Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Неевклидовы октаэдры с $mm2$ -симметрией, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 145–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:39:10

Неевклидовы октаэдры с $mm2$ -симметрией

В. А. Краснов

1. Введение. Вычисление объемов многогранников является очень старой и сложной проблемой, берущей свое начало во времена античной математики и не потерявшей актуальности по сей день. Формула объема треугольной пирамиды получена еще Архимедом, а в XVI в. Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация более сложная. Так, формула объема произвольного неевклидова тетраэдра долгое время оставалась неизвестной. Лишь на рубеже XX и XXI веков эта проблема была полностью решена в работах Чо и Кима [1], Мураками и Яно [2], Мураками и Ушиджимы [3], Деревнина и Медных [4], а также Мураками [5]. Нельзя не упомянуть, что впервые формулу объема произвольного неевклидова тетраэдра выписал в 1906 г. итальянский герцог Сфорца [6]. К сожалению, формула Сфорцы содержит многозначную функцию. При этом в работе [6] не указано, какая ее ветвь дает объем. В связи с этим формула Сфорцы долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтесиносом на конференции в Испании в августе 2006 г.

В 2008 г. Абросимовым, Годой-Молина и Медных [7] были получены формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm - и $2|m$ -октаэдров. Наконец, в 2013 г. в работах Абросимова и Байгонаковой [8], а также Краснова [9] параллельно и независимо были получены формулы объема произвольного гиперболического mmm -октаэдра. Кроме того, в работе [9] предложена интегральная формула объема произвольного гиперболического октаэдра с $2|m$ -симметрией.

В настоящей работе получена формула объема произвольного компактного гиперболического октаэдра с $mm2$ -симметрией в терминах двугранных углов, а также найден алгоритм вычисления объема $mm2$ -октаэдра в сферическом пространстве.

2. Объем гиперболического октаэдра с $mm2$ -симметрией. Мы будем решать задачу вычисления объема многогранника на трехмерной сфере S^3 и в трехмерном гиперболическом пространстве H^3 . Кроме того, для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с пространствами постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Рассмотрим октаэдр O , обладающий $mm2$ -симметрией, т.е. октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам (см. рис.). Обозначим через A, B, C, D, E величины его двугранных углов.

Очевидно, что mmm -октаэдр, т.е. октаэдр $O = O(A, B, C)$, остающийся инвариантным при отражениях относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих его по реберным циклам, является частным случаем октаэдра с $mm2$ -симметрией.

Объем произвольного компактного гиперболического октаэдра, обладающего $mm2$ -симметрией, дается следующей теоремой.

Пусть $O = O(A, B, C, D, E)$ – компактный гиперболический октаэдр, обладающий $mm2$ -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой

$$V(O) = 2V\left(\frac{A}{2}, B, \frac{A}{2}, \lambda, \frac{\pi}{2}, \lambda\right) + 2V\left(\frac{C}{2}, D, \frac{C}{2}, E - \lambda, \frac{\pi}{2}, E - \lambda\right),$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (задание 1.1974.2014/К “Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными”).

DOI: 10.4213/mzm10981

© В. А. Краснов, 2016

Рис. Октаэдр с mm2-симметрией

где

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\cos(C/2) + \cos(A/2) \cos E}{\cos(A/2) \sin E},$$

$$V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta)$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{z_2}^{z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi + \alpha + \beta + \delta + \epsilon}{2} \sin \frac{\xi + \alpha + \gamma + \delta + \zeta}{2} \sin \frac{\xi + \beta + \gamma + \epsilon + \zeta}{2}}{\cos \frac{\xi + \alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\xi + \alpha + \epsilon + \zeta}{2} \cos \frac{\xi + \beta + \delta + \zeta}{2} \cos \frac{\xi + \gamma + \delta + \epsilon}{2}} \right| d\xi,$$

и

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3}, \quad z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta) + \cos(\alpha + \delta) + \cos(\beta + \epsilon) + \cos(\gamma + \zeta) + \cos(\delta + \epsilon + \zeta) + \cos(\delta + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \epsilon + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta) + \sin(\alpha + \delta) + \sin(\beta + \epsilon) + \sin(\gamma + \zeta) + \sin(\delta + \epsilon + \zeta) + \sin(\delta + \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \epsilon + \gamma) + \sin(\alpha + \beta + \zeta),$$

$$k_3 = 2(\sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \epsilon + \sin \gamma \sin \zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Идея доказательства теоремы заключается в разбиении исходного октаэдра O на тетраэдры (1234), (1245), (6234), (6245) и последующем исключении дополнительного параметра λ , который представляет собой двугранный угол при основании четырехугольной гиперболической пирамиды (12345) (см. рис.).

Что касается сферического mm2-октаэдра, то здесь вместо формулы Деревнина–Медных [4] для вычисления объема тетраэдра триангуляции можно использовать формулу Мураками [5] объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов, а вспомогательный параметр λ будет выражаться через двугранные углы A, C и E исходного октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ точно так же, как и в гиперболическом случае.

Легко заметить, что существование неевклидова октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ с mm2-симметрией равносильно существованию тетраэдров

$$T_1 = T_1\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \lambda\right) \quad \text{и} \quad T_1 = T_1\left(\frac{C}{2}, \frac{D}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, E - \lambda\right), \quad E > \lambda$$

с равными ребрами (23), (34) и (24) (см. рис.).

Таким образом, используя критерии существования неевклидовых тетраэдров с заданным набором двугранных углов [10], а также формулу тангенсов, мы можем сформулировать критерии существования компактного гиперболического и сферического октаэдров $O = O(A, B, C, D, E)$ с $\text{mm}2$ -симметрией.

ЛЕММА 1. Для существования компактного гиперболического $\text{mm}2$ -октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ (см. рис.) необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:

$$\begin{cases} \text{sign } G_1 = (3, 1), & \frac{c_{23}^1}{\sqrt{c_{22}^1 c_{33}^1}} = \frac{c_{23}^2}{\sqrt{c_{22}^2 c_{33}^2}}, \\ \text{sign } G_2 = (3, 1), & \frac{c_{13}^1}{\sqrt{c_{11}^1 c_{33}^1}} = \frac{c_{13}^2}{\sqrt{c_{11}^2 c_{33}^2}}, \\ c_{ij}^1 > 0, \quad i \neq j, & \\ c_{ij}^2 > 0, \quad i \neq j, & \frac{c_{12}^1}{\sqrt{c_{11}^1 c_{22}^1}} = \frac{c_{12}^2}{\sqrt{c_{11}^2 c_{22}^2}}, \end{cases}$$

где $\text{sign } G_1$ и $\text{sign } G_2$ – сигнатуры матриц G_1 и G_2 ,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{A}{2} & -\cos B & -\cos \lambda \\ -\cos \frac{A}{2} & 1 & -\cos \frac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos \frac{A}{2} & 1 & -\cos \lambda \\ -\cos \lambda & 0 & -\cos \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E - \lambda) \\ -\cos \frac{C}{2} & 1 & -\cos \frac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos \frac{C}{2} & 1 & -\cos(E - \lambda) \\ -\cos(E - \lambda) & 0 & -\cos(E - \lambda) & 1 \end{pmatrix},$$

при этом c_{ij}^1 и c_{ij}^2 – суть алгебраические дополнения к ij -м элементам G_1 и G_2 соответственно, а

$$\lambda = \text{arccctg} \frac{\cos(C/2) + \cos(A/2) \cos E}{\cos(A/2) \sin E}.$$

В условиях теоремы и леммы 1 среди вершин октаэдра O нет бесконечно удаленных. Заметим, что если идеальными являются вершины (1) и (или) (6), то теорема и лемма 1 также справедливы. В случае, если среди бесконечно удаленных вершин находятся вершины гиперболического ромба (2345), то вычисление объема $O = O(A, B, C, D, E)$ легко сводится к проблеме вычисления объемов тетраэдров с идеальными вершинами, полностью решенной в работе [10].

ЛЕММА 2. Для существования сферического $\text{mm}2$ -октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ (см. рис.) необходимо и достаточно выполнение следующей системы условий:

$$\begin{cases} \frac{c_{23}^1}{\sqrt{c_{22}^1 c_{33}^1}} = \frac{c_{23}^2}{\sqrt{c_{22}^2 c_{33}^2}}, & \det G_1 > 0, \\ \frac{c_{13}^1}{\sqrt{c_{11}^1 c_{33}^1}} = \frac{c_{13}^2}{\sqrt{c_{11}^2 c_{33}^2}}, & \det G_1 > 0, \\ \frac{c_{12}^1}{\sqrt{c_{11}^1 c_{22}^1}} = \frac{c_{12}^2}{\sqrt{c_{11}^2 c_{22}^2}}, & \sin^2 B - 2 \cos^2 \frac{A}{2} (1 + \cos B) > 0, \\ & \sin^2 D - 2 \cos^2 \frac{C}{2} (1 + \cos D) > 0, \end{cases}$$

где c_{ij}^1 и c_{sk}^2 – алгебраические дополнения к ij -у элементу матрицы G_1 и sk -у элементу матрицы G_2 ; при этом

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{A}{2} & -\cos B & -\cos \lambda \\ -\cos \frac{A}{2} & 1 & -\cos \frac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos \frac{A}{2} & 1 & -\cos \lambda \\ -\cos \lambda & 0 & -\cos \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E - \lambda) \\ -\cos \frac{C}{2} & 1 & -\cos \frac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos \frac{C}{2} & 1 & -\cos(E - \lambda) \\ -\cos(E - \lambda) & 0 & -\cos(E - \lambda) & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda = \operatorname{arccotg} \frac{\cos(C/2) + \cos(A/2) \cos E}{\cos(A/2) \sin E}.$$

Автор благодарит В.П. Лексина и А.Л. Скубачевского за полезные советы и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Cho, H. Kim, *Discrete Comput. Geom.*, **22**:3 (1999), 347–366. [2] J. Murakami, M. Yano, *Comm. Anal. Geom.*, **13**:2 (2005), 379–400. [3] J. Murakami, A. Ushijima, *J. Geom.*, **83**:1-2 (2005), 153–163. [4] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, *УМН*, **60**:2 (2005), 159–160. [5] J. Murakami, *The Volume Formulas for a Spherical Tetrahedron*, 2009, arXiv: 1011.2584v4. [6] G. Sforza, *Ricerche di Estensionimetria differenziale. Ser. III*, **8** (1906), 3–66. [7] Н. В. Абросимов, М. Годой-Молина, А. Д. Медных, *Соврем. матем. и ее прилож.*, **60** (2008), 3–12. [8] Н. В. Абросимов, Г. А. Байгонакова, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **10** (2013), 123–140. [9] В. А. Краснов, *Топология*, СМФН, **51**, РУДН, М., 2013, 74–86. [10] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, *Геометрия – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **29**, ВИНТИ, М., 1988, 5–146.

В. А. Краснов

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com

Поступило

21.03.2015