Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ф. Чичоян, О гладкости решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в негладких двумерных областях, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 952–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 03:55:40

О гладкости решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в негладких двумерных областях

С. Ф. Чичоян

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, граница $\partial\Omega$ которой содержит точку 0 – начало координат, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание Ω , $x = (x_1, x_2)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

В области Ω рассматривается задача Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad f(x) \in L^2(\Omega), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{grad } u(x)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Вопросы об асимптотике, гладкости, единственности и методы их исследования подобных задач развиты в работах Кондратьева, Олейник и их учеников, [1]–[9]. В частности, в работах [1]–[5] для решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения получены оценки в окрестности нерегулярных точек границы при слабых предположениях относительно структуры границы в окрестности этих точек, а также оценки, характеризующие поведение решений в окрестности нерегулярных точек границы. Изучено поведение обобщенного решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в окрестности граничной точки и в окрестности бесконечности в случае двух независимых переменных. Кроме того, получены энергетические оценки, выражающие принцип Сен-Венана в теории упругости для произвольного плоского тела, доказаны теоремы единственности решения задачи Дирихле для неограниченных областей в классе функций, зависящем от геометрии области. Также получены неувлучшаемые оценки характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\nabla u(x)|$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В работе [6] с условием конечности интеграла Дирихле на поведение решения на бесконечности изучены вопросы единственности решений краевых задач для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях. В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) изучены вопросы единственности и найдены размерности пространства решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения в работах [7]–[9].

Поведение при $|x| \rightarrow \infty$ обобщенных решений задачи Дирихле для системы уравнений Навье–Стокса и системы Кармана в окрестности бесконечно удаленной точки рассматривались в работе [10], а гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для системы уравнений Навье–Стокса в негладких двумерных областях в [11], в которых при определенных условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение решений задачи Дирихле.

В данной заметке методом весовых функций, изучаются вопросы гладкости решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения в двумерной области с негладкой границей.

Введем следующие обозначения:

- $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области Ω , имеющих компактный носитель в Ω ;
- $H^k(\Omega)$ – пространство Соболева, полученное пополнением $C^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u(x)\|_{H^k(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^2 dx,$$

где $D^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|} / (\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс, α_j – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $k \in \mathbb{N}$;

- $\dot{H}^k(\Omega)$ – пространство функций в Ω , полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^k(\Omega)$.

Положим

$$E(u, v) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{2}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha v, \quad E(u) = E(u, u), \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2!,$$

$$M_\Omega(u) = \inf_Q \left(\frac{1}{\text{mes } Q} \int_\Omega u^2(x) dx \right)^{1/2},$$

где Q – любое ограниченное множество в Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $u(x) \in \dot{H}^2(\Omega)$, для которой при любой функции $v(x) \in \dot{H}^2(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega E(u, v) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Установим следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x) \in H^1(G)$. Тогда найдется постоянная C , не зависящая от $u(x)$, такая, что

$$\|u(x)\|_{H^1(G)} \leq C \left(\left(\int_G |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} + M_G(u) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для всякого натурального n должно существовать $u_n \in H^1(G)$ такое, что

$$\|u_n\|_{H^1(G)} > n \left(\left(\int_G |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} + M_G(u_n) \right).$$

Обозначая $v_n = u_n / \|u_n\|_{H^1(G)}$, будем, очевидно, иметь

$$\|v_n\|_{H^2(G)} = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$\left(\int_G |\nabla u_n|^2 dx \right)^{1/2} + M_G(u_n) \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Последовательность v_n , $n = 1, 2, \dots$, ограничена в $H^1(G)$, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в $L^2(G)$. Для простоты будем обозначать эту подпоследовательность также v_n , $n = 1, 2, \dots$. Из (4) следует, что эта последовательность будет фундаментальна и в $H^1(G)$, а значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{H^1(G)} = 0 \quad \text{для некоторого } v \in H^1(G).$$

Причем, $|\nabla v| = 0$. Таким образом, $v(x) = \text{const}$. Из (4) имеем $M_G(v) = v(x) = 0$. Тем самым, мы приходим к противоречию с (3). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x) \in H^2(\theta_\rho)$, где $\theta_\rho = \{x : \rho < |x| < 2\rho\}$ и в θ_ρ

$$M_{\theta_\rho}(u) = M_{\theta_\rho}(u_{x_i}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$\int_{\theta_\rho} \rho^{-4} u^2 dx + \int_{\theta_\rho} \rho^{-2} |\nabla u|^2 dx \leq C \int_{\theta_\rho} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 dx,$$

где постоянная C не зависит от u и ρ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 2 получается из леммы 1 с помощью растяжения области.

Основным результатом этой заметки является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $u(x) \in \dot{H}^2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле (1), (2), $f(x) \in L^2(\Omega)$. Пусть начало координат $0 \in \partial\Omega$, и в каждом кольце $\theta^k = \{x : 2^{-k} < |x| < 2^{-k+1}\}$ при $k \geq k_0$

$$M_{\theta^k}(u) = M_{\theta^k}(u_{x_i}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда существует постоянная $\beta > 0$, зависящая от $f(x)$ и Ω , такая, что

$$\int_{\Omega} |x|^{-\beta} \sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha} u|^2 dx + \int_{\Omega} |x|^{-\beta-2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |x|^{-\beta-4} u^2(x) dx \leq C \int_{\Omega} f^2(x) dx, \quad (5)$$

$$|u(x)|^2 \leq C |x|^{2+\beta} \int_{\Omega} f^2(x) dx, \quad (6)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от u .

Доказательство теоремы основано на леммах 1, 2 и теоремах вложения. Для получения оценок (5), (6) в интегральном тождестве вводится весовая пробная функция вида $v(x) = u(x)|x|^{-\beta}$, $\beta = \text{const} > 0$, и устанавливается оценка для модуля решения в окрестности нерегулярной граничной точки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Сиб. матем. журн.*, **19**:5 (1978), 1154–1165.
 [2] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, И. Н. Тавхелидзе, *Тр. ММО*, **42**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1981, 160–175. [3] О. А. Олейник, В. А. Кондратьев, И. Копачек, *Дифференц. уравнения*, **17**:10 (1981), 1886–1899. [4] V. A. Kondratiev, O. A. Oleinik, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **93** (1983), 327–343. [5] В. А. Кондратьев, И. Копачек, Д. М. Леквишвили, О. А. Олейник, *Современные проблемы математики. Дифференциальные уравнения, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **166**, 1984, 91–106. [6] А. А. Коньков, *Матем. сб.*, **184**:12 (1993), 23–52. [7] О. А. Матевосян, *Дифференц. уравнения*, **34**:6 (1998), 806–811. [8] О. А. Матевосян, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 403–418. [9] О. А. Matevosyan, *Russ. J. Math. Phys.*, **21**:1 (2014), 130–132. [10] С. Ф. Чичоян, *УМН*, **41**:2 (1986), 211–212. [11] С. Ф. Чичоян, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, № 1, 82–84.

С. Ф. Чичоян

Московский финансово-юридический университет

E-mail: sargish61@gmail.com

Поступило

02.03.2015