Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Пальцев, О равномерных по действительным аргументу и индексу двусторонних оценках для модифицированных функций Бесселя, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 681–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:28:08

УДК 517.584+517.923

О РАВНОМЕРНЫХ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ АРГУМЕНТУ И ИНДЕКСУ ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

Б. В. Пальцев

Устанавливаются равномерные по действительным аргументу и индексу двусторонние оценки для функций $a_\nu(x) = xI'_\nu(x)/I_\nu(x)$ и $b_\nu(x) = xK'_\nu(x)/K_\nu(x)$, а также для самих модифицированных функций Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ в четверти $x > 0$, $\nu \geq 0$ за исключением некоторых окрестностей точки $x = 0$, $\nu = 0$.

Библиография: 10 названий.

Введение. Настоящая работа возникла в процессе обоснования быстросходящихся итерационных методов с расщеплением граничных условий решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенной системы типа Стокса в областях, обладающих круговой симметрией (круг, кольцо, шар, шаровой слой). Такие методы были предложены в [1]–[3] и исследованы там для случая области, представляющей собой слой между двумя гиперплоскостями, при условии периодичности по ортогональным направлениям, параллельным граничным гиперплоскостям. В [4] аналогичный итерационный метод с расщеплением граничных условий для сингулярного уравнения типа бигармонического был предложен и исследован для случая шара в $\mathbb{R}^n$.

Для обоснования этих методов в случае области, представляющей собой кольцо или шаровой слой, необходимы равномерные оценки по действительным аргументу x и индексу ν функций

$$a_\nu(x) = \frac{xI'_\nu(x)}{I_\nu(x)} \quad \text{и} \quad b_\nu(x) = \frac{xK'_\nu(x)}{K_\nu(x)} \quad (1)$$

на множествах $D_{r_*} = \{(x, \nu) : x > 0, \nu \geq 0, \sqrt{x^2 + \nu^2} \geq r_*\}$, $r_* > 0$, где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода соответственно (последние – функции Макдональда), а также равномерные оценки на тех же множествах и самих функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$. Последние образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$x^2 u'' + xu' - (x^2 + \nu^2)u = 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00732а, № 99-01-00852.

причем $I_\nu(x)$ – ограниченное в нуле решение уравнения (2), имеющее асимптотическое поведение

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (1 + O(x^{-1})), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

а $K_\nu(x)$ – экспоненциально убывающее с ростом x решение (2), имеющее асимптотическое поведение

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 + O(x^{-1})), \quad x \rightarrow \infty \quad (4)$$

(см., например, [5], [6]).

Исследованию асимптотического поведения функций Бесселя, в частности и модифицированных, посвящена обширная литература. Для функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$, а также их производных хорошо известны асимптотические разложения при больших значениях аргумента и ограниченных значениях индекса, равномерные асимптотические разложения при больших значениях индекса, а также некоторые другие разложения. Однако необходимые для указанных выше целей равномерные по x и ν двусторонние оценки для функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$, а также для функций (1) в известных руководствах и работах по бесселевым функциям (см., например, [5]–[9]) обнаружить не удалось.

Между тем, нужные оценки, о которых идет речь, для функций (1) могут быть получены с помощью простой техники, основанной на использовании теоремы о дифференциальном неравенстве (см., например, [10]) и построении уточненных верхних и нижних барьеров (при существенном использовании лишь для фиксированных значений ν степенного разложения в нуле до $O(x^6)$ функции $a_\nu(x)$ и асимптотического разложения при $x \rightarrow \infty$ до $O(x^{-3})$ функции $b_\nu(x)$). Отметим, что такой подход был использован в [4] для получения грубой оценки сверху для функции $a_\nu(x)$. Необходимые же двусторонние равномерные оценки для функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ получаются уже простым интегрированием уточненных оценок для функций (1) с учетом нормировок (3) и (4). В настоящей статье проводится реализация этого плана и устанавливаются необходимые для указанных выше целей оценки функций (1), $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$.

1. Основные оценки. Сформулируем здесь устанавливаемые ниже в п. 3 основные оценки для функций (1), а также устанавливаемые в п. 4 основные оценки для функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для функций (1) имеют место следующие двусторонние оценки. Для $a_\nu(x)$:*

$$-\frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)^{3/2}} < a_\nu(x) - \sqrt{x^2 + \nu^2} + \frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)} < \frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)^{3/2}}, \quad (5)$$

причем оценка сверху выполняется для любых $x > 0$, $\nu \geq 0$, а оценка снизу – на множестве

$$\left\{ (x, \nu) : x > 0, \nu \geq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, \nu) : x > 0, \nu \geq 0, \sqrt{x^2 + \nu^2} \geq \frac{(\sqrt{7} + 2)}{3} \right\}. \quad (6)$$

Для $b_\nu(x)$:

$$-\frac{\beta x^2}{(x^2 + \nu^2)^{3/2}} < b_\nu(x) + \sqrt{x^2 + \nu^2} + \frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)} < \frac{x^2}{8(x^2 + \nu^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

$\beta > 1/2$ – произвольное, причем оценка сверху выполняется на множестве

$$\left\{ (x, \nu) : x > 0, \nu \geq 0, \sqrt{x^2 + \nu^2} \geq \frac{1}{5} \right\}, \quad (8)$$

а оценка снизу – на множестве

$$\left\{ (x, \nu) : x > 0, \nu \geq 0, \sqrt{x^2 + \nu^2} \geq \frac{2\beta}{(2\beta - 1)} \right\}. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Для модифицированных функций Бесселя имеют место следующие двусторонние оценки. Для $I_\nu(x)$:

$$e^{-\frac{1}{2\sqrt{x^2+\nu^2}}} \leq I_\nu(x) \sqrt{2\pi} (x^2 + \nu^2)^{1/4} e^{-(\sqrt{x^2+\nu^2} + \nu \ln \frac{x}{\nu + \sqrt{x^2+\nu^2}})} \leq e^{\frac{1}{2\sqrt{x^2+\nu^2}}}, \quad (10)$$

причем оценка снизу выполняется для любых $x > 0, \nu \geq 0$, а оценка сверху – на множестве (6). Для $K_\nu(x)$:

$$e^{-\frac{1}{8\sqrt{x^2+\nu^2}}} \leq K_\nu(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (x^2 + \nu^2)^{1/4} e^{(\sqrt{x^2+\nu^2} + \nu \ln \frac{x}{\nu + \sqrt{x^2+\nu^2}})} \leq e^{\frac{\beta}{\sqrt{x^2+\nu^2}}}, \quad (11)$$

$\beta > 1/2$ – произвольное, причем нижняя оценка выполняется на множестве (8), а верхняя – на множестве (9).

2. Простейшие двусторонние оценки для функций (1). Каждая из функций $a_\nu(x)$ и $b_\nu(x)$ удовлетворяют следующему уравнению Риккати:

$$v'_\nu(x) = -\frac{1}{x}(v_\nu(x))^2 + \frac{x^2 + \nu^2}{x} \stackrel{\text{def}}{=} F_\nu(v_\nu(x), x), \quad x > 0. \quad (12)$$

Для получения двусторонних оценок для функций (1) воспользуемся следующим достаточным для нас вариантом известной из теории обыкновенных дифференциальных уравнений теоремы о дифференциальном неравенстве (см., например, [10, гл. III, § 4]).

ТЕОРЕМА (о дифференциальном неравенстве). Пусть $F(v, x)$ – непрерывная функция переменных v и x в некоторой области G .

1⁰) (В сторону возрастания x). Пусть $v(x)$ – решение на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, задачи Коши

$$v'(x) = F(v(x), x), \quad v(x_0) = v_0, \quad (v_0, x_0) \in G, \quad (13)$$

и пусть существует дифференцируемая на $[x_0, x_0 + \delta]$ функция $v_+(x)$ (или $v_-(x)$), удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} v'_+(x) &> F(v_+(x), x) \quad (\text{или} \quad v'_-(x) < F(v_-(x), x)) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta], \\ v_+(x_0) &> v(x_0) \quad (\text{или} \quad v_-(x_0) < v(x_0)). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$

$$v(x) < v_+(x) \quad (\text{или соответственно} \quad v_-(x) < v(x)). \quad (15)$$

2⁰) (В сторону убывания x). Пусть $v(x)$ – решение на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$, $\delta > 0$, задачи Коши (13) и пусть существует дифференцируемая на $[x_0 - \delta, x_0]$ функция $v_+(x)$ (или $v_-(x)$), удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} v'_+(x) < F(v_+(x), x) \quad (\text{или} \quad v'_-(x) > F(v_-(x), x)) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0], \\ v_+(x_0) > v(x_0) \quad (\text{или} \quad v_-(x_0) < v(x_0)). \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0]$ выполняется (15).

Функции $v_+(x)$ и $v_-(x)$, фигурирующие в этой теореме, будем называть соответственно *верхним* и *нижним* барьерами для решения $v(x)$.

Построение верхних и нижних барьеров для функций (1) как решений уравнения (12) удается осуществлять на основе применения: для $a_\nu(x)$ – части 1⁰) (в сторону возрастания x), а для $b_\nu(x)$ – части 2⁰) (в сторону убывания x) вышесформулированной теоремы.

Для таких построений потребуются следующие свойства функций (1):

$$a_\nu(x) > 0, \quad b_\nu(x) < 0, \quad \forall x > 0, \quad \nu \geq 0. \quad (17)$$

Положительность $a_\nu(x)$ следует, например, из представления

$$a_\nu(x) = \nu + x \frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}, \quad (18)$$

вытекающего из рекуррентного соотношения

$$I'_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x)$$

(см. [6, формулы 9.6.26]) и положительности функций $I_\nu(x)$. Отрицательность $b_\nu(x)$ вытекает из непосредственного определения (1), положительности функций $K_\nu(x)$ и отрицательности их производных $K^{(1)}_\nu(x)$ (что следует, например, из интегрального представления 9.6.24 в [6]).

Для $a_\nu(x)$ и $b_\nu(x)$ имеем

$$a_\nu(x) = \nu + \frac{x^2}{2(\nu+1)} - \frac{x^4}{8(\nu+1)^2(\nu+2)} + O(x^6) \quad \text{при} \quad x \rightarrow 0, \quad (19)$$

что получается, например, из (18) с использованием степенного представления для $I_\nu(x)$ (см. [6, формула 9.6.10]);

$$b_\nu(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{4\nu^2 - 1}{8} \cdot \frac{1}{x} + \frac{4\nu^2 - 1}{8} \cdot \frac{1}{x^2} + O(x^{-3}) \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Это разложение получается, например, с использованием асимптотических разложений 9.7.2 и 9.7.4 в [6] для $K_\nu(x)$ и $K'_\nu(x)$.

В этом пункте будут получены для начала грубые барьеры для функций (1). Полученные с их помощью простейшие оценки для этих функций тем не менее оказываются также полезными для указанных во введении целей.

I. *Верхний барьер для $a_\nu(x)$.* Таким барьером для $a_\nu(x)$ на любом полуотрезке $[x_0, \infty)$, где $0 < x_0 \leq x_*(\nu)$, $x_*(\nu)$ – достаточно малое (зависящее от $\nu \geq 0$), будет функция $v_{\nu,+}(x) = \sqrt{x^2 + \nu^2}$.

Действительно, $v'_{\nu,+}(x) = x/\sqrt{x^2 + \nu^2}$, в то время как $F_\nu(v_{\nu,+}(x), x) \equiv 0$, а потому $v'_{\nu,+}(x) > F_\nu(v_{\nu,+}(x), x) \quad \forall x > 0$. Кроме того, сравнивая разложения (19) для $a_\nu(x)$ и $v_{\nu,+}(x) = \nu + x^2/(2\nu) + O(x^4)$ при $x \rightarrow \infty$, $\nu \neq 0$, а также выражение $v_{0,+}(x) = x$, нетрудно убедиться, что при достаточно малых $x_0 > 0$ выполняется также и неравенство $v_{\nu,+}(x_0) > a_\nu(x_0)$. Таким образом, применяя часть 1⁰) теоремы о дифференциальном неравенстве, заключаем, что $a_\nu(x) < \sqrt{x^2 + \nu^2}$.

II. *Построение нижнего барьера для $a_\nu(x)$.* Этот барьер будем искать опять же на полуинтервале $[x_0, \infty)$, где $x_0 > 0$, вообще говоря, зависит от ν , в виде $v_{\nu,-}(x) = \sqrt{x^2 + \nu^2} - \alpha$, $\alpha > 0$.

Число α нужно подобрать в первую очередь таким, чтобы неравенство $v'_{\nu,-}(x) < F_\nu(v_{\nu,-}(x), x)$ выполнялось $\forall x > x_0$. Это неравенство, как легко видеть, эквивалентно неравенству

$$(2\alpha - 1)(x^2 + \nu^2) - \alpha^2 \sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu^2 > 0.$$

Оказывается удачным положить $\alpha = 1$. Тогда последнее неравенство принимает вид $(x^2 + \nu^2) - \sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu^2 > 0$, и оно заведомо выполняется при $\sqrt{x^2 + \nu^2} > 1$. Поэтому $x_0 > 0$ возьмем при $0 \leq \nu < 1$ таким, что $\sqrt{x_0^2 + \nu^2} = 1$, а при $\nu \geq 1$ – лишь достаточно малым. При таких x_0 будет выполняться и неравенство $v_{\nu,-}(x_0) < a_\nu(x_0)$. В самом деле, если $0 \leq \nu < 1$, то $v_{\nu,-}(x_0) = 0 < a_\nu(x_0)$, а если $\nu \geq 1$, то $\lim_{x_0 \rightarrow 0} v_{\nu,-}(x_0) = \nu - 1 < \nu = \lim_{x_0 \rightarrow 0} a_\nu(x_0)$. Поэтому применение здесь части 1⁰) теоремы о дифференциальном неравенстве дает оценку $\sqrt{x^2 + \nu^2} - 1 < a_\nu(x) \quad \forall x > 0$, $\nu \geq 0$, $\sqrt{x^2 + \nu^2} \geq 1$.

III. *Верхний барьер для $b_\nu(x)$.* Таким барьером для $b_\nu(x)$ на полуотрезке $(0, x_0]$, где $0 < x_*(\nu) \leq x_0$, $x_*(\nu)$ – теперь достаточно большое (зависящее от ν), будет функция $w_{\nu,+}(x) = -\sqrt{x^2 + \nu^2}$.

В самом деле, $w'_{\nu,+}(x) = -x/\sqrt{x^2 + \nu^2}$, $F_\nu(w_{\nu,+}(x), x) \equiv 0$, а потому $w'_{\nu,+}(x) < F_\nu(w_{\nu,+}(x), x) \quad \forall x > 0$, $\nu \geq 0$. Кроме того, в силу (20) при достаточно больших x_0

$$w_{\nu,+}(x_0) = -x_0 + O(x_0^{-1}) > b_\nu(x_0) = -x_0 - \frac{1}{2} + O(x_0^{-1}).$$

Отсюда, применяя часть 2⁰) теоремы о дифференциальном неравенстве, получаем, что $b_\nu(x) < -\sqrt{x^2 + \nu^2} \quad \forall x > 0$, $\nu \geq 0$.

IV. *Построение нижнего барьера для $b_\nu(x)$.* Этот барьер для $b_\nu(x)$ опять на полуотрезке $(0, x_0]$, где x_0 – достаточно большие, ищем в виде $w_{\nu,-}(x) = -\sqrt{x^2 + \nu^2} - \beta$, $\beta > 0$.

Согласно части 2⁰) теоремы о дифференциальном неравенстве β нужно подобрать таким, чтобы неравенство $w'_{\nu,-}(x) > F_\nu(w_{\nu,-}(x), x)$ выполнялось $\forall x > 0$. Это неравенство эквивалентно неравенству

$$x^2 < 2\beta(x^2 + \nu^2) + \beta^2 \sqrt{x^2 + \nu^2}.$$

Легко видеть, что последнее неравенство выполняется для любых $x > 0$ и при любых $\nu \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\beta \geq 1/2$. Кроме того, β должно быть таким, чтобы

при достаточно больших x_0 выполнялось неравенство

$$w_{\nu,-}(x_0) = -x_0 - \beta - \frac{\nu^2}{2x_0} + O(x_0^{-3}) < b_{\nu}(x_0) = -x_0 - \frac{1}{2} - \frac{4\nu^2 - 1}{8x_0} + O(x_0^{-2}).$$

Такое неравенство, как нетрудно видеть, выполняется уже при минимальном из возможных значений β : $\beta = 1/2$. Поэтому оценка $-\sqrt{x^2 + \nu^2} - 1/2 < b_{\nu}(x)$ выполняется $\forall x > 0$, $\forall \nu \geq 0$.

Сформулируем установленное в виде леммы.

ЛЕММА 1. Для любых $x > 0$ и $\nu \geq 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\sqrt{x^2 + \nu^2} - 1 < a_{\nu}(x) < \sqrt{x^2 + \nu^2}, \quad (21)$$

$$-\sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{1}{2} < b_{\nu}(x) < -\sqrt{x^2 + \nu^2}. \quad (22)$$

Отметим, что в силу положительности функции $a_{\nu}(x)$ оценка снизу (21) при $\sqrt{x^2 + \nu^2} \leq 1$ не несет никакой информации. Кроме того, оценки снизу в (21) оказываются недостаточно для построения уточненного нижнего барьера для функции $a_{\nu}(x)$. Для этой цели установим следующую оценку.

ЛЕММА 2. Для любых $x > 0$, ν : $0 \leq \nu \leq \sqrt{2}$ имеет место оценка

$$\sqrt{x^2 + 1} - 1 + \frac{\nu^2}{4} < a_{\nu}(x). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что функция $v_{\nu,-}(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1 + \nu^2/4$ является нижним барьером для функции $a_{\nu}(x)$ при $0 \leq \nu \leq \sqrt{2}$ на полуотрезках $[x_0, \infty)$, где $x_0 > 0$ достаточно малые. Неравенство $v'_{\nu,-}(x) < F_{\nu}(v_{\nu,-}(x), x)$ здесь эквивалентно неравенству

$$0 < \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)(x^2 + 1) - \left(2 - \frac{3\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{16}\right)\sqrt{x^2 + 1} \stackrel{\text{def}}{=} \eta(x, \nu)$$

и оно выполняется $\forall x > 0$, $0 \leq \nu \leq \sqrt{2}$. Это вытекает из представления

$$\eta(x, \nu) = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)^2 (\sqrt{x^2 + 1} - 1)^2 + \frac{\nu^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{8}\right) \sqrt{x^2 + 1} + \frac{\nu^2}{2}.$$

Далее, при достаточно малых $x_0 > 0$ и $0 < \nu \leq \sqrt{2}$

$$v_{\nu,-}(x_0) = \frac{\nu^2}{4} + O(x_0^2) < a_{\nu}(x_0) = \nu + O(x_0^2).$$

При $\nu = 0$, производя разложения до $O(x_0^6)$, получаем при достаточно малых $x_0 > 0$

$$v_{0,-}(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{8}x_0^4 + O(x_0^6) < a_0(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{16}x_0^4 + O(x_0^6).$$

Таким образом, $v_{\nu,-}(x)$ является верхним барьером для $a_{\nu}(x)$ и оценка (23) установлена.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

3. Уточненные двусторонние оценки для функций (1).

I. Построение уточненного верхнего барьера для $a_\nu(x)$. Будем искать уточненные верхний барьер $v_{\nu,+}(x)$ и нижний барьер $v_{\nu,-}(x)$ для $a_\nu(x)$ в виде

$$v_{\nu,\pm}(x) = \sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)} + \alpha_\pm \cdot \frac{x^2}{(x^2 + \nu^2)^{3/2}}, \quad (24)$$

где $\alpha_\pm(x)$ – некоторые постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} v'_{\nu,\pm}(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \nu^2 \frac{x}{(x^2 + \nu^2)^2} + \alpha_\pm \frac{(2\nu^2 - x^2)x}{(x^2 + \nu^2)^{5/2}}, \\ F_\nu(v_{\nu,\pm}(x), x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \frac{[(2\alpha_\pm + 0,25)x^2 + 2\alpha_\pm \nu^2]x}{(x^2 + \nu^2)^2} \\ &\quad + \alpha_\pm \cdot \frac{x^3}{(x^2 + \nu^2)^{5/2}} - \alpha_\pm^2 \frac{x^3}{(x^2 + \nu^2)^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для верхнего барьера $v_{\nu,+}(x)$ должны выполняться условия

$$v'_{\nu,+}(x) > F_\nu(v_{\nu,+}(x), x) \quad \forall x > 0, \quad \forall \nu \geq 0, \quad (26)$$

$$v_{\nu,+}(x_0) > a_\nu(x_0) \quad \text{для достаточно малых } x_0. \quad (27)$$

Неравенство (26) эквивалентно неравенству

$$\left(\left(2\alpha_+ + \frac{1}{4} \right) x^2 + (2\alpha_+ - 1)\nu^2 \right) + \alpha_+ \frac{2(\nu^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \alpha_+^2 \frac{x^2}{x^2 + \nu^2} > 0. \quad (28)$$

Устремляя здесь ν к ∞ , находим, что необходимым условием выполнимости неравенства (28) при любых ν является условие $(2\alpha_+ - 1) \geq 0$, т.е. условие $\alpha_+ \geq 1/2$.

Положим значение α_+ минимальным из возможных, т.е. $\alpha_+ = 1/2$. С таким α_+ неравенство (28) может быть приведено к виду

$$\frac{1}{4}x^2 + x^2 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \nu^2}} \right)^2 + \frac{\nu^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} > 0,$$

а потому заведомо выполняется для любых $x > 0$, $\nu \geq 0$. Следовательно, функция $v_{\nu,+}(x)$, определенная (24) с $\alpha_+ = 1/2$, удовлетворяет условию (26).

Более того, такая $v_{\nu,+}(x)$ удовлетворяет и условию (27). В самом деле, используя (19), имеем для $\nu > 0$

$$v_{\nu,+}(x_0) = \nu + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} \right) x_0^2 + O(x_0^4) > a_\nu(x_0) = \nu + \frac{1}{2(\nu + 1)} x_0^2 + O(x_0^4)$$

при достаточно малых x_0 , поскольку

$$\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} \right) = \frac{(1 + \nu^{-3})}{(\nu + 1)} > \frac{1}{(\nu + 1)} \quad \forall \nu > 0.$$

При $\nu = 0$ также

$$v_{0,+}(x_0) = x_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_0} > a_0(x_0) = O(x_0^2)$$

при достаточно малых $x_0 > 0$.

Таким образом, применяя часть 1^о) теоремы о дифференциальном неравенстве, устанавливаем справедливость оценки сверху в (5).

II. Построение уточненного нижнего барьера для $a_\nu(x)$. Значение параметра α_- в выражении (24) для нижнего барьера $v_{\nu,-}(x)$ для $a_\nu(x)$ нужно подобрать так, чтобы выполнялись неравенства противоположного знака с (26), (27):

$$v'_{\nu,-}(x) < F_\nu(v_{\nu,-}(x), x) \quad \forall x > x_0, \quad (29)$$

$$v_{\nu,-}(x_0) < a_\nu(x_0), \quad (30)$$

где $x_0 > 0$ сейчас не конкретизируется и должно быть подобрано ниже.

Аналогично (28) неравенство (29) эквивалентно неравенству

$$\left(\left(2\alpha_- + \frac{1}{4} \right) x^2 + (2\alpha_- - 1)\nu^2 \right) + \alpha_- \frac{2(\nu^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \alpha_-^2 \frac{x^2}{x^2 + \nu^2} < 0. \quad (31)$$

Устремляя в этом неравенстве x к ∞ , находим, что необходимым условием его выполнимости является условие $(2\alpha_- + 1/4) < 0$, т.е. условие $\alpha_- < -1/8$.

Положим в выражении (24) для $v_{\nu,-}(x)$ $\alpha_- = 1/2$. Тогда неравенство (31) приобретает вид

$$\theta(x, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} -2\nu^2 - \frac{\nu^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \frac{x^2}{4(x^2 + \nu^2)} < 0. \quad (32)$$

Покажем, что это неравенство выполняется для любых $x > 0$, $\nu \geq 1/2$. В самом деле, производя элементарные выкладки и оценки, имеем для любых $x > 0$ (так как $\sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu > 2\nu$)

$$\begin{aligned} \theta(x, \nu) &= -2\nu^2 - \nu + \frac{\nu x^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}(\sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu)} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \frac{x^2}{4(x^2 + \nu^2)} \\ &< -2\nu^2 - \nu - x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \frac{1}{4(x^2 + \nu^2)} \right) \\ &= -2\nu^2 - \nu - x^2 \left[\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} \right)^2 - \frac{1}{x^2 + \nu^2} \right] \\ &\leq -2\nu^2 - \nu + \frac{x^2}{x^2 + \nu^2} < -2\nu^2 - \nu + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

при $\nu \geq 1/2$.

Более того, неравенство (32) выполняется и для любых $x > 0$, $\nu \geq 0$, удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + \nu^2} > (\sqrt{7} + 2)/3$. Действительно, это неравенство заведомо будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$\frac{x^2}{4} \left(-3 + \frac{4}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} \right)^2 \right) < 0, \quad (33)$$

и поскольку многочлен $z^2 + 4z - 3$ отрицателен на интервале $(-\sqrt{7} - 2, \sqrt{7} - 2)$, неравенство (33), а вместе с ним и неравенство (32) будет выполняться при $1/\sqrt{x^2 + \nu^2} < (\sqrt{7} - 2)$, т.е. при $\sqrt{x^2 + \nu^2} > 1/(\sqrt{7} - 2) = (\sqrt{7} + 2)/3$.

Перейдем к исследованию выполнимости неравенства (30). В случае $\nu \geq 1/2$ неравенство (30) выполняется для $x_0 > 0$ достаточно малых. В самом деле, в этом случае при достаточно малых x_0

$$v_{\nu,-}(x_0) = \nu + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} \right) x_0^2 + O(x_0^4) < a_\nu(x_0) = \nu + \frac{1}{2(\nu+1)} x_0^2 + O(x_0^4),$$

поскольку

$$\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{\nu(\nu+1)} < \frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3}.$$

В случае $0 \leq \nu < 1/2$ возьмем в качестве $x_0 > 0$ точку, лежащую на окружности $\sqrt{x_0^2 + \nu^2} = (\sqrt{7} + 2)/3$. Для таких x_0

$$\begin{aligned} v_{\nu,-}(x_0) &= \sqrt{x_0^2 + \nu^2} - \frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{2(x_0^2 + \nu^2)} - \frac{1}{2\sqrt{x_0^2 + \nu^2}} + \frac{\nu^2}{2(x_0^2 + \nu^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{7}}{3} - \frac{(\sqrt{7} - 1)}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 2)^2(\sqrt{7} - 1)\nu^2 \\ &= \frac{7 - \sqrt{7}}{6} + \frac{15\sqrt{7} - 39}{2}\nu^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя оценку (23), получаем

$$a_\nu(x_0) > \sqrt{1 - \nu^2 + x_0^2 + \nu^2} - 1 + \frac{1}{4}\nu^2 = \sqrt{\frac{20 + 4\sqrt{7}}{9} - \nu^2} - 1 + \frac{1}{4}\nu^2.$$

Отсюда имеем

$$v_{\nu,-}(x_0) - a_\nu(x_0) < \left(\frac{7 - \sqrt{7}}{6} + \frac{15\sqrt{7} - 39 - 0,5}{2}\nu^2 - \sqrt{\frac{20 + 4\sqrt{7}}{9} - \nu^2 + 1} \right) \Big|_{\nu=0,5} < -0,0253 < 0,$$

поскольку $(15\sqrt{7} - 39,5)/2 > 0,0931 > 0$ и функция, фигурирующая в круглых скобках, является монотонно возрастающей функцией ν .

Таким образом функция $v_{\nu,-}(x)$ является нижним барьером для функции $a_\nu(x)$ на любом полуотрезке $[x_0, \infty)$, где $x_0 > 0$ – любое достаточно малое в случае $\nu \geq 1/2$ и $x_0 > 0$ лежит на окружности $\sqrt{x_0^2 + \nu^2} = (\sqrt{7} + 2)/3$ в случае $0 \leq \nu < 1/2$. Применяя часть 1⁰ теоремы о дифференциальном неравенстве, приходим к оценке снизу в (5) для функции $a_\nu(x)$ на множестве (6).

III. Построение уточненного верхнего барьера для $b_\nu(x)$. Уточненные верхний барьер $w_{\nu,+}(x)$ и нижний барьер $w_{\nu,-}(x)$ для функции $b_\nu(x)$ на полуотрезках $(\sigma_\pm, x_0]$, где $x_0 > 0$ – произвольное достаточно большое, $\sigma_\pm = \sigma_\pm(\nu) > 0$, будем искать в виде

$$w_{\nu,\pm}(x) = -\sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{x^2}{2(x^2 + \nu^2)} + \beta_\pm \frac{x^2}{(x^2 + \nu^2)^{3/2}}, \quad (34)$$

где $\beta_{\pm}$ – некоторые числа. Как и выше,

$$\begin{aligned} w'_{\nu,\pm}(x) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \nu^2 \frac{x}{(x^2 + \nu^2)^2} + \beta_{\pm} \frac{(2\nu^2 - x^2)x}{(x^2 + \nu^2)^{5/2}}, \\ F_{\nu}(w_{\nu,\pm}(x), x) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \frac{[(2\beta_{\pm} - 0, 25)x^2 + 2\beta_{\pm}\nu^2]x}{(x^2 + \nu^2)^2} \\ &\quad + \beta_{\pm} \frac{x^3}{(x^2 + \nu^2)^{5/2}} - \beta_{\pm}^2 \frac{x^3}{(x^2 + \nu^2)^3}. \end{aligned} \quad (35)$$

Для верхнего барьера $w_{\nu,+}(x)$ должны выполняться условия

$$w'_{\nu,+}(x) < F_{\nu}(w_{\nu,+}(x), x) \quad \forall x \in (\sigma_+, x_0), \quad (36)$$

$$w_{\nu,+}(x_0) > b_{\nu}(x_0). \quad (37)$$

Неравенство (36) эквивалентно неравенству

$$\left(\left(2\beta_+ - \frac{1}{4} \right) x^2 + (2\beta_+ + 1)\nu^2 \right) - \beta_+ \frac{2(\nu^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \beta_+^2 \frac{x^2}{(x^2 + \nu^2)} > 0. \quad (38)$$

Устремляя в этом неравенстве x к ∞ , находим, что необходимым условием его выполнимости является условие $(2\beta_+ - 1/4) \geq 0$, т.е. $\beta_+ \geq 1/8$.

Положим β_+ равным минимально возможному значению, т.е. $\beta_+ = 1/8$. При таком β_+ перепишем неравенство (38) в виде

$$\frac{5}{4} \frac{\nu^2}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} \left(\sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{x^2}{4(x^2 + \nu^2)} \left(\sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{1}{64} \right) > 0.$$

Последнее неравенство, а потому и неравенство (36), выполняется при $\sqrt{x^2 + \nu^2} \geq 1/5$, причем, как нетрудно видеть, это условие является необходимым для его выполнимости при всех достаточно больших ν .

Остается проверить, что при достаточно больших $x_0 > 0$ выполняется и условие (37). В самом деле, разлагая $w_{\nu,+}(x)$ по степеням x^{-1} и используя разложение (20), имеем для $x_0 > 0$ достаточно больших

$$\begin{aligned} w_{\nu,+}(x_0) &= -x_0 - \frac{1}{2} - \frac{4\nu^2 - 1}{8x_0} + \frac{\nu^2}{2x_0^2} + O(x_0^{-3}) \\ &> b_{\nu}(x_0) = -x_0 - \frac{1}{2} - \frac{4\nu^2 - 1}{8x_0} + \frac{4\nu^2 - 1}{8x_0^2} + O(x_0^{-3}). \end{aligned}$$

Таким образом, применяя часть 2⁰) теоремы о дифференциальном неравенстве, приходим к справедливости оценки сверху в (7) на множестве (8).

IV. Построение уточненного нижнего барьера для $b_{\nu}(x)$. Для нижнего барьера $w_{\nu,-}(x)$ для $b_{\nu}(x)$, имеющего выражение (34), должны выполняться условия

$$w'_{\nu,-}(x) > F_{\nu}(w_{\nu,-}(x), x) \quad \forall x \in (\sigma_-, x_0), \quad (39)$$

$$w_{\nu,-}(x_0) < b_{\nu}(x_0). \quad (40)$$

Неравенство (39) эквивалентно неравенству

$$\left[\left(2\beta_- - \frac{1}{4} \right) x^2 + (2\beta_- + 1)\nu^2 \right] - \beta_- \frac{2(\nu^2 - x^2)}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} - \beta_-^2 \frac{x^2}{x^2 + \nu^2} < 0. \quad (41)$$

Устремляя в нем ν к ∞ , находим, что необходимым условием его выполнимости является условие $(2\beta_- + 1) < 0$, т.е. условие $\beta_- < -1/2$. Далее, возьмем $\beta_- = -\beta$, где $\beta > 1/2$. Запишем неравенство (41) в виде

$$x^2 \left(\left(2\beta + \frac{1}{4} \right) + 2\beta \frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} + \beta^2 \frac{1}{(x^2 + \nu^2)} \right) + \frac{\nu^2(2\beta - 1)}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} \left(\sqrt{x^2 + \nu^2} - \frac{2\beta}{2\beta - 1} \right) > 0.$$

Последнее неравенство, а вместе с ним и неравенство (39), будет выполняться $\forall x > 0$, удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + \nu^2} \geq 2\beta/(2\beta - 1)$.

Кроме того, тогда при достаточно больших x_0

$$\begin{aligned} w_{\nu,-}(x_0) &= -x_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\nu^2 + 2\beta) \frac{1}{x_0} + O(x_0^{-2}) \\ &< b_{\nu}(x_0) = -x_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{x_0} + O(x_0^{-2}). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $w_{\nu,-}(x)$ с $\beta_- = -\beta$, $\beta > 1/2$, представляет собой нижний барьер для $b_{\nu}(x)$ при $\sqrt{x^2 + \nu^2} > 2\beta/(2\beta - 1)$, $x > 0$, а потому справедлива оценка снизу в (7) на множестве (9). Теорема 1 полностью доказана.

4. Равномерные двусторонние оценки для функций $I_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Поскольку

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + \nu^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu \ln \frac{x}{\nu + \sqrt{x^2 + \nu^2}}, \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + \nu^2}} dx &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + \nu^2), \quad \int \frac{x}{(x^2 + \nu^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}}, \end{aligned}$$

имеем

$$v_{\nu,\pm}(x) = \frac{d}{dx} V_{\nu,\pm}(x), \quad w_{\nu,\pm}(x) = \frac{d}{dx} W_{\nu,\pm}(x),$$

где $v_{\nu,\pm}(x)$ определены формулой (24) с $\alpha_{\pm} = \pm 1/2$, $w_{\nu,\pm}(x)$ определены формулой (34) с $\beta_+ = 1/8$, $\beta_- = -\beta$, $\beta > 1/2$,

$$\begin{aligned} V_{\nu,\pm}(x) &= \sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu \ln \frac{x}{\nu + \sqrt{x^2 + \nu^2}} - \frac{1}{4} \ln(x^2 + \nu^2) \mp \alpha_{\pm} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}}, \\ W_{\nu,\pm}(x) &= - \left(\sqrt{x^2 + \nu^2} + \nu \ln \frac{x}{\nu + \sqrt{x^2 + \nu^2}} \right) - \frac{1}{4} \ln(x^2 + \nu^2) \mp \beta_{\pm} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \nu^2}}. \end{aligned}$$

Поэтому двусторонние оценки (5) и (7) (после деления на x) можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} V_{\nu,-}(x) &< \frac{d}{dx} \ln I_{\nu}(x) < \frac{d}{dx} V_{\nu,+}(x), \\ \frac{d}{dx} W_{\nu,-}(x) &< \frac{d}{dx} \ln K_{\nu}(x) < \frac{d}{dx} W_{\nu,+}(x), \end{aligned}$$

причем для тех значений x , при которых выполняются соответствующие им оценки (5) и (7).

Проинтегрируем каждую из частей последних неравенств от x до A , $A > x$, и воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница. В результате получим двусторонние оценки

$$\begin{aligned} V_{\nu,-}(A) - V_{\nu,-}(x) &< \ln I_{\nu}(A) - \ln I_{\nu}(x) < V_{\nu,+}(A) - V_{\nu,+}(x), \\ W_{\nu,-}(A) - W_{\nu,-}(x) &< \ln K_{\nu}(A) - \ln K_{\nu}(x) < W_{\nu,+}(A) - W_{\nu,+}(x), \end{aligned}$$

откуда для любого $A > x$

$$e^{V_{\nu,+}(x)} I_{\nu}(A) e^{-V_{\nu,+}(A)} < I_{\nu}(x) < e^{V_{\nu,-}(x)} I_{\nu}(A) e^{-V_{\nu,-}(A)}, \quad (42)$$

$$e^{W_{\nu,+}(x)} K_{\nu}(A) e^{-W_{\nu,+}(A)} < K_{\nu}(x) < e^{W_{\nu,-}(x)} K_{\nu}(A) e^{-W_{\nu,-}(A)}. \quad (43)$$

Но в силу (3) и (4)

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} I_{\nu}(A) e^{-V_{\nu,\pm}(A)} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^A}{\sqrt{2\pi A}} \sqrt{A} e^{-A} (1 + O(A^{-1})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ \lim_{A \rightarrow \infty} K_{\nu}(A) e^{-W_{\nu,\pm}(A)} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2A}} e^{-A} \sqrt{A} e^A (1 + O(A^{-1})) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому, переходя в оценках (42) и (43) при фиксированных x к пределу при $A \rightarrow \infty$, получаем соответственно двусторонние оценки (10) и (11).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пальцев Б. В. О быстросходящихся итерационных методах с расщеплением граничных условий для многомерной системы типа Стокса. Периодические “течения” между параллельными стенками // Докл. РАН. 1992. Т. 325. №5. С. 926–931.
- [2] Пальцев Б. В. О быстросходящихся итерационных методах с неполным расщеплением граничных условий для многомерной сингулярно возмущенной системы типа Стокса // Матем. сб. 1994. Т. 185. №4. С. 101–150.
- [3] Пальцев Б. В. О быстросходящихся итерационных методах с полным расщеплением граничных условий для многомерной сингулярно возмущенной системы типа Стокса // Матем. сб. 1994. Т. 185. №9. С. 109–138.
- [4] Абрамов А. А., Ульянова В. И. Об одном методе решения уравнения типа бигармонического с сингулярно входящим малым параметром // ЖВММФ. 1992. Т. 32. №4. С. 567–575.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [6] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
- [7] Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: ИЛ, 1949.
- [8] Olver F. W. J. The asymptotic expansion of Bessel functions of large order // Philos. Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1954. V. 247. P. 328–368.
- [9] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
- [10] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.