Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Дудаков, Трансляционный результат для расширенных арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 362–371

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:53:43

УДК 510.652

ТРАНСЛЯЦИОННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ РАСШИРЕНИЙ АРИФМЕТИКИ ПРЕСБУРГЕРА ОДНОМЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ, СОГЛАСОВАННОЙ СО СЛОЖЕНИЕМ

С. М. Дудаков

Ранее О. В. Белеградек, А. П. Столбоушкин и М. А. Тайцлин доказали, что в теории натуральных чисел со сложением имеет место трансляционный результат, т.е. каждый локально генерический запрос с использованием сложения может быть записан и без его использования. В этой статье мы, используя достаточные условия трансляционного результата, полученные Тайцлиным, доказываем, что он имеет место в любых расширениях арифметики Пресбургера одноместной согласованной со сложением функций. Понятие согласованной со сложением функции предложено А. Л. Семёновым.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Задача, которая решается в данной работе, проистекает из теории баз данных (БД). БД – конечная совокупность конечных таблиц. Таблицы можно считать конечными отношениями, названия которых образуют конечную сигнатуру Ξ , а элементы таблиц берутся из какого-либо фиксированного множества A . Хотя количество таблиц и количество элементов в каждой из них конечно, но эти количества потенциально неограниченны, поэтому A следует считать бесконечным. Таким образом, БД можно считать алгебраической системой $\mathfrak{D}$ сигнатуры Ξ , носитель которой – конечное подмножество A . Любая информация реально хранится в некотором порядке, поэтому всегда можно считать, что на $\mathfrak{D}$, кроме отношений БД, есть линейный порядок. Для извлечения информации из БД, как правило, используются языки первого порядка. В простейшем случае запросы являются замкнутыми формулами первого порядка. Хорошо известно, что не всякое свойство алгебраических систем может быть записано такими формулами. Например, если сигнатура БД содержит только один одноместный предикатный символ P , то невозможно записать в этой сигнатуре формулу первого порядка, выделяющую в точности те БД, в которых количество элементов P является четным.

Один из путей, который помог бы преодолеть это ограничение, состоит в следующем. Обычно над множеством A , элементы которого используются для построения $\mathfrak{D}$, определены какие-либо стандартные отношения, образующие сигнатуру Σ . Например, если $A = \omega$, то над ω в качестве таких отношений можно использовать операции сложения и умножения. Таким образом, элементы, составляющие $\mathfrak{D}$, являются элементами некой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00254.

алгебраической системы $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ . Возможно, что если в языке запросов использовать не только отношения из Ξ , но и из Σ (запросы в сигнатуре $\Sigma \cup \Xi$ называются *расширенными*), то можно будет записать какие-то свойства, которые нельзя записать запросами в сигнатуре Ξ (ограниченными запросами). Разумеется, речь должна идти не о связи отношений из Ξ и Σ , а только о свойствах отношений из Ξ . Более точно, мы хотим чтобы значение запроса не менялось при произвольных порядковых изоморфизмах $\mathfrak{D}$ внутри $\mathfrak{A}$. Такие запросы называются *локально генерическими*.

Если, например, $\mathfrak{A}_1 = (\omega, +, \times)$, то можно записать любой арифметический запрос. Однако поскольку запросы выполняются вычислительным устройством, то логично потребовать, чтобы существовал алгоритм, способный вычислить любой запрос. Очевидно, для теории системы $\mathfrak{A}_1$ такого алгоритма нет. Можно рассмотреть более ограниченную систему $\mathfrak{A}_2 = (\omega, +)$. Тогда все запросы окажутся вычислимыми. Но как доказано в [1], любой локально генерический запрос с использованием сложения может быть записан и без него. Подобное свойство теорий называется *трансляционным результатом* (collapse-result). Таким образом, интерес представляют теории, которые, с одной стороны, были бы разрешимыми, а, с другой стороны, в них не имел бы место трансляционный результат. В работе [1] поставлена проблема нахождения таких теорий – расширений теории $\text{Th}(\omega, +)$ (арифметики Пресбургера).

В этой работе мы рассматриваем достаточно естественное обогащение теории $\text{Th}(\omega, +)$ экспонентой (или любой согласованной со сложением одноместной функцией [2]). Как доказано в [2], [3], подобные теории разрешимы. Мы доказываем, что во всех этих теориях имеет место трансляционный результат, т.е. любой локально генерический запрос эквивалентен некоторому ограниченному.

Во втором разделе мы даем основные определения и формулируем результат. В третьем изучаем свойства специального вида неразличимых множеств – термально изолированных. В четвертом мы, используя основную теорему работы [4], доказываем трансляционный результат.

2. Определения. Основные понятия теории моделей, которые упоминаются в данной работе, изложены в [5].

Далее всюду строчные греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ (возможно, с индексами) будут обозначать целочисленные константы. В дальнейшем мы не будем специально упоминать об этом.

Итак, пусть сигнатура $\Sigma = (+, f)$. Мы будем использовать следующие обозначения для кратных сумм:

$$0x = 0, \quad (i + 1)x = (ix) + x, \quad (-i)x = -(ix)$$

для всех $i \in \omega$. Мы рассматриваем модели теории $T = \text{Th}(\omega, +, f)$, т.е. теории натуральных чисел со сложением и одноместной функцией f . Мы считаем, что функция f не определима в теории сложения и является *согласованной со сложением*, т.е. удовлетворяет следующим условиям, описанным в [2]:

- (i) f периодична по модулю n для всех $n \in \omega, n \geq 2$;
- (ii) для всякой неограниченной конечной суммы

$$S(x) = \sum_i \alpha_i f(x + \beta_i) \tag{1}$$

существует такое $\Delta'_S \in \omega$, что либо $S(x + \Delta'_S) > f(x)$ для всех $x \in \omega$, либо $S(x + \Delta'_S) < -f(x)$ для всех $x \in \omega$;

(iii) f строго возрастает.

В [2] показано, что если функция f удовлетворяет условию (ii) и не определима с помощью сложения, то для всякого $c \in \omega$ существует $\Delta_c \in \omega$ такое, что для всех $x \in \omega$

$$f(x + \Delta_c) \geq cf(x) + cx.$$

В частности, существует такое $\Delta_2 \in \omega$, что

$$f(x + \Delta_2) \geq 2f(x).$$

Из сказанного выше следует, что для всякой положительной суммы $S(x)$ вида (1) существует константа $\Delta_S \in \omega$ такая, что для всех x выполнено

$$f(x - \Delta_S) \leq S(x) \leq f(x + \Delta_S).$$

Заметим, что в теории T определимы следующие символы. Порядок:

$$x \leq y \iff \exists u (x + u = y).$$

Все натуральные числа:

$$\begin{aligned} x = 0 &\iff \forall y (y \geq x), \\ x = 1 &\iff \forall y ((y < x) \rightarrow (y = 0)), \\ x = n &\iff x = \underbrace{1 + \dots + 1}_n. \end{aligned}$$

Обратная к f функция может не быть всюду определенной, поэтому мы будем использовать ее всюду определенное расширение:

$$f^{-1}(x) = y \iff (f(0) \geq x \wedge y = 0) \vee (f(y) \leq x \wedge \forall z (f(z) \leq x \rightarrow z \leq y)).$$

Для удобства мы полагаем, что если $f(0) = n$, то $f^{-1}(x) = 0$ при $x \leq n$. Кроме того, определимы предикаты делимости:

$$Q_n(x) \iff \exists y (\underbrace{y + y + \dots + y}_n = x)$$

для всех $n \in \omega, n \geq 2$. Мы будем использовать также вычитание, когда оно имеет смысл для натуральных чисел. Добавление к сигнатуре определимых символов не увеличивает выразительных возможностей, поэтому в дальнейшем мы будем включать все эти символы в состав сигнатуры.

Если A – некоторое множество, то с помощью $A^{<\omega}$ мы обозначаем множество всевозможных конечных последовательностей элементов A :

$$A^{<\omega} = \cup \{A^n : n \in \omega\}.$$

Пусть $\mathcal{T}$ – множество всевозможных термов сигнатуры Σ (в терминах мы допускаем операцию f^{-1}). Если $t(\bar{x})$ – некоторый терм со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$, $\mathcal{A} \models T$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, то с помощью $t(\bar{a})$ мы обозначаем значение терма t в $\mathcal{A}$ на элементах $a_1, \dots, a_n$. Записывая $t(\bar{a})$, мы всегда имеем ввиду, что $\bar{x}$ и $\bar{a} \in A^{<\omega}$ содержат одинаковое количество элементов. Точно также, если в формуле $\varphi(\bar{x})$ переменные $\bar{x}$ свободные и $\bar{a} \in A^{<\omega}$ имеет такую же длину, как и $\bar{x}$, то $\varphi(\bar{a})$ – значение формулы $\varphi(\bar{x})$ на элементах $\bar{a}$.

Предположим, что Ξ – сигнатура базы данных. Мы полагаем, что Ξ не имеет общих символов с Σ за исключением порядка $\leq$. При рассмотрении моделей сигнатуры $\Sigma \cup \Xi$ мы всегда считаем, что отношения порядка Σ и Ξ согласованы; следовательно, противоречий не возникает. *Запрос* (формулу первого порядка) в сигнатуре $\Sigma \cup \Xi$ мы называем *расширенным*, в сигнатуре Ξ – *ограниченным*.

Если $\mathcal{A}$ – модель T , $\mathcal{B}$ – интерпретация символов из Ξ над $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$ называется *состоянием* в $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$ называется *конечным*, если интерпретации всех символов из Ξ конечны. Очевидно, что если $\mathcal{B}$ конечно, то и любое изоморфное ему состояние $\mathcal{C}$ тоже будет конечным. Запрос называется *локально генерическим относительно конечных состояний* (или просто *локально генерическим*, [6]), если из истинности (ложности) запроса в произвольном конечном состоянии $\mathcal{B}$ следует его истинность (ложность) в любом изоморфном ему состоянии $\mathcal{C}$. Множество $I \subseteq \mathcal{A}$ называется *псевдоконечным*, если в алгебраической системе $(\mathcal{A}, I)$ выполнена любая формула, которая выполнена во всех системах $(\mathcal{A}, I')$ с конечным I' .

Если каждый локально генерический расширенный запрос на конечных состояниях эквивалентен некоторому ограниченному, то это свойство называется *трансляционным результатом*. Это свойство теорий, а не алгебраических систем (см. [1], [6]). Наш основной результат состоит в доказательстве трансляционного результата для теорий T .

3. Термально изолированные множества. Прежде чем продолжать, дадим определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $I \subseteq \mathcal{A}$. Назовем множество I *термально изолированным* в $\mathcal{A}$, если для любых термов $t_1(x), t_2(x)$ от одной переменной x имеет место один из двух случаев:

- (а) существует константа $M_{t_2} \in \omega$ такая, что для всех $x \in I$ выполнено $t_2(x) \leq M_{t_2}$;
- (б) для любых элементов $x, y \in I$ таких, что $x < y$, выполнено $t_1(x) < t_2(y)$.

Интуитивно это означает, что элементы термально изолированного множества отстоят друг от друга так далеко, что их нельзя сблизить никакими неограниченными термами. Очевидно, что в стандартной модели $(\omega, +, f)$ такие множества отсутствуют. Первое, что мы докажем – это существование элементарного расширения $\mathcal{A}$ модели $(\omega, +, f)$, в котором существует термально изолированное неразличимое множество.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют $\mathcal{A} \succ (\omega, +, f)$ и $I \subseteq \mathcal{A}$ такие, что I является бесконечным неразличимым термально изолированным в $\mathcal{A}$ множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пронумеруем все термы от одной переменной x натуральными числами: $(t_i)_{i \in \omega}$. Мы разобьем все эти термы на два непересекающихся множества $\mathcal{T}_1$

и $\mathcal{T}_2$ и построим бесконечные множества $J_i \subseteq \omega$ для каждого $i \in \omega$ так, что

- для каждого $i \in \omega$ и для каждого $j > i$, если $t_i \in \mathcal{T}_1$, то t_i ограничен некоторой константой $M_{t_i} \in \omega$ на множестве J_j ;
- для каждого $i \in \omega$ и для каждого $j > i$, если $t_i \in \mathcal{T}_2$, то t_i строго возрастает на множестве J_j ;
- для произвольных термов $t_{i_1}, t_{i_2} \in \mathcal{T}_2$ для всех $j > \max\{i_1, i_2\}$ для любых двух элементов $a_1 < a_2$ из множества J_j выполняется $t_{i_1}(a_1) < t_{i_2}(a_2)$.

Покажем, что это возможно.

Прежде всего отметим, что если J_j построено и оно удовлетворяет необходимым условиям для всех термов t_i при $i < j$, то, очевидно, и любое его бесконечное подмножество будет удовлетворять этим же условиям.

Пусть $J_0 = \omega$, $\mathcal{T}_1^{(0)} = \mathcal{T}_2^{(0)} = \emptyset$, и предположим, что множества J_i , $\mathcal{T}_1^{(i)}$ и $\mathcal{T}_2^{(i)}$ уже построены, и для каждого терма t_k , $k < i$, от одной переменной $t_k \in \mathcal{T}_1^{(i)} \cup \mathcal{T}_2^{(i)}$.

Если t_i ограничен на J_i константой M_{t_i} , то $J_{i+1} = J_i$. В этом случае относим t_i к множеству $\mathcal{T}_1$: $\mathcal{T}_1^{(i+1)} = \mathcal{T}_1^{(i)} \cup \{t_i\}$, $\mathcal{T}_2^{(i+1)} = \mathcal{T}_2^{(i)}$.

В противном случае терм t_i относим к $\mathcal{T}_2$: $\mathcal{T}_1^{(i+1)} = \mathcal{T}_1^{(i)}$, $\mathcal{T}_2^{(i+1)} = \mathcal{T}_2^{(i)} \cup \{t_i\}$. Пусть J'_{i+1} является бесконечным подмножеством J_i , на котором t_i строго возрастает. Пусть $x_0 = \min J'_{i+1}$ и

$$x_{n+1} = \min\{x \in J'_{i+1} : \forall t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2^{(i+1)} (t_1(x_n) < t_2(x))\}.$$

Так как множество $\mathcal{T}_2^{(i+1)}$ конечно и все термы из $\mathcal{T}_2^{(i+1)}$ строго возрастают на J_i , то x_n определено для всех $n \in \omega$. Возьмем $J_{i+1} = \{x_n : n \in \omega\}$. Ясно, что $J_{i+1} \subseteq J_i$.

В обоих случаях J_{i+1} обладает указанными свойствами для термов $t_0, \dots, t_i$. Пусть

$$\mathcal{T}_1 = \bigcup \{\mathcal{T}_1^{(i)} : i \in \omega\}, \quad \mathcal{T}_2 = \bigcup \{\mathcal{T}_2^{(i)} : i \in \omega\}.$$

Тогда, очевидно, множества $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и J_i обладают описанными выше свойствами.

Пусть $(\theta_i)_{i \in \omega}$ – нумерация всех формул сигнатуры Σ . Мы считаем, что в формуле θ_k содержится n_k свободных переменных. Добавим в сигнатуру одноместный предикатный символ I и рассмотрим следующее множество предложений X :

$$\begin{aligned} X = & T \cup \{|I| > k : k \in \omega\} \cup \{\forall x \in I (t(x) \leq M_t) : t \in \mathcal{T}_1\} \\ & \cup \{\forall x, y \in I (x < y \rightarrow t_1(x) < t_2(y)) : t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2\} \\ & \cup \{\forall \bar{x}, \bar{y} \in I^{n_k} (x_1 < \dots < x_{n_k} \wedge y_1 < \dots < y_{n_k} \rightarrow (\theta_k(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_k(\bar{y}))) : k \in \omega\}. \end{aligned}$$

С помощью $|I| > k$ мы записываем формулу, утверждающую, что I содержит больше, чем k элементов. Докажем, что X является конечно совместным множеством предложений.

Пусть $Y \subseteq X$ – конечное подмножество. Тогда существует константа N такая, что

$$\begin{aligned} Y \subseteq & T \cup \{|I| > k : k \in \omega\} \cup \{\forall x \in I (t_k(x) \leq M_{t_k}) : t_k \in \mathcal{T}_1 \wedge k < N\} \\ & \cup \{\forall x, y \in I (x < y \rightarrow t_{k_1}(x) < t_{k_2}(y)) : t_{k_1}, t_{k_2} \in \mathcal{T}_2 \wedge k_1, k_2 < N\} \\ & \cup \{\forall \bar{x}, \bar{y} \in I^{n_k} (x_1 < \dots < x_{n_k} \wedge y_1 < \dots < y_{n_k} \rightarrow (\theta_k(\bar{x}) \leftrightarrow \theta_k(\bar{y}))) : k < N\}. \end{aligned}$$

Пусть $m = \max\{n_k : k < N\}$. Разобьем все m -элементные подмножества множества J_N на классы, в каждом из которых значение всех формул θ_k при $k < N$ одинаково. Тогда по теореме Рамсея существует бесконечное множество $I \subseteq J_N$ такое, что на произвольных одинаково упорядоченных последовательностях $\bar{x}$ и $\bar{y}$ элементов из I каждая из формул θ_k , $k < N$, принимает одно и то же значение. Рассмотрим систему $(\omega, +, f, I)$. По построению множеств J_N и I она является моделью Y .

Таким образом, X является конечно совместным и, следовательно, имеет модель $(\mathfrak{A}, I)$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{A}$ – требуемая модель. Так как $(\omega, +, f)$ – простая модель, то $(\omega, +, f) \prec \mathfrak{A}$.

Далее будем считать, что какие-либо модель $\mathfrak{A}$ и неразличимое термально изолированное в $\mathfrak{A}$ множество I зафиксированы. Отметим несколько полезных свойств термально изолированных множеств.

ЛЕММА 1. *Если $(\mathfrak{A}', I') \equiv (\mathfrak{A}, I)$, то I' – неразличимое термально изолированное в $\mathfrak{A}'$ множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{T}_1$ – множество ограниченных на I в $\mathfrak{A}$ термов от одной переменной, а $\mathcal{T}_2$ – неограниченных. Тогда в $(\mathfrak{A}, I)$ выполнено множество формул X , которое определено в предыдущей теореме. Так как $(\mathfrak{A}', I') \equiv (\mathfrak{A}, I)$, то $(\mathfrak{A}', I') \models X$; очевидно, I' является неразличимым термально изолированным множеством.

Если $a, b \in \mathfrak{A}$, то через $[a, b]$ мы обозначаем отрезок

$$[a, b] = \{c \in \mathfrak{A} : a \leq c \leq b\}.$$

Зафиксируем некоторое термально изолированное множество I . Через $[a]$ мы будем обозначать следующее множество:

$$[a] = \cup \{[t_1(a), t_2(a)] : t_1, t_2 \in \mathcal{T} \wedge t_1(a) \notin \omega\},$$

если $a \notin \omega$. Если $a \in \omega$, то $[a] = \omega$. Множество $[a]$ мы называем *классом* элемента a . Класс $[a]$ можно рассматривать как множество элементов, которые “достижимы” из a с помощью неограниченных термов. Для классов выполнено следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Если множество $I \subseteq \mathfrak{A}$ термально изолировано, то для всех $x, y \in I$ таких, что $x \neq y$, классы $[x]$ и $[y]$ не пересекаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x, y \in I$, $x < y$ и $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, то существуют термы t_1 и t_2 такие, что $t_2(y) \leq t_1(x)$ и $t_2(y) \notin \omega$. Но по определению термально изолированного множества должно быть $t_1(x) < t_2(y)$. Противоречие.

Также заметим, что если $[t(x)] \neq \omega$, то $[t(x)] \subseteq [x]$.

4. Трансляционный результат. Напомним [4], что теория T обладает $(\mathfrak{A}, I)$ -*изоляционным свойством*, если $\mathfrak{A} \models T$, I – неразличимое в $\mathfrak{A}$ множество и для любой специальной модели $(\mathfrak{A}', I') \equiv (\mathfrak{A}, I)$, любого псевдоконечного множества $D \subseteq I'$, любого конечного множества $E \subseteq \mathfrak{A}'$ и любого элемента $x \in \mathfrak{A}'$ тип $\text{tp}(x/(D \cup E))$ изолируется типом $\text{tp}(x/G)$ для некоторого счетного множества $G \subseteq D \cup E$.

Мы используем теоремы 3.1 и 3.2 из [4]. Из них следует

ТЕОРЕМА 2 (М. А. Тайцлин). *Если теория T обладает $(\mathfrak{A}, I)$ -изоляционным свойством, то любой локально генерический запрос эквивалентен некоторому ограниченному запросу для конечных состояний.*

Для доказательства трансляционного результата в теории $\text{Th}(\omega, +, f)$ мы покажем, что для нее имеет место $(\mathfrak{A}, I)$ -изоляционное свойство.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{A}'$ – специальная модель T . Пусть $I' \subseteq \mathfrak{A}'$ – неразличимое термально изолированное в $\mathfrak{A}'$ множество, $D \subseteq I'$ – псевдоконечное множество в $\mathfrak{A}'$ и $E \subseteq \mathfrak{A}'$ – конечное множество. Пусть $x \in \mathfrak{A}'$. Тогда тип $\text{tp}(x/F)$, где $F = D \cup E$, изолируется в T типом $\text{tp}(x/G)$, где $G \subseteq F$ и счетно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D_0 = E$ и

$$D_{i+1} = \{z \in D : \exists t \in \mathcal{T} \exists \bar{d} \in D_i^{<\omega} (t(x, \bar{d}) \in [z])\}$$

для всех $i \in \omega$. Поскольку множество D термально изолировано, то $[d_1]$ и $[d_2]$ не пересекаются для различных $d_1, d_2 \in D$. Из этого следует, что каждое из D_i не более чем счетно; следовательно, множество $C = \bigcup \{D_i : i \in \omega\}$ тоже счетно. Для C выполняется следующее свойство: для произвольного терма t и $\bar{c} \in C^{<\omega}$, если $d \in D$ такой, что $t(x, \bar{c}) \in [d]$, то $d \in C$.

Из работ [3] и [2] следует, что каждая формула в теории T эквивалентна конечной дизъюнкции экзистенциальных формул вида $\exists \bar{u} \varphi$, где каждая из формул φ является конъюнкцией предикатов делимости $Q_n(t)$ и неравенств вида $t \geq 0$, в которых терм t имеет вид

$$\sum_j (\alpha_j f(u_{k_j} + \delta_j) + \beta_j u_{k_j}) + \sum_i (\gamma_i f(y_i) + \varepsilon_i y_i).$$

Здесь мы считаем, что y_i – это свободные переменные формулы $\exists \bar{u} \varphi$ и константы. В частности, если терм t содержит $u_{k_j}, x, c_i \in C$ и $d_i \in D \setminus C$, то он представляется в виде

$$\sum_j (\alpha_j f(u_{k_j} + \delta_j) + \beta_j u_{k_j}) + t_0(x, \bar{c}) + \sum_i t_i(d_i) \quad (2)$$

для некоторых термов t_0, t_i . Термы, которые можно представить в виде (2) для каких-либо $t_i \in \mathcal{T}$, $\bar{c} \in C^{<\omega}$ и $d_i \in D \setminus C$ мы будем называть *разделенными* в формуле $\exists \bar{u} \varphi$. Отметим несколько свойств разделенных термов. Если в разделенный терм t вместо u_k подставить произвольный терм $t(x, \bar{c})$, где $\bar{c} \in C^{<\omega}$, то полученный терм останется разделенным. Точно также терм остается разделенным при подстановке вместо u_k произвольного терма $t(d)$, где $d \in D \setminus C$. Можно заменять u_k и термами вида $u_{k'} + \delta$, где $\delta \in \omega$. Так же очевидно, что для разделенного терма t вида (2) $Q_n(t)$ эквивалентно булевой комбинации формул видов $Q_m(u_{k_j} + \zeta)$, $Q_m(t_0(x, \bar{c}) + \zeta)$ и $Q_m(t_i(d_i) + \zeta)$, где $m \in \omega$.

Итак, рассмотрим произвольную формулу $\psi \in \text{tp}(x/F)$. Из ранее сказанного следует, что можно ограничиться только рассмотрением формул вида $\exists \bar{u} \varphi$, где φ представляет из себя конъюнкцию сравнений разделенных термов и предикатов делимости. Если для некоторого u_k термы вида $f(u_k + \delta)$ не встречаются в φ , то элиминация квантора производится точно так же, как в арифметике Пресбургера. Заметим только, что все вновь полученные термы окажутся разделенными.

Таким образом, единственное, что мы должны показать – как избавиться от $f(u_{k_j} + \delta_j)$, не нарушая разделенность термов. Мы считаем, что все u_{k_j} входят в список $u_1, \dots, u_n$. Пусть все u_{k_j} упорядочены: $u_1 > u_2 > \dots > u_n$. Рассмотрим произвольное неравенство, содержащее $f(u_1 + \delta)$, и перенесем все члены вида $\alpha_j f(u_1 + \delta_j)$ в другую часть неравенства:

$$\sum_{k_j=1} \alpha_j f(u_1 + \delta_j) \leq \beta u_1 + \sum_{k_j \neq 1} (\alpha_j f(u_{k_j} + \delta_j) + \beta_j u_{k_j}) + t_0(x, \bar{c}) + \sum_i t_i(d_i). \quad (3)$$

Обозначим

$$s(\bar{u}) = \beta u_1 + \sum_{k_j \neq 1} (\alpha_j f(u_{k_j} + \delta_j) + \beta_j u_{k_j}),$$

$$S(u_1) = \sum_{k_j=1} \alpha_j f(u_1 + \delta_j).$$

Если сумма $S(u_1)$ ограничена по модулю константой M , то мы имеем конечную дизъюнкцию

$$S(u_1) = -M \vee \dots \vee S(u_1) = M.$$

Поскольку f является периодической по модулю $2M+1$, каждое из равенств заменяется булевой комбинацией предикатов делимости $Q_m(u_1 + \zeta)$.

Пусть теперь $S(u_1)$ неограниченна. Тогда существует $\Delta_S \in \omega$ такое, что

$$f(u_1 - \Delta_S) \leq S(u_1) \leq f(u_1 + \Delta_S)$$

для всех u_1 . В случае, когда сумма отрицательна, можно рассмотреть противоположное неравенство. Для него удаление $f(u_1 + \delta_j)$ выполняется аналогично.

Заметим, что существует такая константа $\Delta^* \in \omega$, что если $u_1 > u_2 + \Delta^*$, то $f(u_1 - \Delta_S) > 4|s(\bar{u})|$. Если $u_2 < u_1 \leq u_2 + \Delta^*$, то имеется конечное число ситуаций, и квантор элиминируется заменой u_1 термами вида $u_2 + l$, где $l = 1, \dots, \Delta^*$. В дальнейшем считаем, что $u_1 > u_2 + \Delta^*$ и, следовательно,

$$|s(\bar{u})| < \frac{1}{4} f(u_1 - \Delta_S) \leq \frac{1}{4} S(u_1).$$

Заметим, что для всех i либо $t_i \in \omega$, либо $t_i \notin [t_j]$ для всех $j \neq i$. В самом деле, предположим, например, что $t_0(x, \bar{c}) \in [t_j(d_j)]$ и $t_0 \notin \omega$. Поскольку $[t_j(d_j)] \subseteq [d_j]$ или $[t_j(d_j)] = \omega$, получаем, что $t_0(x, \bar{c}) \in [d_j]$ или $t_0(x, \bar{c}) \in \omega$. Следовательно, либо $d_j \in C$, что противоречит выбору d_j , либо $t_0(x, \bar{c}) \in \omega$, что противоречит предположению.

Если все $[t_i]$ равны ω , то заменим $t_i(d_i)$ для $i > 0$ соответствующими натуральными числами и включим эти константы в $t_0(x, \bar{c})$. В противном случае выберем наибольший из термов t_i . Пусть t_{i_0} – наибольший из них. В этом случае

$$m \left| \sum_{i \neq i_0} t_i \right| < t_{i_0}$$

для всех $m \in \omega$. В частности,

$$\left| \sum_{i \neq i_0} t_i \right| < \frac{t_{i_0}}{4}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{3}{4}t_{i_0} \leq \sum_i t_i \leq \frac{5}{4}t_{i_0}.$$

Если

$$u_1 + \Delta_S + \Delta_2 < f^{-1}(t_{i_0}), \quad (4)$$

то

$$S(u_1) \leq f(u_1 + \Delta_S) \leq \frac{1}{2}f(u_1 + \Delta_S + \Delta_2) < \frac{1}{2}t_{i_0}.$$

Следовательно,

$$s(\bar{u}) + \sum_i t_i \geq -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}t_{i_0} + \frac{3}{4}t_{i_0} = \frac{5}{8}t_{i_0} > S(u_1).$$

Таким образом, из (4) следует (3).

Если

$$u_1 - \Delta_S - \Delta_2 > f^{-1}(t_{i_0}), \quad (5)$$

то

$$S(u_1) \geq f(u_1 - \Delta_S) \geq 2f(u_1 - \Delta_S - \Delta_2) \geq 2t_{i_0}.$$

Поэтому

$$s(\bar{u}) + \sum_i t_i \leq \frac{7}{8}S(u_1).$$

Мы получили, что (3) и (5) несовместны.

Если же

$$f^{-1}(t_{i_0}) - \Delta_S - \Delta_2 \leq u_1 \leq f^{-1}(t_{i_0}) + \Delta_S + \Delta_2, \quad (6)$$

то мы имеем конечное число ситуаций и можем заменить u_1 термами вида $f^{-1}(t_{i_0}) + \zeta$.

Поскольку для любого u_1 имеет место в точности один из случаев (4), (5) или (6), то, добавляя дизъюнкцию этих формул, раскрывая скобки и распределяя квантор существования, мы получим новые экзистенциальные формулы, в одних из которых u_1 будет отсутствовать, а в других вхождений $f(u_1 + \delta_j)$ будет меньше, чем в исходной формуле $\exists \bar{u}\varphi$.

По индукции можно утверждать, что все кванторы в формуле ψ могут быть элиминированы, в результате чего останутся неравенства вида $t_1 \leq t_2$, где каждый из t_i имеет вид $t(x, \bar{c})$, где $\bar{c} \in C^{<\omega}$, или $t(\bar{d})$, т.е. не содержит x . Кроме того, могут быть предикаты делимости $Q_n(t(x, \bar{c}))$, где $\bar{c} \in C^{<\omega}$, и $Q_n(t(\bar{d}))$. Таким образом, тип $\text{tp}(x/F)$ эквивалентен множеству неравенств вида

$$t_1(\bar{d}_1) \leq t_0(x, \bar{c}) \leq t_2(\bar{d}_2) \quad (7)$$

и предикатов делимости $Q_n(t(x, \bar{c}))$, где $\bar{c} \in C^{<\omega}$. Так как множество D псевдоконечно, то для каждой тройки термов $(t_1, t_0(x, \bar{c}), t_2)$ найдутся такие наборы констант $\bar{d}_1^*, \bar{d}_2^* \in D^{<\omega}$, что терм $t_1(\bar{d}_1^*)$ будет иметь максимальное значение меньше $t_0(x, \bar{c})$, а

терм $t_2(\bar{d}_2^*)$ – минимальное, большее $t_0(x, \bar{c})$. Тогда все неравенства вида (7) следуют из формулы

$$t_1(\bar{d}_1^*) \leq t_0(x, \bar{c}) \leq t_2(\bar{d}_2^*).$$

Так как существует счетное число троек $(t_1, t_0(x, \bar{c}), t_2)$, $\bar{c} \in C^{<\omega}$, то константы из всевозможных $\bar{d}_1^*$ и $\bar{d}_2^*$ образуют счетное множество D^* . Пусть $G = C \cup D^*$. Тогда любая формула из $\text{tp}(x/F)$ следует из некоторой формулы из $\text{tp}(x/G)$, причем $G \subseteq F$ и счетно. То есть тип $\text{tp}(x/F)$ изолируется типом $\text{tp}(x/G)$.

Теперь мы можем доказать основное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Всякий локально генерический в $(\omega, +, f)$ запрос эквивалентен некоторому ограниченному для конечных состояний.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ – модель T , а $I \subseteq \mathfrak{A}$ – термально изолированное неразличимое множество. Ее существование следует из теоремы 1. Пусть $(\mathfrak{A}', I') \equiv (\mathfrak{A}, I)$ – произвольная специальная модель. По теореме 3 каждый тип $\text{tp}(x/(D \cup E))$, где $E \subseteq \mathfrak{A}$ конечно, а $D \subseteq I$ псевдоконечно, изолируется типом $\text{tp}(x/G)$ для некоторого счетного $G \subseteq D \cup E$. Следовательно, теория T обладает $(\mathfrak{A}, I)$ -изоляционным свойством. По теореме 2 из этого следует, что в T любой локально генерический запрос эквивалентен некоторому ограниченному для конечных состояний.

5. Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность Михаилу Абрамовичу Тайцлину за ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Belegradek O.V., Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Extended order-generic queries // Ann. Pure Appl. Logic. 1999. V. 97. P. 85–125.
- [2] Семёнов А. Л. Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Изв. АН СССР. 1983. Т. 47. № 3. С. 623–658.
- [3] Семёнов А. Л. О некоторых расширениях арифметики сложения натуральных чисел // Изв. АН СССР. 1979. Т. 43. № 5. С. 1175–1195.
- [4] Taitslin M. A. A general condition for collapse results // Ann. Pure Appl. Logic. 2001. V. 113. P. 323–330.
- [5] Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
- [6] Benedikt M., Dong G., Libkin L., Wong L. Relational expressive power of constraint query languages // Proc. 15th ACM Symp. on Principles of Database Systems, 1996. P. 5–16.

Тверской государственный университет
E-mail: Sergey.Dudakov@tversu.ru

Поступило
05.02.2002
Исправленный вариант
28.08.2003