Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Исковских, Простое доказательство нерациональности трехмерной квартики, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 667–673

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:12:39

УДК 512.6

ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАЦИОНАЛЬНОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ КВАРТИКИ

В. А. Исковских

Передоказывается теорема о жесткости гладкой трехмерной quartики [1], следуя идее Корти [2], с использованием теоремы связности Шокурова.

Библиография: 8 названий.

1. Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – гладкая гиперповерхность степени 4 (трехмерная quartика) над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Довольно трудное доказательство нерациональности (точнее, бирациональной жесткости) X , данное в [1], до недавнего времени практически не претерпевало изменений. Некоторое упрощение в том же круге идей было предложено Пухликовым в [3] (и обобщено на высшие размерности в [4]). Недавно Корти [2] дал существенно более простое доказательство в рамках теории Мори. В этой заметке мы воспроизводим, по существу, доказательство Корти, используя только теорему обращения в нуль Каваматы–Фивега и некоторые простые утверждения из [1] (включая, разумеется, неравенство Нетера–Фано).

Напомним утверждение о (сверх)жесткости X .

ТЕОРЕМА 1 [1], [2]. *Не существует бирациональных отображений, не являющихся проективными изоморфизмами, quartики ни на какое другое трехмерное многообразие Фано (и даже Мори расслоенное пространство). В частности, X не рационально.*

2. Главная идея доказательства теоремы в [1], [2] и в этой заметке – существование неизоморфного бирационального отображения приводит к противоречию с неравенством Нетера–Фано. Сделаем это в несколько шагов.

ШАГ 1. (Неравенство Нетера–Фано). Предположим, что существует бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$. Выберем очень обильную линейную систему $\mathcal{H}'$ на X' и обозначим через $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X = \chi_{\text{pr}}^{-1}(\mathcal{H}')$ – собственный прообраз $\mathcal{H}'$ на X . Тогда $\mathcal{H} \subset |-nK_X|$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, не имеет неподвижных компонент, $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$. Пусть

$$\sigma: Y = X_N \xrightarrow{\sigma_{N,N-1}} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma_{i+1,i}} X_i \xrightarrow{\sigma_{i,i-1}} X_{i-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma_{1,0}} X_0 = X, \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma_{1,0} \cdots \sigma_{N,N-1},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Фонда поддержки ведущих научных школ, проект № 96–15–96146 и INTAS–OPEN–97–2072.

разрешение базисных множеств $\mathcal{H}$ по Хиронаке, т.е. с помощью последовательности раздутий $\sigma_{i,i-1}: X_i \dashrightarrow X_{i-1}$ с неособыми центрами $B_{i-1} \subset X_{i-1}$, $\dim B_{i-1} = 0$ или 1. Тогда

$$\mathcal{H}_Y := \sigma_{\text{pr}}^{-1}(\mathcal{H}) \sim \sigma^*(\mathcal{H}) - \sum_{i=1}^N \nu_i \sigma_{N,i}^*(E_i), \quad (2)$$

где $\mathcal{H}_Y$ – собственный прообраз $\mathcal{H}$ на Y , $\sigma_{N,i} = \sigma_{i+1,i} \cdots \sigma_{N,N-1}$, $E_i = \sigma_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$ – исключительные дивизоры, $\nu_i \geq 0$ – целые кратности базисных множеств B_{i-1} , $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_N$. Для канонических дивизоров имеем

$$K_Y = \sigma^*(K_X) + \sum_{i=1}^N \delta_i \sigma_{N,i}^*(E_i), \quad \delta_i = 2 - \dim B_{i-1}.$$

Запишем

$$nK_Y + \mathcal{H}_Y = \sigma^*(nK_X + \mathcal{H}_X) + \sum_{i=1}^N (n\delta_i - \nu_i) \sigma_{N,i}^*(E_i). \quad (3)$$

Перепишем (3) в виде

$$nK_Y + \mathcal{H}_Y = \sigma^*(nK_X + \mathcal{H}_X) + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i \leq j} r_{ji} (\delta_i n - \nu_i) \right) F_j, \quad (4)$$

где $F_j = \sigma_{\text{pr}}^{-1}(E_j)$ – собственные прообразы дивизоров E_j , r_{ji} – целые неотрицательные числа, определяемые из однозначных разложений

$$\sigma^*(E_i) = F_i + \sum_{j>i} r_{ji} F_j, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Числа r_{ij} легко вычисляются индуктивно по разрешению

$$r_{ii} = 1, \quad r_{ji} = \sum_{k: B_{j-1} \subset F_k} r_{ki}, \quad j > i, \quad k \geq i, \quad k \leq j-1 \quad (6)$$

(для простоты через F_k мы будем обозначать также любой его образ $\sigma_{N,l}(F_k) = (\sigma_{lk}^{-1})_{\text{pr}}(E_k) \subset X_l$, $l \geq k$, в частности, $F_k = E_k$ при этом соглашении). Так как $\sum F_i$ – дивизор с нормальными пересечениями, число слагаемых в (6) не превосходит $\delta_j + 1$, т.е. ≤ 2 , если B_{j-1} – кривая, и ≤ 3 , если B_{j-1} – точка.

ЛЕММА 1 (Неравенства Нетера–Фано, см. например, [1], [5], [6]). Если χ не изоморфизм, то $n \geq 2$ и линейная система $\mathcal{H}$ обладает максимальной особенностью, т.е. в каждом из выражений (3) и (4) найдется E_i , соответственно F_j , такие, что

$$n\delta_i - \nu_i < 0, \quad (7)$$

$$\sum_{i \leq j} r_{ij} (n\delta_i - \nu_i) < 0. \quad (8)$$

Отметим, что неравенства Нетера–Фано имеют место в подходящей формулировке для произвольных Мори расслоенных пространств (см. [6]).

ШАГ 2. (Исключение максимальных особенностей: простые случаи). Предположим, что существует максимальная особенность, скажем F_j с неравенством (8). Тогда существует индекс $i \leq j$, для которого выполняется неравенство (7) и $r_{ji} \neq 0$ и, следовательно, $\sigma_{j,i}(F_i) \subset E_i$. Пусть $C = \sigma_{j,0}(F_i) \subset X$ – центр максимальной особенности и $\nu(C)$ – кратность C в базисном множестве $\text{Bs } \mathcal{H}$. Тогда $\nu(C) \geq \nu_i > \delta_i n_i$, так как $C \subset \sigma_{i,0}(E_i)$.

Возможны три случая:

- (i) $C = P$ – точка кратности $\nu(P) > 2n$;
- (ii) C – кривая кратности $\nu(C) > n$;
- (iii) (бесконечно близкий случай) $C = P$ – точка кратности $\nu(P) > n$, B_{i-1} – кривая с $\nu_i > n$.

В нашем случае гладкой трехмерной quartики X простые рассуждения, восходящие к Фано, исключают первые два случая.

ЛЕММА 2 ([1, 5.2]). $\nu(P) < 2n$ для любой точки $P \in \text{Bs } \mathcal{H}$ и $\nu(C) \leq n$ для любой кривой $C \subset \text{Bs } \mathcal{H}$.

Таким образом, задача сводится к исключению трудного случая (iii). Для этого мы привлечем идею Корти: ограничим (4) на общее гиперплоское сечение $S \ni P$ и воспользуемся теоремой связности Шокурова. Это локальный вопрос в окрестности точки $P = \sigma_{j,0}(F_i)$ – центра максимальной особенности, и то, что X – quartика, не будет использоваться до заключительного шага 3.

Итак, мы будем предполагать, что в окрестности точки $P \in X$ мы имеем разрешение (1) с $B_0 = P$, $\nu_1 = \nu(P)$, $E_1 = \sigma_{1,0}^{-1}(P)$ и т.д. и что существует бесконечно близкая максимальная особенность F_j с $\sigma_{j,0}(F_j) = P$. Пусть S – общее гиперплоское сечение (росток гладкой поверхности), проходящее через P . Тогда

$$S_Y := \sigma_{\text{pr}}^{-1}(S) \sim \sigma^* S - \sigma_{N,1}^*(E_1) = \sigma^* S - \sum_{j=1}^N r_{j1} F_j.$$

Для того чтобы при ограничении (4) на S_Y получить формулу такого же типа, ограничим вместо (4) следующее выражение

$$\begin{aligned} n(K_Y + S_Y) + \mathcal{H}_Y &= \sigma^*(nK_X + nS + \mathcal{H}_X) \\ &+ \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i \leq j} r_{ij} (\delta_i n - \nu_i) - r_{j1} n \right) F_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Неравенство для максимальной особенности в (8) запишется теперь в виде

$$c_j := \sum_{i \leq j} r_{ij} (\delta_i n - \nu_i) - r_{j1} n < -n, \quad (10)$$

так как $r_{j1} \geq 1$, поскольку $\sigma_{i,0}(F_j) = P = B_0$. Ограничивая (9) на общую поверхность $S \ni P$, получаем

$$nK_{S_Y} + \mathcal{H}_Y|_{S_Y} = \sigma^*(nK_S + \mathcal{H}_S) + \sum_{j=1}^N c_j F_j|_{S_Y}. \quad (11)$$

Следующая лемма – самый существенный момент доказательства – является следствием теоремы связности Шокурова, которая выводится из теоремы обращения в нуль Каваматы–Фивега для бирационального морфизма $\sigma: Y \rightarrow X$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что существует F_j с $c_j \leq -n$. Тогда найдется F_a с $c_a \leq -n$ и $F_a \cap S_Y \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разделим (10) на n и запишем в виде

$$\begin{aligned} K_Y &\equiv \sigma^* \left(K_X + S + \frac{1}{n} \mathcal{H}_X \right) - \frac{1}{n} \mathcal{H}_Y - S_Y + \sum_{j=1}^N \frac{1}{n} c_j F_j \\ &= \sigma^* \left(K_X + S + \frac{1}{n} \mathcal{H}_X \right) + A - B, \end{aligned} \quad (12)$$

где $A, B \in \mathbb{Q}$ -дивизоры и

$$B = S_Y - \sum_{c_j \leq -n} \frac{c_j}{n} F_j.$$

Покажем, следуя Шокурову (см. например, [7, 7.4], [8, 17.4]), что $\text{Supp } B = S_Y + \sum_{c_j \leq -n} F_j$ связан в окрестности слоя $\sigma^{-1}(P)$. Для этого перепишем (12) в виде, удобном для применения теоремы обращения в нуль

$$\lceil A \rceil - \lfloor B \rfloor \equiv K_Y + \left(-\sigma^* \left(K_X + S + \frac{1}{n} \mathcal{H}_X \right) \right) + \{-A\} + \{B\}, \quad (13)$$

где, как обычно, для $\mathbb{Q}$ -дивизора $D = \sum d_i D_i$, $d_i \in \mathbb{Q}$, $\lfloor D \rfloor = \sum \lfloor d_i \rfloor D_i$, $\lceil D \rceil = \sum \lceil d_i \rceil D_i$, $\{D\} = \sum \{d_i\} D_i$ обозначает нижнюю, верхнюю целую часть и дробную часть соответственно. Отметим, что $\text{Supp } B = \text{Supp } \lfloor B \rfloor$, дивизор $\lceil A \rceil$ эффективен и составлен из исключительных дивизоров, поскольку $\lceil -\frac{1}{n} \mathcal{H}_Y \rceil = 0$, так как $n \geq 2$; $\{-A\}, \{B\}$ — эффективные дробные дивизоры с нормальными пересечениями. Нормальность пересечений с S_Y и $\mathcal{H}_Y$ следует из общности выбора $S \ni P$ и общего дивизора $\mathcal{H}_Y$ свободной линейной системы $\mathcal{H}_Y$, нормальность пересечений исключительных дивизоров обеспечена выбором разрешения (1).

Применим σ_* к точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil - \lfloor B \rfloor) \rightarrow \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil) \rightarrow \mathcal{O}_{\lfloor B \rfloor}(\lceil A \rceil) \rightarrow 0$$

и заметим, что $\sigma_* \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil) = \mathcal{O}_X$, так как $\lceil A \rceil$ — эффективный дивизор, составленный из исключительных дивизоров, и $R^i \sigma_* \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil - \lfloor B \rfloor) = 0$, $i \geq 1$, по относительной теореме обращения в нуль Каваматы–Фивега для бирационального морфизма $\sigma: Y \rightarrow X$ (см. например [7, 2.17]), надо заметить только, что $(-\sigma^*(K_X + S + \frac{1}{n} \mathcal{H}_X))$ тривиален на слоях и поэтому численно эффективен и объемен на общем слое.

В результате получаем точную последовательность

$$\sigma_* \mathcal{O}_Y(\lceil A \rceil) = \mathcal{O}_X \rightarrow \sigma_* \mathcal{O}_{\lfloor B \rfloor}(\lceil A \rceil) \rightarrow 0.$$

Если $\lfloor B \rfloor = B_1 + B_2$ — несвязное объединение двух дивизоров в окрестности слоя $\sigma^{-1}(P)$, то мы имеем $\sigma_* \mathcal{O}_B(\lceil A \rceil)_P = \sigma_* \mathcal{O}_{B_1}(\lceil A \rceil)_P + \sigma_* \mathcal{O}_{B_2}(\lceil A \rceil)_P$, что невозможно, так как сумма двух ненулевых модулей не может быть фактором циклического модуля $\mathcal{O}_{X,P}$. Это доказывает связность $\text{Supp } B = S_Y + \sum_{c_j \leq -n} F_j$ и тем самым лемму, поскольку по условию существует F_j с $c_j \leq -n$.

3. Рассмотрим теперь равенство (12) с учетом неравенства (10) и предыдущей леммы. Пусть a — наименьший индекс такой, что $F_a \cap S_Y \neq \emptyset$ и $c_a \leq n$. Введем следующие дополнительные обозначения:

$S_i = (\sigma_{i,0}^{-1})_{\text{pr}}(S)$ — собственный прообраз на X_i общего гиперплоского сечения $S \ni P$;

$\mathcal{L}_i = \mathcal{H}_{X_i}|_{S_i}$ — собственный прообраз на S_i линейной системы $\mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_X|_S$.

ЛЕММА 4. i) В предыдущих обозначениях $a = 1 \Leftrightarrow \nu_1 \geq 2n$.

ii) $\overline{E}_1 = E_1 \cap S_1$ – прямая на $E_1 \cong \mathbb{P}^2$; если $F_i \cap S_Y \neq 0$, $i > 1$, то $\sigma_{i,1}(F_i) = \sigma_{i,1}(E_i) \subset E_1 \cong \mathbb{P}^2$ – кривая и E_i – линейчатая поверхность.

iii) Если $r_{ai} \neq 0$, то $E_i \cap S_i \neq 0$ и $\sigma_{a,1}(F_a) = \sigma_{i,1}(E_i)$ на E_1 .

iv) $\mathcal{L}_a^2 \leq \mathcal{L}_0^2 - \sum_{i=1, r_{ai} \neq 0}^a \nu_i^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Имеем $c_1 = r_{11}n\delta_1 - \nu_1 - r_{11}n = n - \nu_1$ и, поскольку $E_1 \cap S_1 \neq 0$, то $a = 1$ равносильно $n - \nu_1 \leq -n$.

ii) Если $i > 1$ и $F_i \cap S_Y \neq 0$, то $\sigma_{N,1}(F_i \cap S_Y) = \sigma_{N,1}(F_i) \cap S_1 \subset E_1$ не пусто; значит $\sigma_{N,1}(F_i)$ – кривая, так как $S_1 \cap E_1$ – общая прямая.

iii) Если $r_{ai} \neq 0$, то $\sigma_{a,i}(E_a) \subset E_i$ и $0 \neq \sigma_{a,i}(S_a \cap F_a) \subset S_i \cap \sigma_{a,i}(E_a) \subset S_i \cap E_i$. По ii) образы F_a и E_i на E_1 являются кривыми, содержащимися одна в другой; ввиду неприводимости они совпадают.

iv) Имеем

$$\mathcal{L}_a^2 = \sigma_{a,0}^*(\mathcal{L}_0)^2 - \sum_{i=1}^a d_i \nu_i^2 \leq \mathcal{L}_0^2 - \sum_{i=1, r_{ai} \neq 0}^a d_i \nu_i^2 \leq \mathcal{L}_0^2 - \sum_{i=1, r_{ai} \neq 0}^a \nu_i^2, \quad (14)$$

где $d_i = B_{i-1} \cdot S_{i-1}$ на X_{i-1} для $i > 1$, $d_1 = 1$. Отметим, что из-за общности S пересечения $B_{i-1} \cdot S_{i-1}$ можно считать трансверсальными.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности, если $a > 1$ и $r_{ai} \neq 0$, то $d_i = 1$. Это следует из теоремы связности Шокурова для $(S, \mathcal{L}_0)$: пересечение $F_a \cap S_a$ должно быть связным, и так как $a > 1$, то E_a – линейчатая поверхность (по лемме 3) и $F_a \cap S_a = E_a \cap S_a$ состоит из одного слоя. Значит, образ F_a на E_1 и образы всех F_i с $r_{ai} \neq 0$ являются одной и той же прямой; отсюда $d_i = B_{i-1} \cdot S_{i-1} = 1$.

4. Дальнейшая цель – оценить снизу последнюю сумму в (14) при условии $c_a \leq -n$ и показать, что она достаточно большая (больше, чем $\mathcal{L}_0^2$ на квартике X).

ЛЕММА 5. Если $a > 1$, то $\sum_{i=1}^a \nu_i^2 > 4n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства перенумеруем последовательно $\{E_i, 1 \leq a \leq a \mid r_{ai} \neq 0\}$: $E_1, E_2, \dots, E_b$, $b = \#\{i \mid r_{ai} \neq 0\}$ и положим (в новых обозначениях) $r_{si} = r_{s+1-i}$. В этих обозначениях условие $c_a \leq -n$ запишется в виде

$$r_b \nu_1 + r_{b-1} \nu_2 + \dots + r_1 \nu_b \geq \left(\sum_{i=1}^b r_i + 1 \right) n, \quad (15)$$

так как в старых обозначениях

$$c_a = \sum_{i=1}^a r_{ai}(\delta_i n - \nu_i) - r_{a1}n \leq -n$$

и все слагаемые с $\delta_i = 2$ равны нулю, кроме первого при $i = 1$.

Имеем по определению r_{ji} в (5)

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_b \geq r_{b-1} \geq \dots \geq r_1 = 1, \quad r_{i+1} \leq r_i + r_{i-1}.$$

Минимум квадратичной формы $\sum_{i=1, r_{ai} \neq 0}^a \nu_i^2 = \sum_{j=1}^b \nu_j^2$ (в новых обозначениях) при условии (15) находится стандартным способом:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^b \nu_j^2 \mid \sum_{j=1}^b r_j \nu_{b+1-j} \geq \sum_{i=1}^b (r_i + 1)n \right\} = \frac{(\sum_{j=1}^b r_j + 1)^2}{\sum_{j=1}^b r_j^2} n^2.$$

Осталось показать, что $(\sum_{j=1}^b r_j + 1)^2 > 4 \sum_{j=1}^b r_j^2$ при $b > 1$. По индукции предположим, что это неравенство справедливо для $s < s+1 \leq b$. Запишем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{s+1} r_j + 1 \right)^2 &= r_{s+1}^2 + 2r_{s+1} \left(\sum_{j=1}^s r_j + 1 \right) + \left(\sum_{j=1}^s r_j + 1 \right)^2, \\ 4 \sum_{j=1}^{s+1} r_j^2 &= 4r_{s+1}^2 + 4 \sum_{j=1}^s r_j^2. \end{aligned}$$

Отсюда достаточно показать, что $r_{s+1} \leq \frac{2}{3} (\sum_{j=1}^s r_j + 1)$.

Опять по индукции

$$\begin{aligned} r_{s+1} &\leq r_s + r_{s-1} \leq r_s + \frac{2}{3} \left(\sum_{j=1}^{s-2} r_j + 1 \right) \\ &\leq \frac{2}{3} r_s + \frac{2}{3} r_{s-1} + \frac{2}{3} \left(\sum_{j=1}^{s-2} r_j + 1 \right) = \frac{2}{3} \left(\sum_{j=1}^s r_j + 1 \right), \end{aligned}$$

так как $r_s \leq 2r_{s-1}$. Лемма доказана.

Теперь возвратимся к квартике X и сделаем последний шаг.

Шаг 3 (исключение бесконечно близкого случая). Покажем, что случай iii) в шаге 2 не реализуется. Предположим, что максимальная особенность типа iii) существует; тогда по (10) и лемме 2 существует F_a с $c_a \leq -n$. Пусть a — наименьший индекс с этим свойством; тогда $a > 1$ по лемме 4 i), так как $\nu_1 < 2n$ по лемме 1. Осталось воспользоваться леммой 3 и леммой 4, принимая во внимание, что $\mathcal{L}_i^2 > 0$, так как линейная система $\mathcal{L}_i$ не имеет неподвижных компонент из-за общности $S \ni P$ и не составлена из пучка,

$$0 < \mathcal{L}_a^2 \leq 4n^2 - \sum_{i=1, r_{ai} \neq 0}^a \nu_i^2 \leq 4n^2 - \frac{(\sum_{j=1}^b r_j + 1)^2}{\sum_{j=1}^b r_j^2} n^2 < 0.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128). № 1. С. 140–166.
- [2] Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry. Preprint Univ. of Cambridge, 1998.
- [3] Пухликов А. В. Замечание к теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартире // Тр. МИРАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
- [4] Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. № 2. P. 401–426.
- [5] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
- [6] Corti A. Factoring birational maps of 3-folds after Sarkisov // Journ. Alg. Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
- [7] Kollar J. Singularities of pairs // Proc. Sympos. Pure Math. 1998. V. 62. P. 224–287.
- [8] Kollar J. et al. Flips and abundance for algebraic threefolds // Asterisque. 1993. V. 211.

Математический институт им. В. А. Стеклова

Поступило
01.12.98