Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Попов, Короткодействующий потенциал и модель теории расширений операторов для резонатора с полупрозрачной границей, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 5, 703–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:38:09

УДК 517.9

КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ И МОДЕЛЬ ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА С ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ

И. Ю. Попов

Построена основанная на теории расширений операторов модель квантовой точки как резонатора с полупрозрачной границей. Доказано, что модельный оператор есть предел (в резольвентном смысле) короткодействующих гамильтонианов.

Библиография: 13 названий.

Введение. Развитие микроэлектроники в последнее время привело к необходимости изучения нанoeлектронных мезоскопических структур. Их описание часто сводится к анализу распространения электронной волны в квантовом волноводе (т.е. с математической точки зрения к рассмотрению оператора Гельмгольца для волновода) или к исследованию транспортных свойств так называемой двухбарьерной структуры (т.е. к анализу оператора Шредингера с короткодействующими потенциалами). В рамках указанного подхода было описано (и даже предсказано) много интересных явлений в наноструктурах (см., например, [1]–[4]). Следует подчеркнуть, что исследование сложных волноводных и двухбарьерных структур наталкивается на значительные трудности. Поэтому представляется чрезвычайно полезным конструирование моделей (особенно явно решаемых), которые позволяли бы эффективно описывать данные системы. Соответствующая модель может быть построена в рамках теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Она аналогична известному методу потенциалов нулевого радиуса в квантовой механике [1], [5] и модели щелей нулевой ширины в теории дифракции [6], [7]. Модель теории расширений для двухбарьерной структуры как резонатора с полупрозрачной границей предложена в [8]. Однако важный вопрос о выборе параметров модели (т.е. о степени ее реалистичности) был открытым. Настоящая статья отвечает на этот вопрос. А именно, указан способ выбора расширений, при котором модельный оператор является пределом короткодействующих гамильтонианов. Следует отметить наличие других интересных подходов к этой проблеме [9]–[11], которые имеют ряд общих черт с нашей моделью. В процессе обоснования нашей модели мы использовали некоторые идеи доказательств из [11].

1. Описание модели. Опишем кратко модель теории расширений для резонатора с полупрозрачной поверхностью, предложенную в [8]. Пусть Ω^{in} – область в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$)

Работа выполнена при поддержке Комиссии при Европейском Сообществе (EC-Russia Collaboration Contract № ECRU002), Госкомитета РФ по высшей школе, грант № 94-2.7-1067, фонда Сороса и АЕН РФ.

с гладкой границей, $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^{\text{in}}}$ (или $\Omega^{\text{ex}} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^{\text{in}}}$). Пусть $\Delta_0^{\text{in}}, \Delta_0^{\text{ex}}$ – операторы Лапласа в $\Omega^{\text{in}}, \Omega^{\text{ex}}$, определенные на множествах гладких функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$. Оператор $-\Delta_0 = -(\Delta_0^{\text{in}} \oplus \Delta_0^{\text{ex}})$ симметричен и имеет индексы дефекта (∞, ∞) . Далее мы будем иметь дело только с простейшими самосопряженными расширениями, которые определяются наличием конечномерной связи между предельными значениями функций и их нормальных производных на двух сторонах границы [8].

ТЕОРЕМА 1. *Существует два семейства $-\Delta_A, -\Delta_B$ самосопряженных расширений оператора $-\Delta_0$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} -\Delta_{A,B}u &= -\Delta u \quad \text{для } u \in D(-\Delta_{A,B}), \\ D(-\Delta_{A,B}) &= \left\{ u : u \in H^1(\mathbb{R}^3) \text{ (или } H^1(\mathbb{R}^2)), u \in H^2(\Omega^{\text{in}}), u \in H^2(\Omega^{\text{ex}}), \right. \\ &\quad \text{для } -\Delta_A : \left(\begin{array}{c} -\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{in}} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ex}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ie} \\ a_{ei} & a_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \Big|_{\text{in}} \\ u \Big|_{\text{ex}} \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega}, \\ &\quad \left. \text{для } -\Delta_B : \left(\begin{array}{c} u \Big|_{\text{in}} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ex}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{ie} \\ b_{ei} & b_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{in}} \\ u \Big|_{\text{ex}} \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь A (соответственно B) – эрмитовы матрицы, H^s – пространство Соболева.

2. Модель полупрозрачной поверхности и короткодействующий потенциал. Далее мы фиксируем одно конкретное расширение A -типа со следующей матрицей: $a_{ii} = a_{ee} = a_{ie} = a_{ei} = 4^{-1}q(x)$, где $q(x)$ – фиксированная гладкая функция на $\partial\Omega$. Отметим, что предположение о гладкости q сделано для упрощения изложения и не является необходимым. Легко видеть, что это расширение отвечает следующим граничным условиям:

$$u|_{\text{in}} = u|_{\text{ex}}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ex}} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{in}} = q(x)u|_{\text{in}}.$$

Мы покажем, что именно это расширение является наиболее “естественным” в смысле теоремы 2 (см. ниже).

В этом разделе мы будем иметь дело только с двумерным случаем (это связано с тем, что основным приложением является описание двумерных мезоскопических структур в нанoeлектронике), однако результаты сохраняются с малыми изменениями и для трехмерного случая. Будем считать, что Ω^{in} – звездная (относительно начала координат) область с гладкой границей Γ , которая задается следующим уравнением в полярных координатах: $r = P(\varphi)$, $P(\varphi) > 0$. Иногда мы будем использовать модификационные полярные координаты (τ, φ) , где $\tau = r/P(\varphi)$.

Введем следующий короткодействующий потенциал $Q_\varepsilon(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и ρ ($\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$) – фиксированная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\rho(t) \geq 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, \quad \text{supp } \rho \subset [-1, 1], \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt = 1.$$

Функцию Q_ε определяем следующим образом:

$$Q_\varepsilon(\tau, \varphi) = \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) q(1, \varphi).$$

Пусть H – наше фиксированное расширение с областью определения

$$D(H) = \left\{ u : u \in H^1(\mathbb{R}^2), u \in H^2(\Omega^{\text{in,ex}}), u|_{\text{in}} = u|_{\text{ex}}, \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ex}} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{in}} = q(x)u|_{\text{in}} \right\},$$

H_0 – оператор Лапласа $-\Delta$ с областью определения $H^2(\mathbb{R}^2)$, и $H_\varepsilon = H_0 + Q_\varepsilon$ (с той же областью определения). Обозначим $R(\lambda)$, $R_0(\lambda)$, $R_\varepsilon(\lambda)$ соответствующие резольвенты. Наша основная цель – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Для достаточно больших $|\lambda|$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) резольвенты $R_\varepsilon(\lambda)$ сходятся к резольвенте $R(\lambda)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в банаховом пространстве $B(L_2(\mathbb{R}^2), H^1(\mathbb{R}^2))$ ограниченных линейных операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^2)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Предположим, что $P(\varphi)$ непрерывно дифференцируема и

$$\begin{aligned} \alpha &= \min_{\varphi \in [0, 2\pi]} \{P(\varphi)((P'(\varphi))^2 + (P(\varphi))^2)^{-1/2}\} > 0, \\ \beta &= \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \{((P'(\varphi))^2 + (P(\varphi))^2)^{1/2}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

ЛЕММА 1. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для любого u из $H^1(\mathbb{R}^2)$ имеет место следующее неравенство:*

$$\|Tu\|_{L_2(\Gamma_\tau)}^2 \leq \alpha^{-1}\varepsilon \|\nabla u\|^2 + \alpha^{-1}\varepsilon^{-1} \|u\|^2.$$

Здесь Γ_τ – поверхность, задаваемая условием $\tau = \text{const}$ ($\Gamma = \Gamma_1$), T – оператор, переводящий функцию из $H^1(\mathbb{R}^2)$ в ее след в $L_2(\Gamma_\tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для бесконечно дифференцируемых функций u с компактными носителями, поскольку указанное множество функций плотно в $H^1(\mathbb{R}^2)$ и T – ограниченный оператор. Пусть $\varepsilon > 0$. Очевидно, что $2|pq| \leq \varepsilon|p|^2 + \varepsilon^{-1}|q|^2$. Следовательно, для всякого φ получаем

$$\begin{aligned} |u(\tau P(\varphi), \varphi)|^2 &= -2 \text{Re} \int_{\tau P(\varphi)}^\infty \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \overline{u(r, \varphi)} dr \\ &\leq \varepsilon \int_{\tau P(\varphi)}^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 dr + \varepsilon^{-1} \int_{\tau P(\varphi)}^\infty |u(r, \varphi)|^2 dr \\ &\leq \varepsilon \int_{\tau P(\varphi)}^\infty \frac{r}{\tau P(\varphi)} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 dr + \varepsilon^{-1} \int_{\tau P(\varphi)}^\infty \frac{r}{\tau P(\varphi)} |u(r, \varphi)|^2 dr. \end{aligned}$$

Умножая обе части на $\tau P(\varphi)$, используя неравенство

$$P(\varphi) \geq \alpha((P'(\varphi))^2 + (P(\varphi))^2)^{1/2}$$

и интегрируя по φ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha \int_{\Gamma_\tau} |u(x)|^2 dS_x &\leq \varepsilon \int_{\Omega_\tau^{\text{ex}}} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) \right|^2 dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_\tau^{\text{ex}}} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + \varepsilon^{-1} \|u\|^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть $\tau > 0$ и u из класса Шварца $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \alpha^{-1/2} \tau^{-1/2} \|u\|_{H^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма является простым следствием предыдущей. Полагая в неравенстве из леммы 1 $\varepsilon = 1$, находим

$$\tau \|u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \alpha^{-1} \|u\|_{H^1}^2.$$

ЛЕММА 3. Пусть $u \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^2)$. Тогда

$$\|u(\tau, \cdot) - u(\tau', \cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq (\beta|\tau - \tau'|(\min\{\tau, \tau'\})^{-1})^{1/2} \|u\|_{H^1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для случая $0 < \tau' < \tau$. По неравенству Шварца для любого φ имеем

$$\begin{aligned} |u(\tau, \varphi) - u(\tau', \varphi)|^2 &= \left| \int_{\tau'P}^{\tau P} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) dr \right|^2 \leq P(\tau - \tau') \int_{\tau'P}^{\tau P} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 dr \\ &\leq (\tau - \tau')(\tau')^{-1} \int_{\tau'P}^{\tau P} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 r dr. \end{aligned}$$

Умножая на $((P'(\varphi))^2 + (P(\varphi))^2)^{1/2}$ и принимая во внимание (1), интегрированием по φ получаем

$$\begin{aligned} \|u(\tau, \cdot) - u(\tau', \cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 &\leq \beta(\tau - \tau')(\tau')^{-1} \int_{\Omega_\tau^{\text{in}} \setminus \Omega_{\tau'}^{\text{in}}} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) \right|^2 dx \\ &\leq \beta(\tau - \tau')(\tau')^{-1} \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим F_{Γ_τ} следующее преобразование в $L_2(\Gamma_\tau)$:

$$(F_{\Gamma_\tau} u)(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma_\tau} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dS_x, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим $L_2^s(\mathbb{R}^2)$ следующее пространство:

$$L_2^s(\mathbb{R}^2) = \{u(x) : (1 + |x|^2)^{s/2} u(x) \in L_2(\mathbb{R}^2)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{L_2^s(\mathbb{R}^2)} = \|(1 + |\cdot|^2)^{s/2} u\|.$$

ЛЕММА 4. Пусть $s > 2^{-1}$. Тогда существует константа $C = C(\tau, s)$ такая, что

$$\|F_{\Gamma_\tau} u\|_{L_2^{-s}(\mathbb{R}^2)} \leq C \|u\|_{L_2(\Gamma_\tau)} \quad \text{для любого } u \in L_2(\Gamma_\tau).$$

Доказательство получается простой модификацией соответствующего утверждения в [12].

ЛЕММА 5. Пусть r и r' положительны. Тогда для любой $u \in L_2(\Gamma_1)$

$$\|(F_\Gamma u)(r \cdot) - (F_\Gamma u)(r' \cdot)\|_{L_2^{-1}(\mathbb{R}^2)} \leq (\beta|r - r'|(\min\{r, r'\})^{-1})^{1/2} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для $f \in \mathfrak{G}(\mathbb{R}^2)$, $u \in L_2(\Gamma_1)$ интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\xi f(\xi) \overline{((F_\Gamma u)(r\xi) - (F_\Gamma u)(r'\xi))} = \int_{\Gamma_1} dx ((F^* f)(rx) - (F^* f)(r'x)) \overline{u(x)},$$

где F^* – обратное преобразование Фурье. По неравенству Шварца и лемме 3 имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^2} d\xi f(\xi) \overline{((F_\Gamma u)(r\xi) - (F_\Gamma u)(r'\xi))} \right| \\ & \leq \|(F^* f)(r \cdot) - (F^* f)(r' \cdot)\|_{L_2(\Gamma_1)} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ & \leq (\beta|r - r'|(\min\{r, r'\})^{-1})^{1/2} \|F^* f\|_{H^1} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ & \leq (\beta|r - r'|(\min\{r, r'\})^{-1})^{1/2} \|(1 + |\cdot|^2)f(\cdot)\| \cdot \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ & \leq (\beta|r - r'|(\min\{r, r'\})^{-1})^{1/2} \|f\|_{L_2^1(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

Утверждение леммы есть простое следствие этого неравенства, поскольку $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $L_2^1(\mathbb{R}^2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим M следующий оператор из $L_2(\Gamma_1)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$Mu(x) = -\frac{i}{4} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(k|x - y|) q(y) u(y) dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Известно [13], что если $\text{Im } k > 0$, то M – ограниченный оператор.

ЛЕММА 6. Пусть ε, s, λ таковы, что $0 < \varepsilon < 2^{-1}$, $2^{-1} < s < 1$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Тогда существует постоянная $C_1 = C_1(s)$, не зависящая от ε и λ , такая, что имеем оценку для нормы в пространстве $B(H^1(\mathbb{R}^2))$ ограниченных операторов в $H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\|R_0(\lambda)Q_\varepsilon\|_{B(H^1(\mathbb{R}^2))} \leq C_1 \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^{1+s} ||\xi|^2 - \lambda|^{-2}\} \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой $u \in \mathfrak{G}(\mathbb{R}^2)$ имеем

$$\begin{aligned} (FR_0(\lambda)Q_\varepsilon u)(\xi) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} dx e^{-i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^2} dy \frac{i}{4\varepsilon} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) q(1, \varphi) u(y) H_0^{(1)}(k|x - y|) \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} dy e^{-i\xi \cdot y} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) q(1, \varphi) u(y) (|\xi|^2 - \lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь ветвь корня $\lambda^{1/2} = k$ выбрана так, что $\text{Im } k \geq 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \|R_0(\lambda)Q_\varepsilon u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2) \left| \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) (|\xi|^2 - \lambda)^{-1} (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(\tau, \cdot))) (\tau\xi) \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь

$$q_e(1, \varphi) = q(1, \varphi) P^2(\varphi) ((P'(\varphi))^2 + (P(\varphi))^2)^{-1/2}.$$

Из неравенства Шварца и теоремы Фубини получаем

$$\begin{aligned} \|R_0(\lambda) Q_\varepsilon u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2) \|\xi|^2 - \lambda|^{-2} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \tau^2 \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) \\ &\quad \times \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))) (\tau\xi)|^2 \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^{1+s} \|\xi|^2 - \lambda|^{-2} \} (1 + \varepsilon)^2 \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-s} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))) (\tau\xi)|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Заменяя переменные $\eta = \tau\xi$, находим

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-s} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))) (\tau\xi)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d\eta (1 + \tau^{-2} |\eta|^2)^{-s} \tau^{-2} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))) (\eta)|^2. \end{aligned}$$

Используя очевидное неравенство

$$(1 + \tau^{-2} |\eta|^2)^{-s} \leq \max\{\tau^{2s}, 1\} (1 + |\eta|^2)^{-s}$$

(для $s > 0$ и $\tau > 0$), получаем по леммам 2 и 4

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-s} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))) (\tau\xi)|^2 \\ &\leq \tau^{-2} \max\{\tau^{2s}, 1\} \|F_\Gamma(q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot))\|_{L_2^{-s}(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq \tau^{-2} \max\{\tau^{2s}, 1\} C^2 \|q_e(1, \cdot) u(\tau, \cdot)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq \alpha^{-1} \tau^{-3} \max\{\tau^{2s}, 1\} C^2 \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)|\right)^2 \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где C дано в лемме 4. Так как $0 < \varepsilon \leq 2^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} \|R_0(\lambda) Q_\varepsilon u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^{1+s} \|\xi|^2 - \lambda|^{-2} \} C^2 \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)|\right)^2 \|u\|_{H^1}^2 (1 + \varepsilon)^2 \\ &\quad \times \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) \alpha^{-1} \tau^{-4} \max\{\tau^{2s}, 1\} \\ &\leq C_1^2(s) \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^{1+s} \|\xi|^2 - \lambda|^{-2} \} \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

где $C_1(s)$ не зависит от ε ($0 < \varepsilon \leq 2^{-1}$). Это неравенство и приводит к утверждению леммы, поскольку $R_0(\lambda)$ – ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R}^2)$ в $H^1(\mathbb{R}^2)$ и $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $H^1(\mathbb{R}^2)$.

ЛЕММА 7. Пусть ε, s, λ таковы, что $0 < \varepsilon \leq 2^{-1}$, $2^{-1} < s < 1$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Тогда существует постоянная $C_2 = C_2(s, \lambda)$, не зависящая от ε , такая, что

$$\|R_0(\lambda)Q_\varepsilon + MT\|_{B(H^1(\mathbb{R}^2))} \leq C_2\varepsilon^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя аналогично предыдущему доказательству, получаем для любой функции из класса Шварца

$$(FMTu)(\xi) = -(|\xi|^2 - \lambda)^{-1}(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\xi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & (F(R_0(\lambda)Q_\varepsilon + MT)u)(\xi) \\ &= (|\xi|^2 - \lambda)^{-1} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau (\tau - 1)\varepsilon^{-1}\rho\left(\frac{\tau - 1}{\varepsilon}\right) (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(\tau, \cdot)))(\tau\xi) \\ & \quad + (|\xi|^2 - \lambda)^{-1} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1}\rho\left(\frac{\tau - 1}{\varepsilon}\right) (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)(u(\tau, \cdot) - u(1, \cdot))))(\tau\xi) \\ & \quad + (|\xi|^2 - \lambda)^{-1} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1}\rho\left(\frac{\tau - 1}{\varepsilon}\right) \\ & \quad \times \left((F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\tau\xi) - (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\xi) \right) \\ &= A_0(\xi) + A_1(\xi) + A_2(\xi). \end{aligned}$$

Необходимо оценить $L_2^1(\mathbb{R}^2)$ -нормы A_0 , A_1 и A_2 . Действуя как при выводе (2), находим

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)|A_0(\xi)|^2 \leq \varepsilon^2 b_0 \|u\|_{H^1}^2, \quad (4)$$

где b_0 – постоянная, не зависящая от ε ($0 \leq \varepsilon \leq 2^{-1}$). Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)|A_1(\xi)|^2 &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \left\{ (1 + |\xi|^2)^{1+s} ||\xi|^2 - \lambda|^{-2} \right\} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1}\rho\left(\frac{\tau - 1}{\varepsilon}\right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-s} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)(u(\tau, \cdot) - u(1, \cdot))))(\tau\xi)|^2. \end{aligned}$$

Соотношение (3) и лемма 3 приводят к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-s} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)(u(\tau, \cdot) - u(1, \cdot))))(\tau\xi)|^2 \\ & \leq \tau^{-2} \max\{\tau^{2s}, 1\} C^2 \|q_e(1, \cdot)(u(\tau, \cdot) - u(1, \cdot))\|_{L_2(\Gamma)} \\ & \leq \tau^{-2} \max\{\tau^{2s}, 1\} C^2 \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)| \right)^2 |\tau - 1| \beta (\min\{\tau, 1\})^{-1} \|u\|_{H^1}^2 \\ & \leq \varepsilon \beta (1 + \varepsilon)^{2s} (1 - \varepsilon)^{-4} \alpha^{-1} C^2 \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)| \right)^2 \|u\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

потому, что $\tau \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Следовательно, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)|A_1(\xi)|^2 \leq \varepsilon b_1 \|u\|_{H^1}^2, \quad (5)$$

где b_1 – постоянная, не зависящая от ε ($0 < \varepsilon \leq 2^{-1}$).

Для оценки нормы A_2 , принимаем во внимание, что

$$|A_2(\xi)|^2 \leq ||\xi|^2 - \lambda|^{-2} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \times \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\tau\xi) - (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\xi)|^2.$$

Используя теорему Фубини, приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2) |A_2(\xi)|^2 \\ & \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^2 ||\xi|^2 - \lambda|^{-2}\} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2)^{-1} |(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\tau\xi) - (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\xi)|^2 \\ & \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{(1 + |\xi|^2)^2 ||\xi|^2 - \lambda|^{-2}\} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\tau \varepsilon^{-1} \rho\left(\frac{\tau-1}{\varepsilon}\right) \\ & \quad \times \|(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\tau \cdot) - (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\cdot)\|_{L^{-1}(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

Из лемм 5 и 2 следует, что

$$\begin{aligned} & \|(F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\tau \cdot) - (F_\Gamma(q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)))(\cdot)\|_{L_2^{-1}(\mathbb{R}^2)} \\ & \leq |\tau - 1| \beta (\min\{\tau, 1\})^{-1} \|q_e(1, \cdot)u(1, \cdot)\|_{L_2(\Gamma)} \\ & \leq \alpha^{-1} \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)| \right)^2 |\tau - 1| \beta (\min\{\tau, 1\})^{-1} \|u\|_{H^1}^2 \\ & \leq \varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1} \alpha^{-1} \left(\max_{x \in \Gamma} |q_e(x)| \right)^2 \beta \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

для $\tau \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Таким образом, приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\xi (1 + |\xi|^2) |A_2(\xi)|^2 \leq \varepsilon b_2 \|u\|_{H^1}^2, \quad (6)$$

где b_2 – постоянная, не зависящая от ε ($0 < \varepsilon \leq 2^{-1}$). Объединяя (4)–(6) и учитывая, что MT есть ограниченный оператор в $H^1(\mathbb{R}^2)$ и $\mathfrak{G}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $H^1(\mathbb{R}^2)$, приходим к утверждению леммы.

Теперь уже просто доказать основную теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме о замкнутом графике $R_\varepsilon(\lambda)$ и $R(\lambda)$ есть ограниченные операторы из $L_2(\mathbb{R}^2)$ в $H^2(\mathbb{R}^2)$ и $H^1(\mathbb{R}^2)$, соответственно. Используем следующие резольвентные тождества (см., например, [10], [11]):

$$R_0(\lambda) - R_\varepsilon(\lambda) = R_0(\lambda) Q_\varepsilon R_\varepsilon(\lambda), \quad R(\lambda) - R_0(\lambda) = MTR(\lambda).$$

Следовательно,

$$R_\varepsilon(\lambda) - R(\lambda) = -R_0(\lambda) Q_\varepsilon (R_\varepsilon(\lambda) - R(\lambda)) - (R_0(\lambda) Q_\varepsilon + MT) R(\lambda).$$

Пусть регулярное значение λ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$) столь далеко от начала координат, что

$$C_1 \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \{ (1 + |\xi|^2)^{1+s} ||\xi|^2 - \lambda|^{-2} \} \right)^{1/2} < \frac{1}{2}.$$

Это возможно из-за условия $2^{-1} < s < 1$. Тогда для всякой $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ имеем по леммам 6 и 7:

$$\begin{aligned} \|R_\varepsilon(\lambda)u - R(\lambda)u\|_{H^1} &\leq \|R_0(\lambda)Q_\varepsilon(R_\varepsilon(\lambda)u - R(\lambda)u)\|_{H^1} + \|(R_0(\lambda)Q_\varepsilon + MT)R(\lambda)u\|_{H^1} \\ &\leq 2^{-1}\|R_\varepsilon(\lambda)u - R(\lambda)u\|_{H^1} + \varepsilon^{1/2}C_2\|R(\lambda)u\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|R_\varepsilon(\lambda)u - R(\lambda)u\|_{H^1} \leq 2\varepsilon^{1/2}C_2\|R(\lambda)u\|_{H^1} \leq 2\varepsilon^{1/2}C_2\|R(\lambda)\|_{B(L_2(\mathbb{R}^2), H^1(\mathbb{R}^2))}\|u\|.$$

Это неравенство и дает требуемый результат.

Автор благодарен П. Дюкло, обратившему его внимание на эту задачу и рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Kron R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 1988.
- [2] Krivan A. M., Ruden P. P. Electron transfer between regions of quasi-two-dimensional and three-dimensional dynamics in semiconductor microstructures // Phys. Rev. B. 1985. V. 32. № 12. P. 8013–8020.
- [3] Popov I. Yu., Popova S. L. The extension theory and resonances for a quantum waveguide // Phys. Lett. A. 1993. V. 173. P. 484–488.
- [4] Sols F. Scattering, dissipation, and transport in mesoscopic systems // Ann. Physics. 1992. V. 214. № 2. P. 386–438.
- [5] Павлов Б. С. Теория расширений и явно решаемые модели // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131.
- [6] Popov I. Yu. The extension theory and diffraction problems // Lecture Notes in Phys. 1989. V. 324. P. 218–229.
- [7] Popov I. Yu. The resonator with narrow slit and the model based on the operator extensions theory // J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 11. P. 3794–3801.
- [8] Popov I. Yu. The extension theory and the opening in semitransparent surface // J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 5. P. 1685–1689.
- [9] Antoine J. P., Gesztesy F., Shabani J. Exactly solvable models of sphere interactions in quantum mechanics // J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 3687–3712.
- [10] Ikebe T., Shimada S. Spectral and scattering theory for the Schrödinger operators with penetrable wall potentials // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31. № 1. P. 219–258.
- [11] Shimada S. The approximation of the Schrödinger operators with penetrable wall potentials in terms of short range Hamiltonians // J. Math. Kyoto Univ. 1992. V. 32. № 3. P. 583–592.
- [12] Mochizuki K. Scattering Theory for the Wave Equation. Tokyo: Kinokuniya, 1984.
- [13] Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции // Приложение к книге Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.