Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана, *Матем. заметки*, 2016, том 100, выпуск 4, 492–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 04:39:21

Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, число $0 < p < \infty$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ – пространство интегрируемых (относительно τ) со степенью p операторов. Пусть P, Q – τ -измеримые идемпотенты и $A \equiv P - Q$. Тогда 1) если $A \geq 0$, то A – проектор и $QA = AQ = 0$; 2) если P квазинормален, то P – проектор; 3) если $Q \in \mathcal{M}$ и $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

Пусть натуральное число $n > 2$ и $A = A^n \in \mathcal{M}$. Тогда 1) если $A \neq 0$, то перестановка $\mu_t(A)$ принимает значения в множестве $\{0\} \cup [\|A^{n-2}\|^{-1}, \|A\|]$ для всех $t > 0$; 2), либо $\mu_t(A) \geq 1$ для всех $t > 0$, либо существует такое $t_0 > 0$, что $\mu_t(A) = 0$ для всех $t > t_0$. Для каждого τ -измеримого идемпотента Q существует единственный ранговый проектор $P \in \mathcal{M}$ с $QP = P$, $PQ = Q$ и $P\mathcal{M} = Q\mathcal{M}$. Существует единственное разложение $Q = P + Z$, где $Z^2 = 0$ и $ZP = 0$, $PZ = Z$. При этом если $Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то P интегрируем и для $p = 1$ имеем $\tau(Q) = \tau(P)$. Если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ с $A = A^3$ и $A - A^2 \in \mathcal{M}$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, τ -измеримый оператор, перестановка, τ -компактный оператор, интегрируемый оператор, квазинормальный оператор, идемпотент, проектор, ранговый проектор.

DOI: 10.4213/mzm11033

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, число $0 < p < \infty$ и $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ – пространство интегрируемых (относительно τ) со степенью p операторов. В работе получены следующие результаты об алгебраических и порядковых свойствах следа τ и элементов $*$ -алгебры $\mathcal{M}$ всех τ -измеримых операторов.

Пусть $P, Q \in \mathcal{M}$ – идемпотенты. Если $A \equiv P - Q \geq 0$, то A – проектор и $QA = AQ = 0$ (теорема 2.5); если P квазинормален, то P – проектор (теорема 2.10). Если $Q \in \mathcal{M}$ – идемпотент и $A \equiv P - Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ (теорема 2.30). Если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ с $A = A^3$ и $A - A^2 \in \mathcal{M}$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$ (следствие 2.31).

Пусть натуральное число $n > 2$. Если $A \in \mathcal{M}$ и $0 \neq A = A^n$, то перестановка $\mu_t(A)$ принимает значения в множестве $\{0\} \cup [\|A^{n-2}\|^{-1}, \|A\|]$ для всех $t > 0$ (теорема 2.13).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 15-41-02433) и правительством Республики Татарстан.

Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ – идеал τ -компактных операторов в $\widetilde{\mathcal{M}}$, $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ – идеал элементарных операторов в $\mathcal{M}$. Если $A = A^n \in \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ (следствие 2.14).

Пусть $A = A^n \in \mathcal{M}$. Тогда либо $\mu_t(A) \geq 1$ для всех $t > 0$ (при $A \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$), либо существует такое $t_0 > 0$, что $\mu_t(A) = 0$ для всех $t > t_0$ (при $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$) (следствие 2.15).

Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. В теореме 2.18 доказано, что $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ тогда и только тогда, когда вещественная часть A^2 и мнимая часть A лежат в $\mathcal{M}_0$. Аналогичное утверждение справедливо и для идеала $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ (теорема 2.19).

Для каждого идемпотента $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}$ существует единственный проектор $P \in \mathcal{M}$ с $QP = P$, $PQ = Q$ и $P\mathcal{M} = Q\mathcal{M}$ (теорема 2.21; такой проектор мы называем *ранговым*). Существует единственное разложение $Q = P + Z$, где $Z^2 = 0$ и $ZP = 0$, $PZ = Z$ (теорема 2.23). При этом если $Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $P \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ и для $p = 1$ имеем $\tau(Q) = \tau(P)$ (теорема 2.25).

Пусть $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $P \in \mathcal{M}$ – идемпотент и $Z = XP - PX$. Если $Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(Z) = 0$ (теорема 2.26). Пусть натуральное число $n \geq 2$, $P \in \mathcal{M}$ с $P^n = P$ и $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ такие, что $AP + PA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ для некоторого $0 < p < \infty$. Тогда

- (i) операторы $T_k = P^k A - P^k A P^{n-1}$, $S_k = AP^k - P^{n-1} A P^k$ лежат в $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и при $p = 1$ имеем $\tau(T_k) = \tau(S_k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, n-1$;
- (ii) если n четно, то $AP, PA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ (следствие 2.27).

Пусть $0 < p < \infty$, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $P, Q \in \mathcal{M}$ – идемпотенты с $PQ = QP = 0$, $B = P - Q$. Тогда

$$AB - BA \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \iff AP - PA, AQ - QA \in L_p(\mathcal{M}, \tau);$$

при этом для $p = 1$ имеем

$$\tau(AB - BA) = \tau(AP - PA) = \tau(AQ - QA) = 0$$

(следствие 2.28).

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Пусть $\mathcal{A}$ – кольцо с единицей I , $\mathcal{A}^{\text{id}} \equiv \{X \in \mathcal{A} : X = X^2\}$ и $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$.

Отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathcal{M}^+$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$.

Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{M}^+ : \varphi(X) < +\infty\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}_\varphi = \text{lin}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+.$$

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Самосопряженный оператор

присоединен к $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все проекторы из его спектрального разложения единицы принадлежат $\mathcal{M}$.

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется τ -измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [1], [2]. Для семейства $\mathcal{L} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^{\text{sa}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $\widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, порожденный собственным конусом $\mathcal{M}^+$, будем обозначать через $\leq$.

Если X – замкнутый плотно заданный линейный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и $|X| = \sqrt{X^*X}$, то спектральное разложение $P^{|X|}(\cdot)$ содержится в $\mathcal{M}$ и $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) < +\infty$. Если $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $X = U|X|$ – полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$. При этом если $|X| = \int_0^\infty \lambda P^{|X|}(d\lambda)$ – спектральное разложение, то

$$\tau(P^{|X|}((\lambda, +\infty))) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Через $\mu_t(X)$ обозначим *перестановку* оператора $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu_t(X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Множество τ -компактных операторов

$$\widetilde{\mathcal{M}}_0 = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(X) = 0\}$$

является идеалом в $\widetilde{\mathcal{M}}$ [3]. Множество элементарных операторов

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{M} : \mu_t(X) = 0 \text{ для некоторого } t > 0\}$$

является идеалом в $\mathcal{M}$.

Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$ некоммукативное L_p -пространство Лебега, $0 < p < \infty$, может быть определено как $L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \widetilde{\mathcal{M}} : \mu(X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$ с F -нормой (нормой для $1 \leq p < \infty$) $\|X\|_p = \|\mu(X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Ограничение $\tau|_{\mathcal{M}_\tau^+}$ продолжается до линейного ограниченного функционала на $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, который будем обозначать той же буквой τ . Имеем

$$\mathcal{M}_\tau = \mathcal{M} \cap L_1(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset L_p(\mathcal{M}, \tau) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{для всех} \quad 0 < p < \infty.$$

ЛЕММА 1.1 [3]–[5]. Пусть $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда

- 1) $\mu_t(X) = \mu_t(|X|) = \mu_t(X^*)$ для всех $t > 0$;
- 2) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu_t(X) \leq \mu_t(Y)$ для всех $t > 0$;
- 3) $\mu_t(f(|X|)) = f(\mu_t(X))$ для всех непрерывных возрастающих $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $t > 0$;
- 4) если $X \in \mathcal{M}$, то $\mu_t(XY) \leq \|X\| \mu_t(Y)$ для всех $t > 0$.

ЛЕММА 1.2 [6; с. 720]. Если $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то из неравенства $X \leq Y$ следует, что $ZXZ^* \leq ZYZ^*$.

ЛЕММА 1.3 [7; теорема 17]. Если $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $AB, BA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(AB) = \tau(BA)$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \text{tr}$ – канонический след, то $\widetilde{\mathcal{M}}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ совпадают с идеалами компактных операторов и конечномерных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu_t(X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел оператора X [8; с. 46]; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$.

2. Алгебраические свойства τ -измеримых операторов и следа. Следующие утверждения, возможно, известны специалистам, но нам не удалось найти соответствующие ссылки. Поэтому мы приводим схемы их доказательств.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ – кольцо и $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) элемент $(P - Q)^2$ коммутирует с P и Q ;
- (ii) если $A \in \mathcal{A}$ и $A^n = A$ для некоторого $n \geq 2$, то $A^{n-1} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) Имеем $(A^{n-1})^2 = A^{2n-2} = A^n A^{n-2} = A A^{n-2} = A^{n-1}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть J – идеал в кольце $\mathcal{A}$ и $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда

- (i) если $AB - BA \in J$, то $A^k B^n - B^n A^k \in J$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$;
- (ii) если $AB + BA \in J$, то $A^k B^{2n} - B^{2n} A^k, A^{2k-1} B^{2n-1} + B^{2n-1} A^{2k-1} \in J$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = 1$. Воспользуемся методом математической индукции по числу n .

- (i) Имеют место формулы

$$\begin{aligned} B^{2n} A - A B^{2n} &= B^n (B^n A - A B^n) + (B^n A - A B^n) B^n, \\ B^{2n+1} A - A B^{2n+1} &= B^{n+1} (B^n A - A B^n) + (B^{n+1} A - A B^{n+1}) B^n, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Имеем $AB^2 - B^2 A = (AB + BA)B - B(AB + BA) \in J$, поэтому $AB^{2n} - B^{2n} A \in J$ для всех $n \in \mathbb{N}$ в силу п. (i). Далее работают формулы

$$B^{2n+1} A + A B^{2n+1} = B^{n+1} (B^n A + A B^n) + (B^{n+1} A - A B^{n+1}) B^n$$

для нечетного $n \in \mathbb{N}$ и

$$B^{2n+1} A + A B^{2n+1} = B^n (B^{n+1} A + A B^{n+1}) - (B^n A - A B^n) B^{n+1}$$

для четного $n \in \mathbb{N}$, которые доказывают утверждение для $k = 1$.

Для проверки п. (i) для произвольного $k \in \mathbb{N}$ введем обозначения $A_1 = B^n, B_1 = A$ и воспользуемся уже доказанным утверждением (для $A_1 B_1 - B_1 A_1 \in J$) п. (i) для $k = 1$. Аналогичным образом проверяется и п. (ii). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть J – идеал в кольце $\mathcal{A}$ и $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда

(i) если $B = P - Q$ с $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $PQ = QP = 0$, то

$$AB - BA \in J \iff AP - PA, AQ - QA \in J;$$

(ii) если $B^{2n} = B$ с некоторым $n \in \mathbb{N}$, то

$$AB + BA \in J \iff AB, BA \in J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Имеем $B^2 = P + Q$ и $B^3 = B$.

ПРИМЕР 2.4 (см. [9]). Пусть числа $0 < p, q < \infty$ и $a_n = 2^{n+1}n^{-q}$, $n \in \mathbb{N}$. Снабдим алгебру фон Неймана $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ точным нормальным конечным следом $\tau = \bigoplus_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \text{tr}_2$ и положим

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ и $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $pq > 1$, $A \notin L_p(\mathcal{M}, \tau)$ при $pq \leq 1$.

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $P, Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Если $A \equiv P - Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, то

$$A \in \mathcal{M}^{\text{pr}} \quad \text{и} \quad QA = AQ = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $P = Q + A$, имеем $P^2 = Q + QA + AQ + A^2 = Q + A$ и

$$QA + AQ = A - A^2. \quad (1)$$

Переходя к сопряженным в (1), получаем

$$Q^*A + AQ^* = A - A^2. \quad (2)$$

Из (1), (2) имеем

$$i(Q - Q^*)A + A \cdot i(Q - Q^*) = 0. \quad (3)$$

где $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$. Так как $i(Q - Q^*) \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$, то в силу [10; теорема 4.5] из (3) получаем $i(Q - Q^*)A = 0$. Поэтому

$$QA = Q^*A, \quad (4)$$

и, переходя здесь к сопряженным, имеем

$$AQ^* = AQ. \quad (5)$$

Умножив на AQ справа обе части (4), получаем $QA^2Q = Q^*A^2Q \geq 0$ в силу леммы 1.2. Из (1) имеем $Q(QA + AQ - A + A^2) = 0$, т.е. $QAQ + QA^2 = 0$. Из п. (i) леммы 2.1 получаем $QA^2 = Q^2A^2 = QA^2Q \geq 0$ и $0 \leq QA^2 = -QAQ$. В силу (4) имеем $QAQ = Q^*AQ \leq 0$. Так как $A \geq 0$, то $Q^*AQ \geq 0$ в силу леммы 1.2. Значит,

$$Q^*AQ = |A^{1/2}Q|^2 = 0$$

и $A^{1/2}Q = 0$. Тогда $AQ = A^{1/2} \cdot A^{1/2}Q = 0$. Из (5) получаем $AQ^* = 0$, поэтому $QA = (AQ^*)^* = 0$. Теперь из (1) имеем $A = A^2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $P, Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Если $A \equiv P - Q \leq 0$, то

$$-A \in \mathcal{M}^{\text{pr}} \quad \text{и} \quad PA = AP = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть $P, R \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Если $B \equiv P + R \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ и $B \geq I$, то $B - I \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $Q = I - R$ и $A = B - I$ имеем $P - Q = A \geq 0$ и работает теорема 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть $S, T \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $S^2 = T^2 = I$. Если $A \equiv S - T \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$, то $(1/2)A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $S = 2P - I$, $P \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$, задает биекцию между множествами идемпотентов и симметрий ($S^2 = I$).

Оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$; *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$; *квазинормальным*, если A перестановочен с A^*A , т.е. $A \cdot A^*A = A^*A \cdot A$.

ТЕОРЕМА 2.9. Каждый квазинормальный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ является гипонормальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ограниченных операторов утверждение является классическим, поскольку каждый квазинормальный оператор субнормален [11; задача 154], а каждый субнормальный оператор гипонормален [11; задача 160]. Поскольку это доказательство не обобщается на неограниченные τ -измеримые операторы, мы даем новое доказательство. Имеем

$$A^* \cdot A^*A = (A^*A \cdot A)^* = (A \cdot A^*A)^* = A^*A \cdot A^*,$$

т.е. A^* также перестановочен с A^*A . Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq (A^*A - AA^*)^2 = (A^*A)^2 + (AA^*)^2 - A^*A \cdot A \cdot A^* - A \cdot A^* \cdot A^*A \\ &= (A^*A)^2 + (AA^*)^2 - (AA^*)^2 - (AA^*)^2 = (A^*A)^2 - (AA^*)^2, \end{aligned}$$

т.е. $(A^*A)^2 \geq (AA^*)^2$. Отсюда в силу операторной монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, получаем $A^*A \geq AA^*$. Теорема доказана.

Всякая изометрия $A \in \mathcal{M}$ (т.е. $A^*A = I$) квазинормальна. Если $A \in \mathcal{M}$ изометрия, то A^n также изометрия для всех $n \in \mathbb{N}$. Следующее утверждение дополняет теорему 3.9 из [9].

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть натуральное число $n \geq 2$ и оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ такой, что $A = A^n$. Если A квазинормален, то A является частичной изометрией с $A^{n-1} = A^*A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} A^*A &= A^{*n}A^n = (A^*)^{n-1} \cdot A^*A \cdot A^{n-1} = (A^*)^{n-1}A^{n-1} \cdot A^*A \\ &= (A^*)^{n-2} \cdot A^*A \cdot A^{n-2} \cdot A^*A = (A^*)^{n-2}A^{n-2} \cdot (A^*A)^2 = \dots = (A^*A)^n \end{aligned}$$

и $A^*A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ в силу спектральной теоремы. Поэтому оператор A является частичной изометрией, причем $A = AA^*A$ [11; задача 98]. Последовательно получаем равенства

$$\begin{aligned} A &= A \cdot A^*A = A^*A^2, \\ A^2 &= A \cdot A^*A^2 = A^*A^3, \\ &\dots\dots\dots \\ A^{n-1} &= A \cdot A^*A^{n-1} = A^*A^n = A^*A. \end{aligned}$$

Поскольку оператор A^* также перестановочен с A^*A , имеем

$$A^* = A^*AA^* = A^*A^nA^* = A^*A \cdot A^{n-1}A^* = A^{n-1} \cdot A^*A \cdot A^* = A^{n-1}A^* \cdot A^*A,$$

т.е. $A^* = A^{n-1}A^* \cdot A^*A$. Умножив обе стороны последнего равенства слева на оператор A , получаем $AA^* = AA^* \cdot A^*A$. Так как $AA^*, A^*A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, имеем $A^*A \geq AA^*$.

Из задач 154 и 161 [11] следует, что оператор A представим в виде прямой суммы изометрии и нулевого оператора (одно из слагаемых прямой суммы может отсутствовать). Теорема доказана.

Из теоремы 3.11 [9] имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Если в условиях теоремы 2.10 $n = 3$, то $A \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ и $A = P - Q$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ с $PQ = 0$.

Из теоремы 2.2 [10] получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Если в условиях теоремы 2.10 оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то A нормален.

ТЕОРЕМА 2.13. Пусть натуральное число $n > 2$ и оператор $A \in \mathcal{M}$ такой, что $0 \neq A = A^n$. Тогда перестановка $\mu_t(A)$ принимает значения в множестве $\{0\} \cup [\|A^{n-2}\|^{-1}, \|A\|]$ для всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $A \in \mathcal{M}^{\text{id}}$ в силу п. 1) леммы 3.8 [12] имеем $\mu_t(A) \in \{0\} \cup [1, \|A\|]$ для всех $t > 0$. Если $A \in \mathcal{M}$ и $A = A^n$, то в силу п. (ii) леммы 2.1 получаем $A^{n-1} \in \mathcal{M}^{\text{id}}$. Поэтому

$$\mu_t(A^{n-1}) \in \{0\} \cup [1, \|A^{n-1}\|] \quad \text{для всех } t > 0. \quad (6)$$

В силу п. 4) леммы 1.1 имеем

$$\mu_t(A^{n-1}) \leq \|A^{n-2}\| \mu_t(A) = \|A^{n-2}\| \mu_t(A^n) \leq \|A^{n-2}\| \|A\| \mu_t(A^{n-1}) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Теперь утверждение теоремы следует из (6).

СЛЕДСТВИЕ 2.14. Если натуральное число $n \geq 2$ и $A = A^n \in \mathcal{M} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. В частности, $A \in \bigcap_{p>0} L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

Из леммы 3.8 [9] и теоремы 2.13 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Пусть натуральное число $n \geq 2$ и $A = A^n \in \mathcal{M}$. Тогда либо $\mu_t(A) \geq 1$ для всех $t > 0$ (при $A \notin \widetilde{\mathcal{M}}_0$), либо существует такое $t_0 > 0$, что $\mu_t(A) = 0$ для всех $t > t_0$ (при $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Приведем второе доказательство следствия 2.14 для $n = 2$. В силу леммы 3 [13] имеем $A = PT$ с $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и обратимым $T \in \mathcal{M}^+$. Тогда $P = AT^{-1} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и, поскольку $\mu_t(P) = \chi_{(0, \tau(P))}(t) \in \{0, 1\}$ для всех $t > 0$, имеем $\tau(P) < +\infty$ и $P \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Теперь $A = PT \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$.

ПРИМЕР 2.17. Для симметрии

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$$

имеем

$$\|A\| = s_1(A) = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} > 1, \quad s_2(A) = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} < 1.$$

Если $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$, то $\text{Re } A = (A + A^*)/2$, $\text{Im } A = (A - A^*)/(2i) \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{sa}}$ и

$$\begin{aligned} A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 &\iff \text{Re } A, \text{Im } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0, \\ A \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) &\iff \text{Re } A, \text{Im } A \in \mathcal{F}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Тогда

- (i) если $\text{Im } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ (или $\text{Re } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$), то $A^*A - AA^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$;
- (ii) имеют место эквивалентности

$$A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \iff \text{Re } A^2, \text{Im } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \iff \text{Re } A^2, \text{Re } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Это утверждение следует из равенств

$$A^*A - AA^* = A^*(A - A^*) - (A - A^*)A^* = A^*(A + A^*) - (A + A^*)A^*.$$

(ii) Импликация “ $\Rightarrow$ ” очевидна, проверим “ $\Leftarrow$ ”. Так как $\text{Im } A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, имеем $(A - A^*)^2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ и с учетом соотношения $2\text{Re } A^2 = A^2 + A^{*2} \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$ получаем $A^*A + AA^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, т.е. $\mu_t(A^*A + AA^*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу пп. 1), 2) и 3) леммы 1.1 имеем

$$0 \leq \mu_t(A)^2 = \mu_t(|A|)^2 = \mu_t(A^*A) \leq \mu_t(A^*A + AA^*) \quad \text{для всех } t > 0.$$

Поэтому $\mu_t(A) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Положим $B = iA$. Тогда $B \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \Leftrightarrow A \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$; имеем $\text{Re } B^2 = -\text{Re } A^2$ и $\text{Im } B = \text{Re } A$. Теорема доказана.

Аналогично устанавливается

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть $A \in \mathcal{M}$. Тогда

- (i) если $\text{Im } A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ (или $\text{Re } A \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$), то $A^*A - AA^* \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- (ii) имеют место эквивалентности

$$A \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \iff \text{Re } A^2, \text{Im } A \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \iff \text{Re } A^2, \text{Re } A \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.20. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Элемент $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ называется *ранговым проектором* для Q , если $QP = P$ и $PQ = Q$.

Ранговый проектор для Q , если он существует, будем обозначать через $Q^\sharp$.

ТЕОРЕМА 2.21. Для каждого $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ существует единственный ранговый проектор $Q^\sharp \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, который определяется формулой $Q^\sharp = Q(Q + Q^* - I)^{-1}$ и удовлетворяет условию $Q^\sharp \widetilde{\mathcal{M}} = Q \widetilde{\mathcal{M}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $(Q + Q^* - I)^2 = I + (Q - Q^*)(Q - Q^*)^*$. Далее, можно применить схему доказательства теоремы 1.3 [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) $(Q^\sharp)^\perp = ((Q^*)^\perp)^\sharp$;
- (ii) $((Q^*)^\sharp)^\perp = (Q^\perp)^\sharp$;
- (iii) для всех $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $QA = B$ выполнено $Q^\sharp B = B$;
- (iv) для всех $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $AQ = B$ выполнено $B(Q^*)^\sharp = B$.

ТЕОРЕМА 2.23. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$. Существует единственное разложение $Q = P + Z$, где $P = Q^\sharp \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и нильпотент $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ с $Z^2 = 0$ и $ZP = 0$, $PZ = Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1.7 [14].

Из теорем 2.18 и 2.19 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.24. Пусть $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ и $Q = P + Z$ — описанное выше разложение. Тогда

- (i) имеют место эквивалентности

$$\text{Im } Q \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \iff Q^*Q - QQ^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0 \iff Z \in \widetilde{\mathcal{M}}_0;$$

- (ii) если $Q \in \mathcal{M}^{\text{id}}$, то имеют место эквивалентности

$$\text{Im } Q \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \iff Q^*Q - QQ^* \in \mathcal{F}(\mathcal{M}) \iff Z \in \mathcal{F}(\mathcal{M}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Если $Q^*Q - QQ^* \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, то $|Z|^4 = -Z^*(Q^*Q - QQ^*)Z \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$, поэтому в силу п. 1) и п. 3) леммы 1.1 с $f(t) = t^{1/4}$ имеем $Z \in \widetilde{\mathcal{M}}_0$. Заметим, что $\text{Im } Q = \text{Im } Z$. Остальное очевидно.

Следующая теорема дополняет следствие 3.4 [9].

ТЕОРЕМА 2.25. Пусть число $0 < p < \infty$, $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ и $Q = P + Z$ — описанное выше разложение. Если $Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $P \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ и при $p = 1$ имеем $\tau(Q) = \tau(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $P = QP \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку перестановка $\mu_t(P) = \chi_{(0, \tau(P))}(t) \in \{0, 1\}$ для всех $t > 0$ и $\int_0^\infty \mu_t(P)^p dt < +\infty$, имеем $\tau(P) < +\infty$ и $P \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$. Поэтому $Z = Q - P \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $ZQ = 0$, $Q^\perp = (Q^\perp)^2$ и $Q^\perp Z = 0$, при $p = 1$ в силу леммы 1.3 с $A = ZQ^\perp$ и $B = Q^\perp$ имеем

$$\tau(Z) = \tau(ZQ + ZQ^\perp) = \tau(ZQ) + \tau(ZQ^\perp) = 0 + \tau(Z(Q^\perp)^2) = \tau(Q^\perp ZQ^\perp) = 0.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.26. Пусть $X \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $P \in \mathcal{M}^{\text{id}}$ и $Z = XP - PX$. Если $Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(Z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Если $Y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $Q \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ такие, что $QYQ^\perp \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то в силу леммы 1.3 с $A = Q$ и $B = QYQ^\perp$ имеем

$$\tau(QYQ^\perp) = \tau(Q \cdot QYQ^\perp) = \tau(QYQ^\perp \cdot Q) = \tau(0) = 0.$$

Шаг 2. Представив оператор Z в виде

$$Z = (P + P^\perp)Z(P + P^\perp) = PZP^\perp + P^\perp ZP \equiv Y_1 + Y_2,$$

имеем $Y_1, Y_2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$; дважды применяем шаг 1 к парам операторов $\{Y_1, Q_1 = P\}$ и $\{Y_2, Q_2 = P^\perp\}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.27. Пусть натуральное число $n \geq 2$, $P \in \mathcal{M}$ с $P^n = P$ и $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ такие, что $AP + PA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ для некоторого $0 < p < \infty$. Тогда

(i) операторы

$$T_k = P^k A - P^k A P^{n-1}, \quad S_k = A P^k - P^{n-1} A P^k$$

лежат в $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и при $p = 1$ имеем $\tau(T_k) = \tau(S_k) = 0$ для всех $k = 1, \dots, n-1$;

(ii) если n четно, то $AP, PA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Имеем

$$T_1 = P^{n-1} \cdot PA - PA \cdot P^{n-1} = P^{n-1}(AP + PA)(I - P^{n-1}) \in L_p(\mathcal{M}, \tau),$$

$$T_k = P^{n-1}(P^k(AP + PA))(I - P^{n-1}) \in L_p(\mathcal{M}, \tau), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

При $p = 1$ можно применить шаг 1 доказательства теоремы 2.26 с $Q = P^{n-1}$ (см. п. (ii) леммы 2.1) и

$$Y = \begin{cases} AP + PA, & \text{если } k = 1, \\ P^{k-1}(AP + PA), & \text{если } k = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

Поскольку

$$S_1 = AP \cdot P^{n-1} - P^{n-1} \cdot AP = (I - P^{n-1})(AP + PA)P^{n-1} \in L_p(\mathcal{M}, \tau),$$

$$S_k = (I - P^{n-1})((AP + PA)P^{k-1})P^{n-1} \in L_p(\mathcal{M}, \tau), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

при $p = 1$ можно применить шаг 1 доказательства теоремы 2.26 с $Q = I - P^{n-1}$ и

$$Y = \begin{cases} AP + PA, & \text{если } k = 1, \\ (AP + PA)P^{k-1}, & \text{если } k = 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

(ii) Если n четно, то, рассуждая аналогично доказательству п. (ii) теоремы 2.2, получаем $AP^n - P^n A = AP - PA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Утверждение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.28. Пусть $0 < p < \infty$, $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $P, Q \in \mathcal{M}^{\text{id}}$ с $PQ = QP = 0$, $B = P - Q$. Тогда

$$AB - BA \in L_p(\mathcal{M}, \tau) \iff AP - PA, AQ - QA \in L_p(\mathcal{M}, \tau);$$

при этом для $p = 1$ имеем

$$\tau(AB - BA) = \tau(AP - PA) = \tau(AQ - QA) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично доказательству п. (i) теоремы 2.2, получаем $AB^2 - B^2A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Легко видеть, что $B^2 = P + Q \in \mathcal{M}^{\text{id}}$. Для $p = 1$ дважды (с $\{A, P\}$ и $\{A, Q\}$) применяем теорему 2.26. Утверждение доказано.

ПРИМЕР 2.29. Снабдим алгебру фон Неймана $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ точным нормальным полуконечным следом $\tau = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \text{tr}_2$ и положим

$$A = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операторы $A, P \in \mathcal{M}^{\text{id}}$ и $AP = 0 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, но

$$PA = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin L_p(\mathcal{M}, \tau) \quad \text{для всех } 0 < p < \infty.$$

Теорема 2.5, следствия 2.6–2.8 и следующие два утверждения были анонсированы без доказательств в [15].

ТЕОРЕМА 2.30. Пусть число $0 < p < \infty$ и операторы $P \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\text{id}}$ и $Q \in \mathcal{M}^{\text{id}}$, $Z = PQ - QP$. Если $A \equiv P - Q \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A^2, Z \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и при $p = 1$ имеем $\tau(Z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < p < \infty$; имеем $AQ, QA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Поэтому $Z = AQ - QA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$ и при $p = 1$ имеем $\tau(Z) = 0$ в силу теоремы 2.26. Поскольку

$$P = A + Q = A^2 + Q + AQ + QA,$$

имеем $A - A^2 = AQ + QA \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Поэтому $A^2 \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Теорема доказана.

Из следствия 3.13 [9] и теоремы 2.30 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.31. Если $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ с $A = A^3$ и $A - A^2 \in \mathcal{M}$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. E. Segal, “A non-commutative extension of abstract integration”, *Ann. Math.*, **57**:3 (1953), 401–457.
- [2] E. Nelson, “Notes on non-commutative integration”, *J. Funct. Anal.*, **15**:2 (1974), 103–116.
- [3] F. J. Yeadon, “Non-commutative L^p -spaces”, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **77**:1 (1975), 91–102.
- [4] T. Fack, H. Kosaki, “Generalized s -numbers of τ -measurable operators”, *Pacific J. Math.*, **123**:2 (1986), 269–300.
- [5] A. M. Bikchentaev, “On noncommutative function spaces”, *Selected Papers in K-theory*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **154**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 179–187.
- [6] P. G. Dodds, T. K.-Y. Dodds, B. de Pagter, “Noncommutative Köthe duality”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339**:2 (1993), 717–750.
- [7] L. G. Brown, H. Kosaki, “Jensen’s inequality in semifinite von Neumann algebras”, *J. Operator Theory*, **23**:1 (1990), 3–19.
- [8] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.
- [9] А. М. Бикчентаев, “К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **98**:3 (2015), 337–348.

- [10] А. М. Бикчентаев, “О нормальных τ -измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 350–360.
- [11] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
- [12] А. М. Бикчентаев, “Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 41–54.
- [13] А. М. Бикчентаев, “О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:1 (2005), 32–45.
- [14] J. J. Koliha, “Range projections of idempotents in C^* -algebras”, *Demonstratio Math.*, **24**:1 (2001), 91–103.
- [15] А. М. Бикчентаев, “След и интегрируемые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана”, *ДАН*, **466**:2 (2016), 137–140.

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный
университет

E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Поступило

26.03.2015

Исправленный вариант

15.03.2016