), 321–324.

Е. В. Юрова

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: yurova-k@rambler.ru

Поступило

27.06.2015