Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, Количественные оценки характеристик в гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 6, 948–951

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:31:15

Количественные оценки характеристик в гиперграфах с большим обхватом и большим хроматическим числом

А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов

1. История задачи. Работа посвящена изучению известной проблемы экстремальной комбинаторики, связанной с раскрасками гиперграфов. Напомним основные определения из теории гиперграфов.

Гиперграфом H называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ – это некоторое конечное множество, элементы которого называются *вершинами гиперграфа*, а $E = E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств V , которые принято называть *ребрами гиперграфа* H . Если каждое ребро $A \in E$ состоит ровно из n вершин, то говорят, что гиперграф H является *n -однородным*. *Раскраской* множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ называется любое отображение $f: V \rightarrow \mathbb{N}$. Раскраска f является *правильной* для гиперграфа, если в ней нет одноцветных ребер. Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскраски гиперграфа H , называется его *хроматическим числом* и обозначается $\chi(H)$.

Степенью вершины v гиперграфа H называется количество ребер H , содержащих v . Максимальную степень вершины гиперграфа H мы будем обозначать через $\Delta(H)$. *Циклом длины k* в гиперграфе $H = (V, E)$ называется чередующаяся последовательность $v_0, A_1, v_1, \dots, A_k, v_k = v_0$ из k различных вершин $v_0, \dots, v_{k-1}$ и k различных ребер $A_1, \dots, A_k$ с условием, что для любого $i = 1, \dots, k$ выполнено $v_{i-1} \in A_i$ и $v_i \in A_i$. Длина минимального цикла в гиперграфе называется его *обхватом*. Мы будем обозначать обхват гиперграфа H через $g(H)$. Гиперграфы с обхватом больше двух принято называть *простыми*.

В 1973 г. Эрдеш и Ловас в своей работе [1] доказали, что для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$, $s \geq 2$ существует n -однородный гиперграф H с хроматическим числом больше r и обхватом больше s . Более того, они показали, что можно разумно ограничить число ребер и максимальную степень вершины в таком гиперграфе.

ТЕОРЕМА 1 (Эрдеш, Ловас, [1]). Пусть $n \geq 3$, $r \geq 2$, $s \geq 2$. Тогда существует n -однородный гиперграф H со следующими свойствами:

$$\chi(H) > r, \quad g(H) > s, \quad |E(H)| \leq 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{(n+1)s}, \quad \Delta(H) \leq 20n^2 r^{n+1}.$$

Тем самым, Эрдеш и Ловас мотивировали изучение экстремальной величины $m(n, r, s)$, определяемой как *минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r и обхватом больше s* . Из теоремы 1 следует, что

$$m(n, r, s) \leq 4 \cdot 20^s n^{3s-2} r^{(n+1)s}.$$

Асимптотическое поведение величины $m(n, r, s)$ достаточно хорошо изучено в случаях $s = 1$ (условие на обхват тривиально) и $s = 2$ (класс простых гиперграфов). Подробнее об этом можно прочитать, например, в обзоре [2]. Для гиперграфов с более сильными ограничениями на обхват задача изучена намного хуже. Верхнюю оценку для $m(n, r, s)$ Эрдеша–Ловаса из теоремы 1 для произвольного s можно уточнить с помощью конструкции гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом Косточки и Рёдья из [3]. Их идеи в сочетании с теоремой Сауера [4] дают более сильную верхнюю оценку нежели теорема 1 при фиксированных n , $s \geq 3$ и растущем r :

$$m(n, r, s) \leq 2 \cdot 4^{s+2} n^{3s+3} r^{sn+2} (\ln r)^s. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2964.2014.1) и гранта Президента РФ МК-692.2014.1.

DOI: 10.4213/mzm10979

© А. Э. Хузиева, Д. А. Шабанов, 2015

Единственная же нетривиальная нижняя оценка $m(n, r, s)$ для $s > 2$ была получена Косточкой и Кумбхатом в работе [5]. Они показали, что для любых $s, r \geq 2$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(r, s, \varepsilon)$, что при всех $n > n_0$

$$\begin{aligned} m(n, r, s) &> r^{n(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} n^{1-\varepsilon} && \text{при нечетном } s; \\ m(n, r, s) &> r^{n(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} n^{-\varepsilon} && \text{при четном } s. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что зазор между оценками (1) и (2) имеет экспоненциальный порядок роста по n при фиксированных $r \geq 2$, $s > 2$. Тем самым, неизвестна даже асимптотика логарифма величины $m(n, r, s)$.

2. Новые результаты. В настоящей работе мы улучшаем нижние оценки 2 для $m(n, r, s)$. Новые оценки получены с помощью некоторого структурного результата о количественных характеристиках гиперграфов с большим обхватом и большим хроматическим числом. Для его точной формулировки введем следующие определения. Пусть $H = (V, E)$ – n -однородный гиперграф, а δ – некоторое положительное число. Вершина $v \in V$ называется δ -легкой, если ее степень в гиперграфе H не превосходит δ . В противном случае вершина называется δ -тяжелой. Ребро называется δ -тяжелым, если в нем более половины вершин являются δ -тяжелыми. В противном случае ребро называется δ -легким. Тогда выполнена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$ – фиксированное число. Тогда существуют такие положительные $c = c(\alpha)$ и $n_0 = n_0(\alpha)$, что при $r \geq 2$, $\delta = c \cdot r^{n-1}$ и $n > n_0$ для любого n -однородного гиперграфа $H = (V, E)$ с обхватом больше пяти и условиями

$$1) \Delta(H) \leq n^\alpha r^{n-1};$$

$$2) \text{ каждая вершина } H \text{ содержится не более чем в } c \cdot r^{n-1} \text{ } \delta\text{-тяжелых ребрах;}$$

выполнено $\chi(H) \leq r$.

Смысл теоремы 2 состоит в том, что если гиперграф H не является r -раскрашиваемым, то либо в нем найдется вершина уж очень большой степени, не менее $n^\alpha r^{n-1}$, либо найдется вершина, в окрестности которой найдется много, порядка cr^{n-1} , вершин просто большой степени, не меньше cr^{n-1} .

Количественные оценки в теореме 2 достаточно близки к максимально возможным. Косточка и Рёдль показали (см. [3]), что существуют n -однородные гиперграфы с хроматическим числом больше r , со сколь угодно большим обхватом и максимальной степенью вершины не более $\lceil nr^{n-1} \ln r \rceil$. Тем самым, в формулировке теоремы величина δ не может превышать $nr^{n-1} \ln r$, т.е. не более чем в $n \ln r$ раз больше, чем в нашей теореме.

В качестве следствия мы получаем улучшение нижних оценок (2) величины $m(n, r, s)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует такая абсолютная константа $c > 0$, что для $5 \leq s < n/2$ выполнено

$$\begin{aligned} m(n, r, s) &\geq c^{\lfloor s/2 \rfloor} r^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} && \text{при четном } s; \\ m(n, r, s) &\geq c^{\lfloor s/2 \rfloor} nr^{(n-s)(\lfloor s/2 \rfloor + 1)} && \text{при нечетном } s. \end{aligned}$$

3. Идея доказательства. В качестве основного метода доказательства нами используется метод случайной перекраски. В нем мы следуем

- идеям Косточки и Кумбхата из [5] относительно двухэтапной перекраски;
- построению раскраски из работы Купавского и Шабанова [6];
- технике вероятностного анализа из работы Козика и Шабанова [7].

Итак, пусть n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Нам необходимо доказать существование правильной раскраски множества вершин гиперграфа H в r цветов. Для этого мы построим некоторую случайную r -раскраску V и покажем,

что она является правильной с положительной вероятностью. Без ограничения общности будем считать, что $V = \{1, \dots, N\}$. Также всюду далее δ -тяжелые (δ -легкие) вершины и ребра будем называть просто *тяжелыми* и *легкими*. Наконец, для каждого ребра A через A_R мы будем обозначать множество его тяжелых вершин, а через A_L – множество его легких вершин.

Опишем конструкцию с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

Стартуем с равномерной случайной раскраски множества вершин в r цветов: вершине v присваиваем цвет ξ_v , где $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ – независимые случайные величины с равномерным распределением на множестве цветов $\{1, \dots, r\}$. Также введем независимые случайные величины, которые нам понадобятся далее: $\{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ со следующим условным распределением на множестве цветов $\{1, \dots, r\}$:

$$P(\eta_v = \alpha \mid \xi_v = \beta) = \frac{1}{r-1} \quad \text{для любых } \alpha \neq \beta \in \{1, \dots, r\}.$$

В случайной раскраске $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ гиперграф H может содержать *одноцветные* и *почти одноцветные* ребра. Ребро A называется *почти одноцветным с доминирующим цветом α* в раскраске ξ , если

$$n - s \leq \sum_{v \in A} I\{\xi_v = \alpha\} \leq n - 1,$$

где $1 \leq s < n/2$ – первый параметр нашей конструкции.

Будем осуществлять следующий алгоритм случайной перекраски, в рамках которого мы хотели бы исправить одноцветные ребра, но так, чтобы почти одноцветные ребра не стали одноцветными доминирующего цвета. Зададим случайный порядок вершин σ с помощью вариационного ряда независимых случайных величин $\{X_v, v \in V\}$ (независимых также с набором $(\xi_v, \eta_v, v \in V)$) с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Для ребра A и вершины v будем использовать обозначение

$$\sigma(v, A) = \sum_{w \in A} I\{X_w \leq X_v\}$$

для номера вершины v в ребре A .

На первом этапе процесса случайной перекраски будем перекрашивать только тяжелые вершины гиперграфа H и исправлять только тяжелые одноцветные ребра. Будем рассматривать тяжелые вершины в порядке, заданном σ , и для текущей вершины v проверять следующие *условия перекраски*.

УСЛОВИЕ 1h. Существует такое тяжелое ребро A , $v \in A$, что A – одноцветно в ξ , на момент рассмотрения v ни одна вершина A еще не сменила цвет и, кроме того,

$$\sigma(A_R, v) \leq h$$

(здесь $1 \leq h < n/2$ – второй параметр конструкции).

УСЛОВИЕ 2h. Не существует такого тяжелого ребра B , $v \in B$, почти одноцветного в ξ , что на момент рассмотрения v эта вершина осталась единственной, не покрашенной в α – доминирующий цвет ребра B , и $\eta_v = \alpha$.

Если условия перекраски выполнены, то присваиваем вершине v цвет η_v . В противном случае, не перекрашиваем v и переходим к следующей вершине.

Получившуюся в результате перекраски тяжелых вершин случайную раскраску обозначим через $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$. Во время второго этапа перекраски мы будем перекрашивать только легкие вершины.

Будем рассматривать легкие вершины в порядке, заданном σ , и для текущей вершины w проверять следующие *условия перекраски*:

УСЛОВИЕ 1l. Существует такое легкое ребро A , $w \in A$, что A – одноцветно или почти одноцветно в ξ , одноцветно в ζ , на момент рассмотрения w ни одна легкая вершина A еще не сменила цвет и, кроме того,

$$\sigma(A_L, v) \leq h.$$

УСЛОВИЕ 2l. Не существует такого ребра B , $w \in B$, почти одноцветного в ξ , что на момент рассмотрения w эта вершина осталась единственной, не покрашенной в α – доминирующий цвет ребра B , и $\eta_w = \alpha$.

Если условие перекраски выполнено, то присваиваем вершине v цвет η_v . В противном случае, не перекрашиваем v и переходим к следующей вершине.

Выбирая параметры конструкции $h = \lceil \ln n \rceil$ и $s = \lceil n^{1/2} \rceil$ и применяя Локальную лемму, мы показываем, что с положительной вероятностью:

- 1) после первого этапа перекраски все одноцветные в ξ тяжелые ребра перестанут быть одноцветными того же цвета;
- 2) после второго этапа перекраски все одноцветные в ζ легкие ребра, которые были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом в начальной раскраске ξ , будут исправлены;
- 3) в итоговой раскраске не появится одноцветных ребер, которые в ξ не были одноцветными того же цвета или почти одноцветными с тем же доминирующим цветом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, L. Lovász, *Infinite and Finite Sets*, Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **10**, North Holland, Amsterdam, 1975, 609–627. [2] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, *УМН*, **66**:5 (2011), 109–182. [3] A. V. Kostochka, V. Rödl, *Random Structures Algorithms*, **36**:1 (2010), 46–56. [4] N. Sauer, *J. Combin. Theory*, **9**:2 (1970), 144–147. [5] A. V. Kostochka, M. Kubmhat, *Random Structures Algorithms*, **35**:3 (2009), 348–368. [6] А. Б. Кунавский, Д. А. Шабанов, *Докл. РАН*, **443**:4 (2012), 422–426. [7] J. Kozik, D. Shabanov, *J. Combin. Theory. Ser. B* (to appear).

А. Э. Хузиева

Московский физико-технический
институт (государственный университет)
E-mail: atomochek@gmail.com

Поступило

04.11.2014

Д. А. Шабанов

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический
институт (государственный университет)
E-mail: dm.shabanov.msu@gmail.com